UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

L. BIEBERBACH W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR H. WEYL

33. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1931

QA1
M88
v.33

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

L. BIEBERBACH W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR H. WEYL

33. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1931

66 53181

QA1
M88
v.33

Inhaltsverzeichnis

Seite

Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis 160
Baer, R., Abbildungseigenschaften algebraischer Erweiterungen 451
Beuermann, F., Wachstumsordnung, Koeffizientenwachstum und Nullstellendichte bei Potenzreihen mit endlichem Konvergenzkreis 98
Bochner, S., Allgemeine lineare Differenzengleichungen mit asymptotisch konstanten Koeffizienten 426
Brauer, A., Über den kleinsten quadratischen Nichtrest 161
Chowla, S. D., Some problems of diophantine approximation (I) 544
Franz, W., Untersuchungen zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz 275
Freudenthal, H., Über die Enden topologischer Räume und Gruppen 692
Gronwall, T. H., Über den Konvergenzbereich der Potenzreihenentwicklung einer harmonischen Funktion von n Veränderlichen 177
Haack, W., Affine Differentialgeometrie der parabolischen Strahlensysteme . . . 232
Haar, A., Über unendliche kommutative Gruppen 129
Hopf, E., Mathematisches zur Strahlungsgleichgewichtstheorie der Fixsternatmosphären 109
Jarník, V., Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre I. 62
Jarník, V., Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. Zweite Abhandlung . 85
Jarník, V., Über die simultanen diophantischen Approximationen 505
Jolles, St., Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz 733
Kamke, E., Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die Clairautsche Differentialgleichung“ 480
Karamata, J., Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze . . 294
Levitzki, J., Über vollständig reduzible Ringe und Unterringe 663
Lichtenbaum †, P., Über die Funktion $\chi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-s}$. Nach einem nachgelassenen Manuskript herausgegeben von O. Perron 641
Lösch, Fr., Über das Verhalten der Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises 791
Lubelski, S., Beweis und Verallgemeinerung eines Waring-Legendreschen Satzes 321
Mammana, G., Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari 186
Maruhn, K., Ein Beitrag zur mathematischen Theorie der Gestalt der Himmelskörper 300
Menger, K., Beiträge zur Gruppentheorie. I. Über eine Gruppenmetrik 396
Mukhopadhaya, S., Extended Minimum Number Theorems of Cyclic and Sextactic Points on a Plane Convex Oval 648

Seite

Nasarow, N., Über die Entwicklung einer beliebigen Funktion nach Laguerreschen Polynomen 481
Rothe, E., Über die Grundlösung bei parabolischen Gleichungen 488
Rothe, R., Zur Abelschen Integralgleichung 375
Schauder, J., Potentialtheoretische Untersuchungen. Erste Abhandlung 602
Schlesinger, L., Neue Grundlagen für einen Infinitesimalkalkul der Matrizen . 33
Schmidt, F. K., Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p . . 1
Schmidt, H., Über die komplementäre Klasse bei den hypozykloidischen Funktionssystemen 714
Szegö, G., Über einige neue Extremaleigenschaften der Kugel 419
Walfisz, A., Über einige trigonometrische Summen 564
Walther, A., Der Kreis durch drei Punkte 796
Weiss, E. A., Ein neues Analogon zum Satze von Desargues in Räumen von gerader Dimension 388
Wenkov, W. A., Über die Klassenanzahl positiver binärer quadratischer Formen 350
Wigert, S., Eine Bemerkung über ganze Funktionen 271

Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p.

Von

Friedrich Karl Schmidt in Erlangen.

Einleitung.

Die Dedekindsche Theorie der höheren Kongruenzen ist bekanntlich von Herrn E. Artin in zwei Arbeiten weiter fortgeführt worden[1]). Herr Artin adjungiert eine Quadratwurzel zum Körper $k(z)$ aller rationalen Funktionen in z mit Koeffizienten modulo einer Primzahl p_0 und entwickelt die Zahlentheorie aller in z ganzen Elemente des entstehenden Erweiterungskörpers. Auf diese Weise ergibt sich eine Idealtheorie, eine Theorie der Einheiten und eine analytische Theorie, deren Ergebnisse weitgehend mit den bekannten Verhältnissen bei den ganzen algebraischen Zahlen übereinstimmen. Hinsichtlich der verwendeten Methoden besteht jedoch ein bemerkenswerter Unterschied. Die Sätze über Ideale und Einheiten können allerdings durch Schlüsse gewonnen werden, die den üblichen nachgebildet sind, und sie gelten daher auch dann noch, wenn man an Stelle der quadratischen eine beliebige endliche Erweiterung von $k(z)$ zugrunde legt[2]). Dagegen stößt die Übertragung der gebräuchlichen analytischen Methoden zunächst auf Schwierigkeit, so daß Herr Artin die grundlegenden Sätze über die Zetafunktion in seinem quadratischen Fall durch spezielle Rechnungen herleiten mußte, die bei höheren Erweiterungen undurchführbar sind.

Die vorliegende Arbeit steckt sich daher das Ziel, die analytische Theorie für eine beliebige endliche Erweiterung K von $k(z)$ mit einfachen allgemeinen Hilfsmitteln zu begründen. Bei der Durchführung dieser Aufgabe sind zwei Gesichtspunkte wesentlich.

---

[1]) E. Artin, Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen I. u. II., Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 153—206 u. S. 207—246.

[2]) Vgl. P. Sengenhorst, Körper von der Charakteristik p, Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 1—39. Zitiert mit *S.* — F. K. Schmidt, Allgemeine Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen, Diss. Freiburg i. B. 1925. Zitiert mit *D.*

Einmal nehmen wir gegenüber dem Körper K die Stellung ein, die in der Theorie der algebraischen Funktionen üblich ist[3]). Wir betrachten also K ganz unabhängig von seiner Entstehung und billigen keinem Element von K eine ausgezeichnete Rolle zu. Es wird daher auch keiner der unendlich vielen Integritätsbereiche von K bevorzugt, vielmehr rücken überall die körperinvarianten Begriffe in den Vordergrund. So tritt an Stelle des Ideals der Divisor, an Stelle der Idealklassengruppe die Divisorenklassengruppe. Insbesondere ersetzen wir die von Herrn Artin eingeführte Zetafunktion, die sich auf die Primideale eines Integritätsbereichs stützt, durch eine neue körperinvariante Funktion, deren Definition in analoger Weise die Primdivisoren von K benutzt und die zur Zetafunktion des Herrn Artin in einer leicht angebbaren Beziehung steht.

Der Vorteil dieser Auffassung zeigt sich darin, daß nun die Hauptsätze der analytischen Theorie eine einfache und einheitliche Gestalt annehmen und einheitlich begründet werden können, während Herr Artin bei Formulierung und Beweis seiner Sätze verschiedene Fallunterscheidungen machen mußte. Als wichtigstes Beweismittel erscheint dabei ein Satz, der die Übertragung des bekannten Riemann-Rocheschen Satzes der algebraischen Funktionentheorie darstellt und den wir deshalb kurz als Riemann-Rocheschen Satz bezeichnen.

Die zweite Bemerkung, die wir im folgenden auswerten, besteht darin, daß die Theorie des Körpers K im wesentlichen ungeändert bleibt, wenn man den Koeffizientenkörper k durch eine endliche Erweiterung $\bar{k}$ ersetzt. Hiervon machen wir Gebrauch, indem wir uns zunächst durch geeignete Erweiterung von k Vereinfachungen schaffen und dann auf den ursprünglichen Körper zurückschließen. Auf diese Weise lassen sich leicht die Schwierigkeiten umgehen, die gegenüber der algebraischen Funktionentheorie daraus entstehen, daß k nicht algebraisch abgeschlossen ist. Der grundlegende Nachweis, daß K Divisoren jeder Ordnung enthält, beruht vornehmlich auf dieser Überlegung.

Die Darstellung der Arbeit gliedert sich dem Gedankengange gemäß in zwei Teile. Im ersten Teil wird die Theorie der Divisoren von K bis zum Riemann-Rocheschen Satz entwickelt. Die dabei benutzten Methoden schließen sich denen der algebraischen Funktionentheorie an, so daß es genügt, kurz die Abweichungen in den Definitionen und in der Beweisführung anzugeben. Nur der Nachweis der Invarianz des Geschlechts er-

---

[3]) Vgl. R. Dedekind u. H. Weber, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Journal f. d. r. u. a. Math. 92 (1882), S. 181—290. Im folgenden mit *D.-W.* zitiert. — K. Hensel u. G. Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Leipzig 1902. Zitiert mit *H.-L.*

fordert in § 5 weitergehende Überlegungen, da das übliche Differentiationsverfahren in Körpern von Primzahlcharakteristik[4]) nicht zum Ziele führt. Ein wenig ausführlicher muß ferner auch auf die Herleitung des Riemann-Rocheschen Satzes eingegangen werden; denn weder das bei *D.-W.* noch das bei *H.-L.* in der algebraischen Funktionentheorie eingeschlagene Verfahren läßt sich unmittelbar übertragen[5]).

Der zweite Teil bringt die Wendung zu Sätzen, die in der Zahlentheorie ihr Analogon haben; doch sind seine Methoden von denen der Zahlentheorie durchaus verschieden. Er beginnt mit der Behandlung der unendlichen Divisorenklassengruppe. Aus dem Riemann-Rocheschen Satz wird gefolgert, daß nur endlich viele Divisorenklassen der Ordnung 0 existieren und daß fast alle[6]) Untergruppen der Divisorenklassengruppe endlichen Index haben. Mit Hilfe des Riemann-Rocheschen Satzes läßt sich dann weiter die neu eingeführte Zetafunktion summieren und die so gewonnene Formel ermöglicht einmal die Residuenbestimmung, während andererseits abermalige Anwendung des Riemann-Rocheschen Satzes zur Funktionalgleichung führt. Zum Schluß werden die gewonnenen Ergebnisse für die von Herrn Artin betrachtete Zetafunktion nutzbar gemacht, wobei sich gelegentlich der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Divisoren- und Idealklassengruppe als Nebenresultat die Endlichkeit der Idealklassenzahl ergibt, die also bei unseren Überlegungen vorher nirgends vorkam[7]).

Die bekannten, häufig gebrauchten Tatsachen der Körper- und Idealtheorie sowie die einfachsten algebraischen Eigenschaften des Körpers K werden in zwei kurzen Paragraphen der eigentlichen Theorie vorangestellt, damit wir uns später ohne Weitläufigkeit darauf berufen können.

---

[4]) Zu den benutzten Begriffen und Sätzen der allgemeinen Körpertheorie vgl. E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Journ. f. d. r. u. a. Math. **137** (1910), S. 167—309.

[5]) *D.-W.* machen wesentlich davon Gebrauch, daß der in der algebraischen Funktionentheorie auftretende Koeffizientenkörper unendlich viele Elemente enthält; bei *H.-L.* wird dagegen die im allgemeinen nach gebrochenen Potenzen fortschreitende Potenzreihenentwicklung zum Ausgangspunkt genommen, die in Körpern der Charakteristik p_0 selbst bei algebraisch abgeschlossenem Koeffizientenkörper ihre Gültigkeit verliert, sobald das definierende Polynom über dem Körper aller nach ganzen Potenzen fortschreitenden Potenzreihen einen irreduziblen Faktor erster Art [4]) mit durch p_0 teilbarem Grad abspaltet. — Die in § 6 gegebene Beweisanordnung vereinigt Ansätze von *D.-W.* und *H.-L.*

[6]) D. h. alle mit nur endlich vielen Ausnahmen.

[7]) Auch der Fundamentalsatz aus der Theorie der Einheiten wird unserer ganzen Auffassung gemäß selbstverständlich nirgends benötigt. Er kann jedoch ebenso wie die Endlichkeit der Idealklassenzahl aus der Tatsache gefolgert werden, daß die Zahl aller Divisorenklassen der Ordnung 0 endlich ist. Hiervon gilt aber auch die Umkehrung, d. h. diese letzte Tatsache läßt sich auch mit Hilfe des Einheitensatzes und der Endlichkeit der Idealklassenzahl beweisen.

§ 1.

Zusammenstellung bekannter Tatsachen aus der Körper- und Idealtheorie.

1. Ist der Körper $\mathfrak{L}$ endliche Erweiterung des Unterkörpers $\mathfrak{K}$, $m=(\mathfrak{L}:\mathfrak{K})$ der Grad von $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{K}$ und $\beta_1, \ldots, \beta_m$ eine Basis von $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{K}$, so ordnet man einem Element α aus $\mathfrak{L}$ mit Hilfe der m Gleichungen

$$\alpha\beta_i = c_{i1}\beta_1 + \ldots + c_{im}\beta_m$$

die Matrix

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

zu, deren Elemente c_{ij} aus $\mathfrak{K}$ stammen. Die charakteristische Funktion

$$F(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

dieser Matrix ist von der besonderen Wahl der Basis $\beta_1, \ldots, \beta_m$ ganz unabhängig, also durch α, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{K}$ eindeutig bestimmt und heißt die charakteristische Funktion des Elementes α aus $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{K}$. Die charakteristische Funktion $F(x)$ von α ist gleich einer Potenz des bezüglich $\mathfrak{K}$ irreduziblen Polynoms

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

dessen Nullstelle α ist. Mit Hilfe der charakteristischen Funktion definiert man in bekannter Weise Norm $N(\alpha)$ und Spur $S(\alpha)$ des Elementes α von $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{K}$, und zwar setzt man

$$N(\alpha) = (-1)^m b_m = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}, \quad S(\alpha) = -b_1 = c_{11} + \ldots + c_{mm}.$$

Ist endlich $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ irgendein System, von m Elementen aus $\mathfrak{L}$, so erklärt man die Diskriminante $\Delta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ dieses Elementesystems aus $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{K}$ durch die Gleichungen

$$\Delta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) = \begin{vmatrix} S(\gamma_1\gamma_1) & \ldots & S(\gamma_1\gamma_m) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ S(\gamma_m\gamma_1) & \ldots & S(\gamma_m\gamma_m) \end{vmatrix}.$$

Ist $\mathfrak{L}$ von zweiter Art bezüglich $\mathfrak{K}$, so ist die Diskriminante jedes Systems von m Elementen aus $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{K}$ gleich 0. Ist dagegen $\mathfrak{L}$ von erster Art bezüglich $\mathfrak{K}$, so ist $\Delta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ dann und nur dann von 0 verschieden, wenn $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ eine Basis von $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{K}$ bilden.

2. Unter einem Ring verstehen wir in dieser Arbeit stets einen kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ ohne Nullteiler und mit Einselement der Multiplikation (also einen Integritätsbereich). Wir sagen, es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring des Körpers $\mathfrak{K}$, falls alle Elemente von $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{K}$ stammen und der Quotientenkörper von $\mathfrak{R}$ gleich $\mathfrak{K}$ ist, $\mathfrak{K} = Q(\mathfrak{R})$.

Für die Ideale eines Ringes $\mathfrak{R}$ verwenden wir die üblichen Definitionen[8]). Den Durchschnitt $\mathfrak{c}$ aller Ideale, die ein gegebenes System Σ von Elementen aus $\mathfrak{R}$ enthalten, bezeichnen wir als das aus Σ in $\mathfrak{R}$ abgeleitete Ideal. Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, der $\mathfrak{R}$ umfaßt, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{R}}$ bzw. $\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}}$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{S}$, so nennen wir das aus $\mathfrak{a}_{\mathfrak{R}}$ in $\mathfrak{S}$ abgeleitete Ideal $\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{a}_{\mathfrak{R}}$ das Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}_{\mathfrak{R}}$ bezüglich $\mathfrak{S}$, das Ideal $\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{R}$ das Verengungsideal von $\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}}$ bezüglich $\mathfrak{R}$. Jedes Element γ aus $\mathfrak{S}$, das einer Gleichung $\gamma^s + c_1 \gamma^{s-1} + \ldots + c_s = 0$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ genügt, heißt ganz abhängig von $\mathfrak{R}$. Ist jedes von $\mathfrak{R}$ ganz abhängige Element aus $\mathfrak{S}$ bereits in $\mathfrak{R}$ enthalten, so sagt man, $\mathfrak{R}$ sei ganz abgeschlossen in $\mathfrak{S}$.

Im folgenden haben wir es ausschließlich mit sogenannten Multiplikationsringen zu tun, d. h. mit Ringen, in denen jedes Ideal als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellbar ist. Die Idealtheorie dieser Ringe stimmt also mit der der ganzen algebraischen Zahlen eines endlichen Zahlkörpers überein und wir heben nur kurz einige häufig gebrauchte, allgemein gültige Tatsachen hervor.

3. Ein Multiplikationsring $\mathfrak{R}$ ist stets ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$, so verstehen wir unter $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}$ den Ring aller Quotienten zweier Elemente aus $\mathfrak{R}$, bei denen das Nennerelement zu $\mathfrak{a}$ prim ist[9]). Der Ring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}$ ist ein Hauptidealring (also gewiß auch Multiplikationsring) und es stimmen die Ideale von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}$ mit den Erweiterungsidealen $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{c}$ derjenigen Ideale $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{R}$ überein, deren Primidealteiler sämtlich in $\mathfrak{a}$ aufgehen. Ist $\mathfrak{c}$ ein derartiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, so gilt die reziproke Gleichung $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{c} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{c}$ und die Restklassenringe $\mathfrak{R}/\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{c}$, die aus $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}$ bei Zugrundelegung der Kongruenz nach $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{c}$ als Gleichheit hervorgehen, sind isomorph. Aus dem Gesagten ergibt sich: Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{R}$, so gestattet jedes Element α von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ eine Darstellung $\alpha = \varepsilon \pi$, wo ε eine Einheit von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ und π eine Basis des Primideals $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}$ ist; der Ring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ ist also maximaler Integritätsbereich, d. h. es gibt keinen Zwischenring zwischen ihm und seinem Quotientenkörper.

---

[8]) Zu den Grundbegriffen der Ring- und Idealtheorie vgl. E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. Math. Annalen **96** (1926), S. 26—61.

[9]) Zur Theorie der Quotientenringe vgl. H. Grell, Zur Theorie der Ordnungen in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **97** (1926), S. 524—558, § 2.

4. Es sei der Multiplikationsring $\mathfrak{S}$ Oberring des Multiplikationsringes $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ endlicher $\mathfrak{R}$-Modul. Dann ist auch jedes Ideal $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{S}$ endlicher $\mathfrak{R}$-Modul; es ist ferner der Quotientenkörper $\mathfrak{L} = Q(\mathfrak{S})$ von $\mathfrak{S}$ endlich bezüglich des Quotientenkörpers $\mathfrak{K} = Q(\mathfrak{R})$ und die charakteristische Funktion eines Elementes α aus $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{K}$ besitzt dann und nur dann Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$, wenn α zu $\mathfrak{S}$ gehört. $\mathfrak{S}$ besteht also aus allen von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elementen des Körpers $\mathfrak{L}$. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$, so ist auch $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{a}}$ endliche $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}$-Ordnung. Unter dem Grad f eines Primideals $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{S}$ verstehen wir den Grad des Restklassenkörpers $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ bezüglich des Unterkörpers $\mathfrak{R}/\mathfrak{R} \cap \mathfrak{P}$. Gilt für das Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$ die Zerlegung $\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_s^{e_s}$, wo $\mathfrak{P}_i$ den Grad f_i bezüglich $\mathfrak{R}$ hat und $m = (\mathfrak{L}:\mathfrak{K})$ ist, so ist $m = e_1 f_1 + \ldots + e_s f_s$.

5. Um die Norm[10]) eines Ideals $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$ zu erklären, nehme man zunächst an, daß der Unterring $\mathfrak{R}$ Hauptidealring ist. Dann besitzt jedes Ideal aus $\mathfrak{S}$, also auch $\mathfrak{S}$, eine Modulbasis bezüglich $\mathfrak{R}$, die aus $m = (\mathfrak{L}:\mathfrak{K})$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ linear unabhängigen Elementen besteht. Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ bzw. $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ eine solche Basis für das Ideal $\mathfrak{A}$ bzw. für $\mathfrak{S}$ und sind

$$\alpha_i = c_{i1}\sigma_1 + \ldots + c_{im}\sigma_m$$

die m Gleichungen, die $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ durch $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ ausdrücken, so heißt das aus der Determinante der c_{ik} in $\mathfrak{R}$ abgeleitete Ideal die Norm von $\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{R}$. Die Definition der Norm in dem allgemeinen Falle, wo $\mathfrak{R}$ Multiplikationsring ist, wird mit Hilfe der Quotientenringe auf die des Hauptidealrings zurückgeführt. Ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{R}$ das Verengungsideal von $\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{R}$, so ist die Norm von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{b}}\cdot\mathfrak{A}$ bezüglich des Hauptidealringes $\mathfrak{R}_{\mathfrak{b}}$ als Ideal von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{b}}$ erklärt. Das Verengungsideal dieses Ideals bezüglich $\mathfrak{R}$ ist die Norm von $\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{R}$. Die Norm eines Primideals $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{S}$ ist gleich der f-ten Potenz des durch $\mathfrak{P}$ teilbaren Primideals $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{R}$, wenn f der Grad von $\mathfrak{P}$ bezüglich $\mathfrak{R}$ ist; es ist ferner die Norm eines Produktes von Idealen gleich dem Produkt der Normen.

6. Im folgenden setzen wir voraus, daß $\mathfrak{L}$ ein Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten mit vollkommenem Koeffizientenkörper ist. Ist $(\mathfrak{L}:\mathfrak{K}) = m$ und durchlaufen $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ alle Systeme bezüglich $\mathfrak{K}$ linear unabhängiger Elemente aus $\mathfrak{S}$, so heißt das aus den zugehörigen Diskriminanten $\Delta(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ in $\mathfrak{R}$ abgeleitete Ideal das Diskriminantenideal[11]) von $\mathfrak{S}$ bezüglich $\mathfrak{R}$. Das Diskriminantenideal ist von 0 verschieden,

---

[10]) Zur Theorie der Norm vgl. H. Grell, Zur Theorie der Ordnungen in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **97** (1926), S. 524—558, § 4.

[11]) Zur Theorie der Diskriminante vgl. E. Noether, Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers, Journ. f. d. r. u. a. Math. **157**, S. 82—104.

wenn $\mathfrak{L}$ von erster Art bezüglich $\mathfrak{K}$ ist und ist in diesem Falle durch alle und nur die Primideale $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}$ teilbar, deren Erweiterungsideal $\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{p}$ in $\mathfrak{S}$ durch das Quadrat eines Primideals teilbar ist. Ist $\mathfrak{R}$ insbesondere Hauptidealring, so bezeichnet man die bis auf eine Einheit bestimmte Basis des Diskriminantenideals als Diskriminante von $\mathfrak{S}$ bezüglich $\mathfrak{R}$.

7. Unter einem gebrochenen Ideal von $\mathfrak{S}$ versteht man eine Menge von Elementen des Quotientenkörpers $\mathfrak{L} = Q(\mathfrak{S})$, die einen endlichen $\mathfrak{S}$-Modul bildet; die Ideale, welche nur Elemente aus $\mathfrak{S}$ enthalten, werden zur Unterscheidung ganze Ideale genannt.

Wir nehmen nun an, daß der Quotientenkörper $\mathfrak{L} = Q(\mathfrak{S})$ von erster Art in bezug auf $\mathfrak{K} = Q(\mathfrak{R})$ sei. Ist dann $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Ideal von $\mathfrak{S}$, so bildet die Menge $\mathfrak{A}^*$ aller Elemente α^* aus $\mathfrak{L}$, für die $S(\alpha^* \alpha)$ bei beliebigem α aus $\mathfrak{A}$ stets in $\mathfrak{R}$ liegt, ein gebrochenes Ideal, daß zu $\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{R}$ komplementäre Ideal. Es ist $\mathfrak{A}^* = \frac{1}{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}}$, wo $\mathfrak{D}$ ein ganzes, von $\mathfrak{A}$ unabhängiges Ideal aus $\mathfrak{S}$ ist. $\mathfrak{D}$ heißt die Differente[12]) von $\mathfrak{S}$ bezüglich $\mathfrak{R}$ und es ist die Norm von $\mathfrak{D}$ bezüglich $\mathfrak{R}$ gleich der Diskriminante von $\mathfrak{S}$ bezüglich $\mathfrak{R}$.

Ist $\mathfrak{R}$ Hauptidealring und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ eine linear unabhängige Basis von $\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{R}$, so ist eine Basis $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*$ von $\mathfrak{A}^*$ definiert durch die Gleichungen

$$\alpha_i = a_{i1}\, \alpha_1^* + \ldots + a_{im}\, \alpha_m^*,$$

wo $a_{ij} = S(\alpha_i \alpha_j)$ ist.

Zwischen Diskriminanten- bzw. Differentenideal ($\mathfrak{d}$ bzw. $\mathfrak{D}$) von $\mathfrak{S}$ bezüglich $\mathfrak{R}$ und den entsprechenden Idealen der Quotientenringe besteht folgender Zusammenhang. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$, so ist das Diskriminanten- bzw. Differentenideal von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{a}}$ bezüglich $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}}$ gleich $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{R}_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{d}$. Das Diskriminanten- bzw. Differentenideal von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{p}}$ bezüglich $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ ist also nur für endlich viele Primideale $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}$ vom Einheitsideal verschieden, nämlich für alle und nur die Primideale $\mathfrak{p}$, die im Diskriminantenideal $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{S}$ bezüglich $\mathfrak{R}$ aufgehen.

§ 2.

Der Grundkörper.

1. Den nachstehenden Untersuchungen liegt ein Körper K mit folgenden Eigenschaften zugrunde. Der größte in K enthaltene, absolut algebraische Körper k ist von Primzahlcharakteristik p_0 und K kann aus k durch Adjunktion eines transzendenten Elements z nebst nachfolgender endlich algebraischer Erweiterung erzeugt werden.

---

[12]) Zur Definition der Differente vgl. E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923. § 36 und 38.

Über die Zahl der Elemente von k wird zunächst nichts vorausgesetzt; ist sie endlich, so ist sie gleich einer Potenz von p_0 und wird durch p wiedergegeben.

Offenbar kann K aufgefaßt werden als Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten z mit k als Koeffizientenbereich. Von diesem Standpunkt aus werden wir K betrachten, wobei uns die Analogie mit der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen und beliebigen Zahlenkoeffizienten zum Leitstern dient.

2. Sind z und ϑ zwei nicht zu k gehörige Elemente aus K, so gibt es stets ein irreduzibles Polynom[13]) $P(x, y)$ in zwei Unbestimmten x und y mit Koeffizienten aus k, das für $x = z$, $y = \vartheta$ zu Null wird, $P(z, \vartheta) = 0$. Da die p_0-te Wurzel aus einem Element von k stets wieder in k enthalten ist[14]), kann $P(x, y)$ wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität nicht gleichzeitig Polynom in x^{p_0} und y^{p_0} sein, d. h. es ist eines der beiden Elemente z und ϑ von erster Art in bezug auf den Körper, der aus k durch Adjunktion des andern entsteht.

3. Der Körper K ist endlich in bezug auf jeden Unterkörper K^*, der k und mindesten ein nicht zu k gehöriges Element enthält. Ist z ein derartiges Element und bedeutet $\mathfrak{Z}$ den Ring aller Elemente aus K, die von dem Polynombereich $k[z]$ ganz abhängen (kurz: aller in z ganzen Elemente aus K), so ist $\mathfrak{Z}$ stets endlicher $k[z]$-Modul[15]). $\mathfrak{Z}$ ist Multiplikationsring[16]); ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{Z}$, K^* ein beliebiger Unterkörper von K, welcher k umfaßt, so heißt der Grad des Restklassenkörpers $\mathfrak{Z}/\mathfrak{p}$ bezüglich $\mathfrak{Z} \cap K^*/\mathfrak{p} \cap K^*$ der Grad von $\mathfrak{p}$ bezüglich K^*. Zwischen dem Grad von $\mathfrak{p}$ bezüglich k und der Norm $N(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$ bezüglich $k[z]$ besteht folgender Zusammenhang. Ist q ein Basiselement von $N(\mathfrak{p})$ in $k[z]$, q also Polynom in z, so ist der Grad dieses Polynoms in z gerade gleich dem Grad von $\mathfrak{p}$ bezüglich k.

4. Bedeutet $\overline{K}$ eine Erweiterung von K, die aus K durch Adjunktion eines endlichen oder unendlichen Systems absolut algebraischer Elemente entsteht, und ist $\bar{k}$ der Koeffizientenkörper von $\overline{K}$, so kann der Ring $\overline{\mathfrak{Z}}$ aller in z ganzen Elemente von $\overline{K}$ aus $\mathfrak{Z}$ durch Ringadjunktion von $\bar{k}$ erzeugt werden, $\overline{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}[\bar{k}]$[17]). Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathfrak{Z}$, so besteht also das

---

[13]) Das beweist man genau wie in der algebraischen Funktionentheorie, vgl. *D.-W.*, § 13.

[14]) Vgl. loc. cit. [4]).

[15]) Vgl. *D.*, Kap. II.

[16]) Vgl. *D.*, Kap. III, § 1.

[17]) Das schließt man so: Ist $\overline{K}$ endlich in bezug auf K, $(\overline{K}:K) = n$ und $\eta_1, \ldots, \eta_n$ ein System bezüglich k linear unabhängiger Elemente aus $\bar{k}$, so ist jedes Element $\bar{\gamma}$ aus $\overline{\mathfrak{Z}}$ sicher in der Form $\bar{\gamma} = x_1\eta_1 + \ldots + x_n\eta_n$ darstellbar, wo die x_i aus K stammen.

(Fortsetzung der Fußnote [17]) auf nächster Seite.)

Erweiterungsideal $\overline{\mathfrak{J}} \cdot \mathfrak{a}$ aus allen verschiedenen Elementen der Gestalt $\alpha_1 \eta_1 + \ldots + \alpha_n \eta_n$, wo $\eta_1, \ldots, \eta_n$ alle endlichen Systeme bezüglich k linear unabhängiger Elemente aus $\bar{k}$ und die α_i sämtliche Elemente aus $\tilde{\mathfrak{a}}$ durchlaufen. Daraus folgt mühelos, daß die Differente von $\overline{\mathfrak{J}}$ bezüglich $\bar{k}[z]$ das Erweiterungsideal der Differente von $\mathfrak{J}$ bezüglich $k[z]$ ist. Für ein Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ aus $\mathfrak{J}$ läßt sich ferner die Zerlegung des Erweiterungsideals $\overline{\mathfrak{J}} \cdot \tilde{\mathfrak{p}}$ vollständig übersehen. Ist nämlich f der Grad von $\tilde{\mathfrak{p}}$ bezüglich k und m der größte positive Teiler von f der Art, daß in $\bar{k}$ ein Unterkörper des Grades m bezüglich k enthalten ist, so zerfällt $\overline{\mathfrak{J}} \cdot \tilde{\mathfrak{p}}$ in $\overline{\mathfrak{J}}$ in ein Produkt von m verschiedenen Primidealen des Grades $\frac{f}{m}$ bezüglich $\bar{k}$ [18]). Ist also $\tilde{\mathfrak{a}}_{\overline{\mathfrak{J}}}$ ein Ideal aus $\mathfrak{J}$, $\tilde{\mathfrak{p}}_{\overline{\mathfrak{J}}}$ ein Primideal aus $\overline{\mathfrak{J}}$, so geht $\tilde{\mathfrak{p}}_{\overline{\mathfrak{J}}}$ in dem Erweiterungsideal $\overline{\mathfrak{J}} \cdot \mathfrak{a}_{\mathfrak{J}}$ mit der gleichen Potenz auf, wie das Verengungsideal $\tilde{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J} \cap \tilde{\mathfrak{p}}_{\overline{\mathfrak{J}}}$ in $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{J}}$.

I. Teil.

Theorie der Divisoren von K.

§ 3.

Die Stellen des Körpers K.

1. Die Grundlage einer arithmetischen Theorie des Körpers K, welche keinem Element von K eine ausgezeichnete Stellung einräumt, ist der Begriff des Divisors von K. Er beruht seinerseits auf der Definition der „Stellen" von K, die wir daher zunächst einführen.

Leitend ist dabei das Vorbild der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen mit beliebigen komplexen Zahlkoeffizienten. Dort bildet die Gesamtheit der an einer Stelle endlichen Funktionen einen den Koeffizientenkörper umfassenden Integritätsbereich, der zwei wesentliche Eigenschaften besitzt. Einmal stellt die Menge der an der betreffenden Stelle verschwin-

---

In bekannter Weise ergibt sich hieraus eine Darstellung $\bar{\gamma} = \frac{\gamma_1 \eta_1 + \ldots + \gamma_n \eta_n}{\Delta_K(\eta_1, \ldots, \eta_n)}$, wo γ_i Elemente von $\mathfrak{J}$ und $\Delta_K(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ die Diskriminante bezüglich K von $\eta_1, \ldots, \eta_n$, also $\Delta_K(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ Element aus k ist. Wenn $\bar{K}$ endlich bezüglich K ist, ist also $\overline{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}[\bar{k}]$. Den Fall, daß $\bar{K}$ bezüglich K unendlich ist, führt man auf den vorigen zurück durch die Bemerkung, daß auch dann jedes Element aus $\overline{\mathfrak{J}}$ einer endlichen Erweiterung von K angehört und somit nach dem obigen in $\mathfrak{J}[\bar{k}]$ enthalten ist.

[18]) Ist $\bar{K} = K(\eta)$, wo η absolut algebraisch ist, so findet man die Zerfällung von $\overline{\mathfrak{J}} \cdot \tilde{\mathfrak{p}}$ aus der Zerlegung mod $\tilde{\mathfrak{p}}$ des bezüglich k irreduziblen Polynoms, dessen Nullstelle η ist. Daraus folgt die Behauptung des Textes zunächst für endliche Erweiterungan $\bar{K}$ von K. Für unendliche Erweiterungen ergibt sie sich dann mit Hilfe der Bemerkung, daß in einem Oberkörper $\bar{K}$ mit zu f teilerfremdem Grad nach vorstehendem keine Zerfällung des Primideals erfolgen kann.

denden Funktionen ein Ideal dieses Integritätsbereiches dar, wobei man die an der fraglichen Stelle verschwindenden Funktionen rein arithmetisch einfach als Nichteinheiten des zugehörigen Integritätsbereiches charakterisieren kann. Andererseits ist eine Funktion ξ, die einer Gleichung

$$\xi^m + a_1 \xi^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

genügt, bei der die Koeffizienten a_i an der betrachteten Stelle endlich sind, stets selbst endlich, d. h. der Integritätsbereich der an der Stelle endlichen Funktionen ist ganz abgeschlossen.

Das veranlaßt uns, die nachstehende Definition auszusprechen.

Definition. Unter einer Stelle des Körpers K verstehen wir einen von K verschiedenen Ring $\mathfrak{P}$ des Körpers K mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Menge der Nichteinheiten von $\mathfrak{P}$ bildet ein Ideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$.

2. $\mathfrak{P}$ ist ganz abgeschlossen in K.

Als einfache Folge aus dieser Definition ergibt sich, daß das Ideal $\mathfrak{p}$ der Nichteinheiten von $\mathfrak{P}$ ein Primideal ist, da das Produkt zweier Nichteinheiten stets wieder eine Nichteinheit ist. $\mathfrak{p}$ heißt das zu $\mathfrak{P}$ gehörige Primideal.

Die Existenz unendlich vieler Stellen des Körpers K wird durch nachfolgenden einfachen Satz sichergestellt, der zugleich die Beziehung zwischen den Stellen $\mathfrak{P}$ von K und den Primidealen $\tilde{\mathfrak{p}}$ des Ringes $\mathfrak{J}$ aller in z ganzen Elemente aus K angibt.

Satz 1. *Ist $\tilde{\mathfrak{p}}$ ein Primideal aus $\mathfrak{J}$, so ist $\mathfrak{J}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ eine Stelle $\mathfrak{P}$ von K.*

Umgekehrt: Ist z ein nicht zu k gehöriges Element der Stelle $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{J}$ der Integritätsbereich aller in z ganzen Elemente aus K und $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}$ das Verengungsideal des zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Primideals $\mathfrak{p}$, so ist $\tilde{\mathfrak{p}}$ Primideal und $\mathfrak{J}_{\tilde{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{P}$.

Der erste Teil dieses Satzes geht unmittelbar aus § 1, 3 hervor. Vom zweiten Teil leuchtet die Behauptung, $\tilde{\mathfrak{p}}$ sei Primideal, ohne weiteres ein, und es ist klar, daß $\mathfrak{J}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ ganz in $\mathfrak{P}$ enthalten ist. Daraus folgt aber sofort $\mathfrak{J}_{\tilde{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{P}$, weil $\mathfrak{J}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ maximaler Integritätsbereich ist.

Die in Satz 1 enthaltene Gleichung $\mathfrak{J}_{\tilde{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{P}$ führt weiter zu dem Ergebnis

Satz 2. *Eine Stelle $\mathfrak{P}$ von K ist stets Hauptidealring, und es ist jedes Element von K eindeutig in der Form $\alpha = \varepsilon \pi^e$ darstellbar, wo π eine Basis des zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Primideals $\mathfrak{p}$, ε eine Einheit von $\mathfrak{P}$ und e eine positive oder negative ganze Zahl darstellt.*

Die Menge aller ganzen und gebrochenen Ideale von $\mathfrak{P}$ wird also durch die Menge aller positiven und negativen Potenzen $\mathfrak{p}^e$ des zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}$ erschöpft.

Da ein Element α dann und nur dann zu $\mathfrak{P}$ gehört, wenn in der Darstellung $\alpha = \varepsilon \pi^e$ der Exponent $e \gtrless 0$ ist, so folgt, daß stets entweder α oder $\frac{1}{\alpha}$ in $\mathfrak{P}$ liegt, und zwar ist $\frac{1}{\alpha}$ notwendig Element von $\mathfrak{p}$, wenn α nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten ist. Diese Tatsache ermöglicht es, mit Hilfe von Satz 1 einen vollständigen Überblick über alle Stellen von K zu gewinnen.

Satz 3. *Bedeutet $\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{J}'$ den Ring aller in z bzw. $\frac{1}{z}$ ganzen Elemente aus K, so erhält man alle Stellen von K und jede nur einmal, wenn man die sämtlichen Quotientenringe $\mathfrak{J}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ bzw. $\mathfrak{J}'_{\tilde{\mathfrak{p}}'}$ betrachtet, wo $\tilde{\mathfrak{p}}$ alle Primideale aus $\mathfrak{J}$, $\tilde{\mathfrak{p}}'$ alle in $\frac{1}{z}$ aufgehenden Primideale aus $\mathfrak{J}'$ durchläuft.*

2. Ist $\mathfrak{P}$ eine Stelle von K, $\mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal, K^* ein Unterkörper von K, der mindestens ein nicht zu k gehöriges Element enthält, so ist $K^* \cap \mathfrak{P}$ eine Stelle $\mathfrak{P}^*$ von K^* und $K^* \cap \mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal $\mathfrak{p}^*$. $\mathfrak{P}^*$ bzw. $\mathfrak{p}^*$ heißt die Verengung von $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{p}$ bezüglich K^*. Die Gesamtheit der Stellen $\mathfrak{P}$ von K, deren Verengung gleich $\mathfrak{P}^*$ ist, nennen wir untereinander konjugiert bezüglich K^*.

3. Unter Benützung der in Satz 2 angegebenen Darstellung jedes Elements aus K läßt sich ohne Schwierigkeit der Begriff der Ordnung eines Elements an der Stelle $\mathfrak{P}$ erklären. Diese Definition der Ordnung wird dabei so einzurichten sein, daß die aus der Theorie der algebraischen Funktionen bekannten Sätze über die Ordnung von Funktionen im wesentlichen in unserem Fall erhalten bleiben. Um dies zu erreichen, erklären wir: Ist $\mathfrak{P}\alpha = \mathfrak{p}^e$ und f der Grad von $\mathfrak{p}$ bezüglich k, so schreiben wir α die Ordnung ef für die Stelle $\mathfrak{P}$ zu. Es ist dann offenbar die Ordnung eines Produktes gleich der Summe der Ordnungen der einzelnen Faktoren.

§ 4.

Divisoren.

1. Ein Element z aus K erzeugt nur in endlich vielen Stellen $\mathfrak{P}$ ein vom Einheitsideal verschiedenes Ideal $\mathfrak{P} \cdot z$, nämlich in allen und nur den Stellen $\mathfrak{P} = \mathfrak{J}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ bzw. $\mathfrak{P} = \mathfrak{J}'_{\tilde{\mathfrak{p}}'}$, bei denen $\tilde{\mathfrak{p}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{p}}'$ ein in z bzw. $\frac{1}{z}$ aufgehendes Primideal des Ringes $\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{J}'$ aller in z bzw. $\frac{1}{z}$ ganzen Elemente bedeutet. Seien $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ diese Stellen und $\mathfrak{P}_i \cdot z = \mathfrak{p}_i^{e_i}$ die Darstellung von $\mathfrak{P}_i \cdot z$ als Potenz des zu $\mathfrak{P}_i$ gehörigen Primideals $\mathfrak{p}_i$, wo also $e_i \gtrless 0$ ist, so läßt sich offenbar das arithmetische Verhalten von z in allen Stellen von K dadurch beschreiben, daß man z den eindeutig bestimmten, rein formalen Ausdruck $\mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{p}_s^{e_s}$, den sogenannten Divisor von z zuordnet.

2. Allgemein verstehen wir unter einem Divisor $\mathfrak{c}$ von K einen beliebigen, rein formalen Ausdruck $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\dots\mathfrak{p}_s^{e_s}$, wo $\mathfrak{p}_i$ Primideal einer Stelle $\mathfrak{P}_i$ von K und e_i eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist. Für Divisoren übernehmen wir die aus der algebraischen Funktionentheorie bekannten Definitionen, an die wir kurz erinnern[19]).

Der Divisor $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}$, wo $\mathfrak{p}$ Primideal einer Stelle $\mathfrak{P}$ von K ist, heißt Primdivisor von K. Zu jeder Stelle gehört somit ein bestimmter Primdivisor und umgekehrt; sind die Stellen $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_m$ konjugiert bezüglich K^*, so sollen auch die zugehörigen Primdivisoren $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ bezüglich K^* konjugiert genannt werden. Für einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ erklären wir den Exponenten e, mit dem $\mathfrak{p}$ in dem Divisor $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\dots\mathfrak{p}_s^{e_s}$ auftritt, durch die Festsetzung: $e = e_i$, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ und $i = 1, 2, \dots, s$, $e = 0$, wenn $\mathfrak{p}$ von allen $\mathfrak{p}_i$ verschieden. Wir sagen, $\mathfrak{p}$ trete in $\mathfrak{c}$ wirklich auf, wenn der Exponent $e \neq 0$ ist.

Die kommutative Multiplikationsgruppe, die durch sämtliche Primdivisoren von K als freie Erzeugende definiert ist, enthält alle und nur die Divisoren von K; sie soll daher die Gruppe der Divisoren von K genannt werden. Das in dieser Gruppe eindeutig bestimmte Produkt der Divisoren $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ werde durch $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, der Quotient durch $\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{c}_2}$ wiedergegeben. Ein Divisor, in dem jeder Primdivisor mit dem Exponenten 0 auftritt, soll als Einheitsdivisor $\mathfrak{e}$ bezeichnet werden.

Der Divisor $\mathfrak{c}$ heißt ganz, wenn jeder Primdivisor in $\mathfrak{c}$ mit nicht negativem Exponent auftritt; $\mathfrak{c}$ ist ganz in bezug auf den Divisor $\mathfrak{c}'$, wenn jeder in $\mathfrak{c}'$ wirklich auftretende Primdivisor in $\mathfrak{c}$ mit nicht negativem Exponenten vorkommt. Offenbar ist jeder Divisor $\mathfrak{c}$ Quotient zweier ganzer Divisoren, $\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{c}_2}$; dabei sind $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ eindeutig bestimmt, wenn man fordert, daß kein Primdivisor gleichzeitig in $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ wirklich auftritt. In diesem Fall wird $\mathfrak{c}_1$ bzw. $\mathfrak{c}_2$ der Zähler- bzw. Nennerdivisor von $\mathfrak{c}$ genannt oder, falls $\mathfrak{c}$ der Divisor eines Elements z ist, kurz der Zähler- bzw. Nennerdivisor von z.

Wir sagen: Der Divisor $\mathfrak{c}'$ ist teilbar durch den Divisor $\mathfrak{c}''$, wenn $\frac{\mathfrak{c}'}{\mathfrak{c}''}$ ganz in bezug auf $\mathfrak{c}''$ ist; $\mathfrak{c}'$ ist Multiplum von $\mathfrak{c}''$, wenn $\frac{\mathfrak{c}'}{\mathfrak{c}''}$ ganz ist. Ein Element z ist durch den Divisor $\mathfrak{c}$ teilbar bzw. Multiplum von $\mathfrak{c}$, wenn der Divisor von z durch $\mathfrak{c}$ teilbar bzw. Multiplum von $\mathfrak{c}$ ist. Ist $z_1 - z_2$ durch $\mathfrak{c}$ teilbar, so schreibt man auch $z_1 \equiv z_2 \bmod \mathfrak{c}$.

---

[19]) Vgl. etwa K. Hensel, Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen, Enzykl. d. math. Wiss. 2, 3. Teil, 1. Hälfte, S. 533—650, Nr. 3 und 10.

3. Im Divisor eines Elements α aus K tritt dann und nur dann jeder Primdivisor mit dem Exponenten 0 auf, wenn α absolut algebraisch ist, d. h. zu k gehört. Ein Element aus K ist daher durch seinen Divisor bis auf einen Faktor aus k eindeutig bestimmt. Der Ring $\mathfrak{J}$ aller in z ganzen Elemente stimmt überein mit der Menge derjenigen Elemente aus K, deren Nennerdivisoren nur solche Primdivisoren wirklich enthalten, welche auch im Nennerdivisor von z vorkommen.

Ist $\mathfrak{R}$ ein Multiplikationsring des Körpers K, $\tilde{c}$ ein ganzes oder gebrochenes Ideal aus $\mathfrak{R}$ und $\tilde{c} = \tilde{\mathfrak{p}}_1^{e_1} \cdot \tilde{\mathfrak{p}}_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot \tilde{\mathfrak{p}}_s^{e_s}$ die Primidealdarstellung von $\tilde{c}$, so bezeichnen wir den Divisor $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{p}_s^{e_s}$, wo $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{R}_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} \cdot \tilde{\mathfrak{p}}_i$ ist, als zu $\tilde{c}$ gehörigen Divisor. Umgekehrt gehört zu jedem Divisor $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{p}_s^{e_s}$ ein ganzes oder gebrochenes Ideal $\tilde{c}$ des Multiplikationsrings $\mathfrak{R}$, sobald $\mathfrak{R}$ in allen Stellen $\mathfrak{P}_i$ enthalten ist, welche zu den in $\mathfrak{c}$ wirklich auftretenden Primdivisoren gehören. Dabei ist $\tilde{c} = \tilde{\mathfrak{p}}_1^{e_1} \ldots \tilde{\mathfrak{p}}_s^{e_s}$ und $\tilde{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{p}_i \cap \mathfrak{R}$.

4. Um Ordnung und Norm eines Divisors zu erklären, führen wir diese Begriffe zunächst für Primdivisoren ein.

Besitzt das Ideal $\mathfrak{p}$ der Stelle $\mathfrak{P}$ von K den Grad f bezüglich k, so schreiben wir $\mathfrak{p}$ die Ordnung f zu und definieren allgemein die Ordnung des Divisors $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{p}_s^{e_s}$ durch die ganze Zahl $e_1 f_1 + \ldots + e_s f_s$. Der Divisor eines Elements besitzt stets die Ordnung 0. Dies ist für die Elemente aus k (nach dem in der vorigen Nummer Festgestellten) trivial und ergibt sich für ein nicht zu k gehöriges Element z, indem man im Ring $\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{J}'$ der in z bzw. $\frac{1}{z}$ ganzen Elemente die Primidealzerlegung des aus z bzw. $\frac{1}{z}$ abgeleiteten Ideals betrachtet[20]). Im Körper $k(z)$ gibt es zu jedem vorgegebenen Divisor der Ordnung 0 dieses Körpers ein Element, dessen Divisor mit dem vorgegebenen übereinstimmt.

Ist f^* der Grad des Primideals $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ bezüglich K^* und $\mathfrak{p}^*$ das Primideal der Verengung $\mathfrak{P}^*$ von $\mathfrak{P}$ bezüglich K^*, so verstehen wir unter der Norm des Primdivisors $\mathfrak{p}$ bezüglich K^* den Divisor $\mathfrak{p}^{*f^*}$ von K^*. Als Norm des Divisors $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{p}_s^{e_s}$ bezüglich K^* definieren wir den Divisor $\mathfrak{c}^* = \mathfrak{p}_1^{*e_1 f_1^*} \mathfrak{p}_2^{*e_2 f_2^*} \ldots \mathfrak{p}_s^{*e_s f_s^*}$ von K^*, falls $\mathfrak{p}_i^{*f_i^*}$ die Norm von $\mathfrak{p}_i$ bezüglich K^* ist. Man erkennt: Ist der Multiplikationsring $\mathfrak{R}$ aus K endlich in bezug auf den Multiplikationsring $\mathfrak{R}^*$ aus K^*, so ist die Norm des zum Ideal $\tilde{c}$ von $\mathfrak{R}$ gehörigen Divisors $\mathfrak{c}$ von K gleich dem Divisor von K^*, der zur Norm von $\mathfrak{c}$ bezüglich $\mathfrak{R}^*$ gehört.

5. Mit Hilfe der Beziehung zwischen Idealen und Divisoren kann endlich der Begriff des Diskriminanten- bzw. Differentendivisors von K bezüglich K^* eingeführt werden.

---

[20]) Vgl. § 1, 4.

$\mathfrak{P}^*$ sei eine Stelle von K^*, $\mathfrak{O}$ der Ring aller $\mathfrak{P}^*$-ganzen Elemente aus K. Der zum Diskriminanten- bzw. Differentenideal von $\mathfrak{O}$ bezüglich $\mathfrak{P}^*$ gehörige Divisor von K^* bzw. K heißt der Diskriminanten- bzw. Differentendivisor von K bezüglich $\mathfrak{P}^*$, in Zeichen: $\mathfrak{d}^*_{K\mathfrak{P}^*}$ bzw. $\mathfrak{d}_{K\mathfrak{P}^*}$. Aus § 1, 7 und § 3 Satz 3 schließt man, daß $\mathfrak{d}^*_{K\mathfrak{P}^*}$ bzw. $\mathfrak{d}_{K\mathfrak{P}^*}$ nur für endlich viele Stellen $\mathfrak{P}^*$ von K^* vom Einheitsdivisor verschieden ist. Das Produkt der Diskriminanten- bzw. Differentendivisoren von K in bezug auf sämtliche Stellen $\mathfrak{P}^*$ von K^* ist daher ein bestimmter Divisor, der Diskriminantendivisor $\mathfrak{d}^*_{KK^*}$ bzw. Differentendivisor $\mathfrak{d}_{KK^*}$ von K bezüglich K^*. Man hat $\mathfrak{d}^*_{KK^*} = N(\mathfrak{d}_{KK^*})$, da für jedes $\mathfrak{P}^*$ $\mathfrak{d}^*_{K\mathfrak{P}^*} = N(\mathfrak{d}_{K\mathfrak{P}^*})$ ist. Ist $\mathfrak{c}$ ein beliebiger Divisor von K, so heißt $\frac{1}{\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}_{KK^*}}$ der zu $\mathfrak{c}$ bezüglich K^* komplementäre Divisor.

Die Ordnung des Divisors $\mathfrak{d}_{KK^*}$ heißt die Verzweigungszahl von K bezüglich K^*. Die Verzweigungszahl w_z von K bezüglich $k(z)$ läßt sich nach dem in §§ 1, 2, 3 Angegebenen auch folgendermaßen bestimmen. Ist $\mathfrak{Z}$ bzw. $\mathfrak{Z}'$ der Ring aller in z bzw. in $\frac{1}{z}$ ganzen Elemente aus K, so ist w_z gleich dem Grad der Diskriminante von $\mathfrak{Z}$ bezüglich $k(z)$ vermehrt um den Exponenten der höchsten Potenz von $\frac{1}{z}$ der in der Diskriminante von $\mathfrak{Z}'$ bezüglich $k\left[\frac{1}{z}\right]$ aufgeht.

6. Die Divisoren der Elemente von K bilden eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Gruppe $\mathfrak{D}$ aller Divisoren von K. Die Quotientengruppe $\mathfrak{D}/\mathfrak{H}$ heißt die Divisorenklassengruppe, jede Restklasse von $\mathfrak{D}$ nach $\mathfrak{H}$ eine Divisorenklasse, $\mathfrak{H}$ insbesondere die Hauptklasse. Da die Divisoren von $\mathfrak{H}$ alle die Ordnung 0 haben, besitzen die Divisoren einer Divisorenklasse sämtlich die gleiche Ordnung und man kann daher von der Ordnung einer Divisorenklasse reden.

§ 5.

Differentialquotienten. Geschlecht.

1. Sind α und β irgend zwei nicht zu k gehörige Elemente aus K und etwa α von erster Art bezüglich $k(\beta)$, (vgl. § 2, 2), ist ferner α Nullstelle des in $k[x, \beta]$ irreduziblen Polynoms $F(x, \beta)$, wobei dann $F_1'(x, \beta) \neq 0$ ist, so definiert man den Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{d\beta}$ durch die Gleichung

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{F_2'(\alpha, \beta)}{F_1'(\alpha, \beta)}.$$

Diese Definition von $\frac{d\alpha}{d\beta}$ ist offenbar von der Wahl des in $k[x, \beta]$ irreduziblen Polynoms $F(x, \beta)$ unabhängig. Sie ist aber auch gegenüber

Erweiterungen des Körpers K invariant, d. h. ersetzt man K durch einen Oberkörper $\bar{K}$, so bleibt $\frac{d\alpha}{d\beta}$ ungeändert. Ist nämlich $\bar{k}$ der größte in $\bar{K}$ enthaltene absolut algebraische Körper, so ist das in $k[x, \beta]$ irreduzible Polynom $F(x, \beta)$ auch in $\bar{k}[x, \beta]$ irreduzibel, weil $k(\alpha, \beta) \cap \bar{k} = k$ und $\bar{k}$ Normalkörper über k ist.

Für die soeben definierten Differentialquotienten gelten ferner die Regeln der Differentiation von Summe, Produkt und Quotient, sowie die Kettenregel, d. h. sind α und β von erster Art bezüglich $k(\gamma)$, so ist

$$\frac{d(\alpha+\beta)}{d\gamma} = \frac{d\alpha}{d\gamma} + \frac{d\beta}{d\gamma}, \quad \frac{d(\alpha\beta)}{d\gamma} = \frac{d\alpha}{d\gamma}\beta + \frac{d\beta}{d\gamma}\alpha, \quad \frac{d\frac{\alpha}{\beta}}{d\gamma} = \frac{\frac{d\alpha}{d\gamma}\beta - \frac{\alpha\beta}{d\gamma}\alpha}{\beta^2}$$

und wenn auch α von erster Art bezüglich $k(\beta)$

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{d\alpha}{d\beta}\frac{d\beta}{d\gamma}.$$

Diese Regeln beweist man im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Koeffizientenkörpers, $k = k_a$, in üblicher Weise. Sie gelten daher sicher für die Differentialquotienten von $\bar{K} =$ Hülle (K, k_a) und somit auch für die Differentialquotienten von K, weil diese bei Körpererweiterungen ungeändert bleiben.

2. Satz 4. *Sind α und β zwei nicht zu k gehörige Elemente aus K der Art, daß K in bezug auf $k(\alpha)$ und $k(\beta)$ von erster Art ist, $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ die Nennerdivisoren von α bzw. β und $\mathfrak{d}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{d}_\beta$ die Differentendivisoren von K bezüglich $k(\alpha)$ bzw. $k(\beta)$, so ist der Divisor von $\frac{d\alpha}{d\beta}$ gleich $\frac{\mathfrak{d}_\alpha \mathfrak{b}^2}{\mathfrak{d}_\beta \mathfrak{a}^2}$.*

Die übliche Herleitung dieses Satzes versagt bei Körpern von Primzahlcharakteristik, bei denen weitergehende Tatsachen aus der Theorie der Differente herangezogen werden müssen.

Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primdivisor von K, $\mathfrak{P}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Stelle. Wir haben zu zeigen, daß $\frac{d\alpha}{d\beta}$ durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist wie $\frac{\mathfrak{d}_\alpha \mathfrak{b}^2}{\mathfrak{d}_\beta \mathfrak{a}^2}$. Da nach der Kettenregel $\frac{d\alpha}{d\beta} = -\alpha^2 \frac{d\frac{1}{\alpha}}{d\beta} = -\frac{1}{\beta^2}\frac{d\alpha}{d\frac{1}{\beta}} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{d\frac{1}{\alpha}}{d\frac{1}{\beta}}$ und ferner $k(\alpha) = k\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, $k(\beta) = k\left(\frac{1}{\beta}\right)$ ist, können wir uns auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{p}$ im Nennerdivisor von α und β nicht auftritt. Es bleibt dann zu beweisen: Das aus $\frac{d\alpha}{d\beta}$ in $\mathfrak{P}$ abgeleitete Ideal gestattet die Darstellung $\mathfrak{P} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} = \mathfrak{p}^{d_\alpha - d_\beta}$, wo d_α bzw. d_β der Exponent ist, mit dem der Primdivisor $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{d}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{d}_\beta$ vorkommt.

Dabei dürfen wir weiter voraussetzen, daß $k = k_a$ algebraisch abgeschlossen ist; denn ein Primdivisor von $\overline{K} =$ Hülle (K, k_a), dessen Vergengungsdivisor bezüglich K gleich $\mathfrak{p}$ ist, teilt $\frac{d\alpha}{d\beta}$ in derselben Potenz wie $\mathfrak{p}$ und tritt ferner in den Differentendivisoren von $\overline{K}$ bezüglich $k(\alpha)$ bzw. $k(\beta)$ ebenfalls mit dem Exponenten d_α bzw. d_β auf [21]). Im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Koeffizientenkörpers k sind aber α und β nach $\mathfrak{p}$ je einem Element a bzw. b aus k kongruent und wegen $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{d(\alpha-a)}{d(\beta-b)}$ können wir α und β von vornherein so gewählt denken, daß sie beide durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind.

Unter diesen Voraussetzungen berechnen wir $\frac{d\alpha}{d\beta}$ mit Hilfe eines passend gewählten Elements γ nach der Kettenregel: $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{d\alpha}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\beta}$, wo $\frac{d\alpha}{d\gamma} = -\frac{F_2'(\alpha,\gamma)}{F_1'(\alpha,\gamma)}$, $\frac{d\gamma}{d\beta} = -\frac{G_1'(\beta,\gamma)}{G_2'(\beta,\gamma)}$ und $F(\alpha, x)$ bzw. $G(\beta, x)$ das in $k[\alpha, x]$ bzw. $k[\beta, x]$ irreduzible Polynom bedeutet, dessen Nullstelle γ ist. Es ist dann also $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{F_2'(\alpha,\gamma)}{G_2'(\beta,\gamma)}\frac{G_1'(\beta,\gamma)}{F_1'(\alpha,\gamma)}$, und wenn wir γ so wählen, daß $\mathfrak{P}\cdot F_2'(\alpha,\gamma) = \mathfrak{p}^{d_\alpha}$, $\mathfrak{P}\cdot G_2'(\beta,\gamma) = \mathfrak{p}^{d_\beta}$ und $\mathfrak{P}\cdot\frac{G_1'(\beta,\gamma)}{F_1'(\beta,\gamma)} = \mathfrak{P}$ ist, so ist alles bewiesen.

Um dies zu erreichen, bestimme man γ so, daß folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

1. Sind $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ alle zu $\mathfrak{p}$ bezüglich $k(\alpha)$ oder bezüglich $k(\beta)$ konjugierten Primdivisoren und bedeuten $0 = e_0, e_1, \ldots, e_m$ lauter untereinander verschiedene Elemente aus k, so sei $\gamma - e_i$ durch $\mathfrak{p}_i$, aber nicht durch $\mathfrak{p}_i^2$ teilbar

2. Ist $\mathfrak{p}'$ ein im Nennerdivisor von α oder β wirklich auftretender Primdivisor, so sei γ nach $\mathfrak{p}'$ einem beliebigen Element $e' \neq 0$ aus k kongruent.

3. Ist $\mathfrak{p}''$ ein im Zählerdivisor von α oder β wirklich auftretender, von $\mathfrak{p}$ verschiedener Primdivisor, so sei γ nach $\mathfrak{p}''$ einem Element $e'' \neq 0$ von k kongruent.

Versteht man dann unter $\mathfrak{P}_c$ die Stelle $\mathfrak{P} \wedge k(\alpha)$ von $k(\alpha)$ und unter $\mathfrak{O}_\alpha$ den Durchschnitt aller zu $\mathfrak{P}$ bezüglich $k(\alpha)$ konjugierten Stellen, so besteht $\mathfrak{O}_\alpha$ aus allen $\mathfrak{P}_\alpha$-ganzen Elementen von K. Aus 1. schließt man, daß γ in $\mathfrak{O}_\alpha$ liegt, weiter in bekannter Weise [22]), daß $K = k(\alpha, \gamma)$ und das aus der Diskriminante von γ in $\mathfrak{P}_c$ abgeleitete Ideal gleich dem Diskriminantenideal von $\mathfrak{O}_\alpha$ bezüglich $\mathfrak{P}_\alpha$ ist. Es ist daher $\mathfrak{P}\cdot F_2'(\alpha,\gamma) = \mathfrak{p}^{d_\alpha}$. Entsprechend findet man $K = k(\beta, \gamma)$ und $\mathfrak{P}\cdot G_2'(\beta,\gamma) = \mathfrak{p}^{d_\beta}$.

---

[21]) Das folgt unmittelbar aus § 2, 4 in Verbindung mit § 3 Satz 3.

[22]) Vgl. *D.-W.*, S. 224 und 225.

Setzt man andererseits $\mathfrak{P}_\gamma = \mathfrak{P} \cap k(\gamma)$ und $\mathfrak{O}_\gamma$ gleich dem Ring aller $\mathfrak{P}_\gamma$ ganzen Elemente aus K, so sind α und β gemäß 2. beide in $\mathfrak{O}_\gamma$ enthalten. Nach 3. ist ferner das Primideal $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\gamma$ gleich dem aus γ und α bzw. aus γ und β abgeleiteten Ideal, woraus in Verbindung mit $K = k(\alpha, \gamma) = k(\beta, \gamma)$ nach bekannten Sätzen folgt[23]), daß $\tilde{\mathfrak{p}}$ in $F_1'(\alpha, \gamma)$ nnd $G_1'(\beta, \gamma)$ mit der gleichen Potenz aufgeht wie in der Differente von $\mathfrak{O}_\gamma$ nach $\mathfrak{P}_\gamma$. Es ist daher $\frac{G_1'(\beta, \gamma)}{F_1'(\alpha, \gamma)}$ durch $\tilde{\mathfrak{p}}$ nicht teilbar, d. h. $\mathfrak{P} \cdot \frac{G_1'(\beta, \gamma)}{F_1'(\alpha, \gamma)} = \mathfrak{P}$.

3. Durch Satz 4 wird man veranlaßt, ebenso wie in der algebraischen Funktionentheorie, das Geschlecht g von K als wichtige Invariante einzuführen.

Definition. *Ist z ein nicht zu k gehöriges Element aus K und K von erster Art über $k(z)$, $m_z = (K : k(z))$, w_z die Verzweigungszahl von K bezüglich $k(z)$, so wird die Zahl $g = \frac{w_z}{2} - m_z + 1$ das Geschlecht von K genannt.*

Die Invarianz des Geschlechts, d. h. die Gleichung $\frac{w_\alpha}{2} - m_\alpha + 1 = \frac{w_\beta}{2} - m_\beta + 1$ für zwei Elemente α und β schließt man unmittelbar aus Satz 4.

§ 6.

Modul der Multipla eines Divisors. Riemann-Rochescher Satz.

1. Ist $\mathfrak{c}$ ein beliebiger Divisor von K, so bildet die Menge aller Elemente aus K, die Multipla von $\mathfrak{c}$ sind, einen k-Modul, den Modul $\mathfrak{m}(\mathfrak{c})$ der Multipla von $\mathfrak{c}$. In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß der Modul $\mathfrak{m}(\mathfrak{c})$ eine endliche Basis in bezug auf k besitzt und daß die Länge der Basis (Elementezahl) durch eine einfache Formel gegeben wird (Riemann-Rochescher Satz).

Um den Modul $\mathfrak{m}(\mathfrak{c})$ zu bestimmen, bezeichnen wir mit z ein nicht zu k gehöriges Element aus K, dessen Nennerdivisor keinen der in $\mathfrak{c}$ wirklich auftretenden Primdivisoren wirklich enthält. Der Ring $\mathfrak{J}$ aller in z ganzen Elemente ist dann Unterring jeder Stelle $\mathfrak{P}_i$, die zu einem in $\mathfrak{c}$ wirklich auftretenden Primdivisor gehört, und das zu $\mathfrak{c}$ gehörige Ideal $\tilde{\mathfrak{c}}$ aus $\mathfrak{J}$ umfaßt den Modul $\mathfrak{m}(\mathfrak{c})$. Es liegt daher nahe, eine Basis von $\mathfrak{m}(\mathfrak{c})$ bezüglich k aus einer Basis von $\mathfrak{c}$ bezüglich $k[z]$ herzuleiten. Haupthilfsmittel bei dieser Untersuchung bildet der Begriff des Exponenten eines

[23]) Vgl. Dedekind, Über die Diskriminanten endlicher Körper, Abh. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen 29 (1882), S. 42.

Elements α aus K in bezug auf $\frac{1}{z}$ und der sich darauf gründende Begriff einer Normalbasis von $\mathfrak{c}$, die beide in den drei nächsten Nummern behandelt werden.

2. Für den Rest dieses Paragraphen bedeutet z ein Element, so daß K über $k(z)$ von erster Art algebraisch ist, $\mathfrak{J}$ den Ring aller in z ganzen Elemente aus K, $\mathfrak{c}$ ein Ideal aus $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{Q}$ den Durchschnitt derjenigen Stellen $\mathfrak{P}_i$, die zu den im Nennerdivisor von z wirklich auftretenden Primdivisoren gehören. Setzt man $\mathfrak{Q} \cap k(z) = \mathfrak{P}^*$, so besteht die Stelle $\mathfrak{P}^*$ von $k(z)$ aus allen Quotienten je zweier Elemente aus $k\left[\frac{1}{z}\right]$, bei denen der Nenner durch $\frac{1}{z}$ nicht teilbar ist, und $\mathfrak{Q}$ ist der Ring aller $\mathfrak{P}^*$ ganzen Elemente aus K.

Da $\frac{1}{z}$ in jeder der Stellen $\mathfrak{P}_i$ eine positive Ordnung hat, gibt es zu jedem Element α aus K sicherlich ganze (eventuell negative) Zahlen e, so daß $z^e\alpha$ in $\mathfrak{Q}$ liegt. Die größte positive oder negative ganze Zahl e dieser Art heißt der Exponent von α in $\frac{1}{z}$. Im folgenden ist stets der Exponent in $\frac{1}{z}$ gemeint, wenn kurz vom Exponent eines Elements die Rede ist.

Alle und nur die Elemente aus $\mathfrak{Q}$ besitzen einen nichtnegativen Exponenten. Sind $e_\alpha \leqq e_\beta$ die Exponenten der Elemente α, β, so ist der Exponent von $\alpha\beta$ mindestens gleich $e_\alpha + e_\beta$, der Exponent von $\alpha + \beta$ mindestens gleich e_α, und zwar ist der Exponent von $\alpha + \beta$ genau gleich e_α, wenn $e_\alpha < e_\beta$ ist. Der Exponent e_c eines Elements c aus $k(z)$ ist gleich der Ordnung von c in $\mathfrak{P}^*$, d. h. ist $c = \frac{c_1}{c_2}$, wo c_1 und c_2 aus $k[z]$ stammen, so ist e_c der Differenz der Gradzahlen von c_1 und c_2 entgegengesetzt gleich, und es hat $c\alpha$ den Exponent $e_c + e_\alpha$, wenn α den Exponent e_α hat.

Wir setzen $(K : k(z)) = m$, so daß also das Ideal $\mathfrak{c}$ eine Modulbasis von m unabhängigen Elementen in bezug auf den Hauptidealring $k[z]$ besitzt.

Definition. Die Basis $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ von $\mathfrak{c}$ bezüglich $k[z]$ heißt Normalbasis von $\mathfrak{c}$ bezüglich $k[z]$, wenn die Exponenten e_i der Elemente γ_i möglichst groß sind, d. h. wenn für jede Basis $\gamma_1', \ldots, \gamma_m'$ von $\mathfrak{c}$ bezüglich $k[z]$ bei geeigneter Numerierung die Exponenten e_i' von γ_i' den Ungleichungen $e_i' \leqq e_i$ genügen.

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß die Exponenten zweier Normalbasen von $\mathfrak{c}$ bei geeigneter Numerierung übereinstimmen.

3. Satz 5. *Seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ m Elemente aus $\mathfrak{c}$, die den folgenden Bedingungen genügen.*

1. *γ_1 besitzt unter allen Elementen von $\mathfrak{c}$ einen möglichst großen Exponenten.*

2. *γ_{i+1} besitzt für $i = 1, \ldots, m-1$ unter allen nicht von $\gamma_1, \ldots, \gamma_i$ bezüglich $k(z)$ abhängenden Elementen aus $\mathfrak{c}$ einen möglichst großen Exponenten e_i.*

Dann bilden $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ eine Normalbasis von $\mathfrak{c}$ bezüglich $k[z]$.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ eine Basis von $\mathfrak{c}$ bezüglich $k[z]$ bilden.

Wäre dies nicht der Fall, so enthielte $\mathfrak{c}$ ein Element $\frac{c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m}{c}$, wo die c_i und c Elemente aus $k[z]$ und nicht jedes c_i durch c teilbar ist. Sei etwa c_l das letzte nicht durch c teilbare c_i und $c_1', c_2', \ldots, c_l'$ die reduzierten Reste von $c_1, \ldots, c_l$ nach c, so ist auch $\gamma' = \frac{c_1'\gamma_1 + \ldots + c_l'\gamma_l}{c}$ in $\mathfrak{c}$ enthalten, und da der Grad von c_i' im Falle $c_i' \neq 0$ in z niedriger als der Grad von c in z, also der Exponent von $\frac{c_i'}{c}$ größer als 0 ist, so hat γ' einen größeren Exponenten als γ_l entgegen der Wahl von γ_l.

Satz 6. *Ein Ideal $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{J}$ besitzt stets eine Normalbasis in bezug auf $k[z]$. Die Elemente einer Normalbasis genügen bei geeigneter Numerierung den Bedingungen 1 und 2 des vorigen Satzes.*

Durch Multiplikation mit einem geeigneten Element c aus $k[z]$ kann das Ideal $\mathfrak{c}$ stets in ein ganzes Ideal $c \cdot \mathfrak{c}$ überführt werden. Da der Exponent eines Elementes aus $\mathfrak{J}$ höchstens gleich 0 ist, so lassen sich aus dem ganzen Ideal sicher m Elemente $\gamma_1', \ldots, \gamma_m'$ auswählen, die den Bedingungen 1 und 2 des vorigen Satzes genügen. $\frac{\gamma_1'}{c}, \ldots, \frac{\gamma_m'}{c}$ sind dann m die Bedingungen 1 und 2 erfüllende Elemente aus $\mathfrak{c}$ und bilden daher eine Normalbasis $\mathfrak{c}$ bezüglich $k[z]$.

Da die Exponenten der Elemente zweier Normalbasen bei passender Numerierung übereinstimmen, so folgt aus der Existenz einer den Bedingungen von Satz 5 genügender Normalbasis sofort, daß jede Normalbasis diesen Bedingungen genügt.

Satz 7. *Ist $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ eine Normalbasis von $\mathfrak{c}$ bezüglich $k[z]$, so ist der Exponent von $\gamma = c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m$, wo die c_i aus $k[z]$ stammen, gleich dem Minimum e der Exponenten der einzelnen Summanden $c_i\gamma_i$.*

Die Numerierung der Elemente $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sei so gewählt, daß die γ_i den Bedingungen 1 und 2 des Satzes 5 genügen. Das Element $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \ldots + c_m\gamma_m$ kann aufgefaßt werden als Summe von Elementen der Gestalt $a_{k_i} z^{k_i}\gamma_i$, wobei die a_{k_i} aus k stammen. $a_{s_1} z^{s_1}\gamma_{i_1}, \ldots, a_{s_t} z^{s_t}\gamma_{i_t}$ seien diejenigen unter diesen Elementen, deren Exponent gleich e ist, so

daß $e = e_{i_1} - s_1 = e_{i_2} - s_2 = \ldots = e_{i_t} - s_t$ ist, falls $e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}$ die Exponenten von $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_t}$ bedeuten. Wegen $e_{i_1} \geqq e_{i_2} \geqq \ldots \geqq e_{i_t}$ ist mithin $s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_t$. Der Exponent von γ kann nur dann größer als e sein, wenn der Exponent von $a_{s_1} z^{s_1} \gamma_{i_1} + \ldots + a_{s_t} z^{s_t} \gamma_{i_t}$ größer als e, d. h. der Exponent des zu $\mathfrak{c}$ gehörigen Elements $a_{s_1} z^{s_1 - s_t} \gamma_{i_1} + \ldots + a_{s_t} \gamma_{i_t}$ größer als $e + s_{i_t} = e_{i_t}$ ist. Das widerspricht der Wahl von γ_{i_t}.

Mit Hilfe von Satz 7 werden wir in 5 ohne weiteres eine endliche Basis für den Modul $\mathfrak{m}(\mathfrak{c})$ der Multipla des Divisors $\mathfrak{c}$ gewinnen. Zur Ableitung des Riemann-Rocheschen Satzes brauchen wir jedoch noch einige weitere Tatsachen über Normalbasen, die in der folgenden Nummer entwickelt werden.

4. Satz 8. *Sind $e_1, \ldots, e_m$ die Exponenten einer Normalbasis $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ von $\tilde{\mathfrak{c}}$ bezüglich $k[z]$, und bedeutet $n_{\mathfrak{c}}$ die Ordnung des zu $\tilde{\mathfrak{c}}$ gehörigen Divisors, w_z die Verzweigungszahl von K bezüglich $k[z]$, so ist*

$$-2(e_1 + e_2 + \ldots + e_m) = 2n_{\mathfrak{c}} + w_z.$$

Da e_i der Exponent von γ_i ist, so ist $z^{e_i}\gamma_i$ Element von $\mathfrak{Q}$ und besitzt den Exponenten 0. Daraus folgt sofort, daß $z^{e_1}\gamma_1, \ldots, z^{e_m}\gamma_m$ eine Basis von $\mathfrak{Q}$ bezüglich $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{Q} \cap k(z)$ bilden. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte ein Element $\frac{a_1 z^{e_1}\gamma_1 + \ldots + a_m z^{e_m}\gamma_m}{\frac{1}{z}}$ mit Koeffizienten a_i aus k zu $\mathfrak{Q}$ gehören, d. h. $a_1 z^{e_1}\gamma_1 + \ldots + a_m z^{e_m}\gamma_m$ hätte einen Exponenten, der größer als 0 ist, im Widerspruch zu Satz 7.

Bedeutet $\Delta(z^{e_1}\gamma_1, \ldots, z^{e_m}\gamma_m)$ die in bezug auf $k(z)$ genommene Diskriminante von $z^{e_1}\gamma_1, \ldots, z^{e_m}\gamma_m$, so ist also $\mathfrak{P}^* \cdot \Delta(z^{e_1}\gamma_1, \ldots, z^{e_m}\gamma_m)$ die Diskriminante von $\mathfrak{Q}$ bezüglich $\mathfrak{P}^*$. Nun ist aber

$$\Delta(z^{e_1}\gamma_1, \ldots, z^{e_m}\gamma_m) = z^{2(e_1 + \ldots + e_m)} \Delta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m),$$

d. h. ist d der Grad von $\Delta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ in z, so ist der Exponent von $\Delta(z^{e_1}\gamma_1, \ldots, z^{e_m}\gamma_m)$ oder, was dasselbe ist, die Ordnung von $\Delta(z^{e_1}\gamma_1, \ldots, z^{e_m}\gamma_m)$ an der Stelle $\mathfrak{P}^*$ von $k(z)$ gegeben durch $d' = -2(e_1 + \ldots + e_m) - d$.

Andererseits ist $d = 2n_{\mathfrak{c}} + w_z'$, wo w_z' gleich der Ordnung des zur Differente von $\mathfrak{F}$ bezüglich $k[z]$ gehörigen Divisors ist. Im Hinblick auf die Gleichung $w_z' + d' = w_z$ folgt somit in der Tat

$$-2(e_1 + \ldots + e_m) = d + d' = 2n_{\mathfrak{c}} + w_z' + d' = 2n_{\mathfrak{c}} + w_z.$$

Ist $\frac{1}{z}$ nicht durch das Quadrat eines Primdivisors teilbar, d. h. ist $d' = 0$ und somit der Grad von $\Delta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ gleich $2n_{\mathfrak{c}} + w_z$, so ist also nach dem vorstehenden der Grad von $\Delta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ gleich $-2(e_1 + \ldots + e_m)$

und man hat den zweiten Teil nachstehenden Satzes, dessen erster Teil sich hernach unmittelbar aus der Definition der Normalbasis ergibt.

Satz 9. *Ist* $\frac{1}{z}$ *nicht durch das Quadrat eines Primdivisors teilbar, so ist die Basis* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ *von* $\mathfrak{c}$ *mit den Exponenten* $e_1, \ldots, e_m$ *dann und nur dann Normalbasis, wenn der Grad von* $D(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ *in* z *gleich* $-2(e_1 + e_2 + \ldots + e_m)$ *ist.*

Um den ersten Teil dieses Satzes zu bestätigen, nehmen wir an, für die Basis $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ von $\mathfrak{c}$ mit den Exponenten $e_1, \ldots, e_m$ sei der Grad von $D(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ gleich $-2(e_1 + \ldots + e_m)$. Ist $\gamma_1', \ldots, \gamma_m'$ mit den Exponenten $e_1', \ldots, e_m'$ eine Normalbasis von $\mathfrak{c}$ bezüglich $k[z]$, so ist nach Definition bei geeigneter Numerierung $e_i \leqq e_i'$, andererseits nach dem bereits bewiesenen Teil des Satzes der Grad von $D(\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$ gleich $e_1' + e_2' + \ldots + e_m'$. Da nun die Gradzahlen von $D(\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$ und $D(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ gleich sind, so folgt $e_1' + e_2' + \ldots + e_m' = e_1 + e_2 + \ldots + e_m$ und daher notwendig $e_i' = e_i$, d. h. $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ bilden ebenfalls eine Normalbasis.

Satz 10. *Ist* $\frac{1}{z}$ *nicht durch das Quadrat eines Primdivisors teilbar, und besitzt die Normalbasis* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ *von* $\mathfrak{c}$ *bezüglich* $k[z]$ *den Exponenten* $e_1, \ldots, e_m$, *so besitzt jede Normalbasis des zu* $\mathfrak{c}$ *bezüglich* $k[z]$ *komplementären Ideals* $\mathfrak{c}'$ *das Exponentensystem* $-e_1, \ldots, -e_m$.

Bezeichnet S die bezüglich $k(z)$ genommene Spur und wird $S(\gamma_i \gamma_k) = c_{ik}$ gesetzt, so ist eine Basis $\gamma_1', \ldots, \gamma_m'$ von $\mathfrak{c}$ definiert durch die Gleichungen

$$\gamma_i = \sum_{k=1}^{m} c_{ik} \gamma_k' \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Schreibt man kurz $D = \Delta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ für die Determinante des Koeffizientensystems c_{ik}, D_{ik} für die zum Element c_{ik} gehörige Adjunkte, so ist

$$\gamma_k' = \sum_{i=1}^{m} \frac{D_{ik} \gamma_i}{D}.$$

Hier besitzt D nach Satz 9 den Exponenten $2(e_1 + \ldots + e_m)$ und aus $S(z^e \gamma_i \gamma_k) = z^e S(\gamma_i \gamma_k) = z^e c_{ik}$ folgt, daß der Exponent von c_{ik} mindestens gleich $e_i + e_k$ ist, weil $z^{e_i + e_k} \gamma_i \gamma_k$ und damit auch $S(z^{e_i + e_k} \gamma_i \gamma_k)$ in $\mathfrak{Q}$ liegt. $D_{ik} \gamma_i$ hat daher mindestens den Exponenten

$$e_k + 2(e_1 + \ldots + e_{k-1} + e_{k+1} + \ldots + e_m),$$

d. h. für den Exponenten e_k' von γ_k' gilt $e_k' \geqq -e_k$.

Aus $e_k' \geqq -e_k$ folgt, daß der Exponent von $\Delta(\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$ sicher $\geqq -2(e_1 + \ldots + e_m)$ ist und hier gilt das $>$-Zeichen, sobald ein $e_k' > -e_k$

ist. Da andererseits $\Delta(\gamma_1', \ldots, \gamma_m') = \frac{1}{\Delta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)}$ und der Exponent von $\Delta(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ gleich $2(e_1 + \ldots + e_m)$, also derjenige von $\Delta(\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$ gleich $-2(e_1 + \ldots + e_m)$ ist, so muß $e_k' = -e_k$ sein. Daß $\gamma_1', \ldots, \gamma_m'$ Normalbasen von $\tilde{\mathfrak{c}}'$ bezüglich $k[z]$ sind, schließt man nun in Hinblick auf Satz 9 aus der Tatsache, daß der Grad von $\Delta(\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$ gleich $2(e_1 + \ldots + e_m) = -2(e_1' + \ldots + e_m')$ ist.

5. Aus Satz 7 ergibt sich, daß der Modul $\mathfrak{m}(\mathfrak{c})$ aller Multipla des Divisors $\mathfrak{c}$ stets eine endliche Basis hat, und zwar zeigen wir:

Satz 11. *Besitzen die Elemente einer Normalbasis $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ von $\tilde{\mathfrak{c}}$ bezüglich $k[z]$ die Exponenten $e_1 \geqq e_2 \geqq \ldots \geqq e_m$ und ist e_r der letzte nicht negative unter diesen Exponenten, so hat der k-Modul aller Multipla des zu $\mathfrak{c}$ gehörigen Divisors $\mathfrak{c}$ eine linear unabhängige Basis von $(e_1 + 1) + (e_2 + 1) + \ldots + (e_r + 1)$ Elementen bezüglich k.*

Alle und nur die Elemente

$$\gamma = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \ldots + c_m\gamma_m \qquad (c_i \text{ aus } k[z]),$$

deren Exponent nicht negativ ist, sind Multipla von $\mathfrak{c}$. Nach Satz 7 ist der Exponent von γ gleich dem Minimum der Exponenten der einzelnen Summanden. γ hat daher dann und nur dann nichtnegativen Exponenten, wenn $c_{r+1} = \ldots = c_m = 0$ und c_i für $i = 1, \ldots, r$ höchstens vom Grad e_i in z ist, d. h. die $(e_1 + 1) + \ldots + (e_r + 1)$ Elemente

$$\gamma_i, z\gamma_i, \ldots, z^{e_i}\gamma_i \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

bilden eine Basis des Moduls aller Multipla von $\mathfrak{c}$ bezüglich k.

Satz 12. *Gehören die Divisoren $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ derselben Klasse an, so besitzen die Moduln $\mathfrak{m}(\mathfrak{c}_1)$ bzw. $\mathfrak{m}(\mathfrak{c}_2)$ der Multipla von $\mathfrak{c}_1$ bzw. $\mathfrak{c}_2$ denselben Rang.*

Ist s_1 bzw. s_2 der Rang von $\mathfrak{m}(\mathfrak{c}_1)$ bzw. $\mathfrak{m}(\mathfrak{c}_2)$ und η ein Element, dessen Divisor gleich $\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}$ ist, so geht aus s_1 linear unabhängigen Elementen $\eta_1, \ldots, \eta_{s_1}$ von $\mathfrak{m}(\mathfrak{c}_1)$ durch Multiplikation mit η ein System $\eta\eta_1, \ldots, \eta\eta_{s_1}$ von s_1 linear unabhängigen Elementen des Moduls $\mathfrak{m}(\mathfrak{c}_2)$ hervor, d. h. es ist $s_2 \geqq s_1$, und da ebenso $s_1 \geqq s_2$ folgt, ist $s_1 = s_2$.

Ist $\mathfrak{c}$ ein Divisor der Klasse $\mathfrak{C}$, so besitzt der Divisor eines Elementes α, das Multiplum des Divisors $\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}}$ ist, die Gestalt $\frac{\mathfrak{c}'}{\mathfrak{c}}$, wo $\mathfrak{c}'$ ein ganzer Divisor der Klasse $\mathfrak{C}$ ist. Umgekehrt gibt es zu jedem ganzen Divisor $\mathfrak{c}'$ von $\mathfrak{C}$ stets ein Element α aus $\mathfrak{m}\left(\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}}\right)$, dessen Divisor gerade durch $\frac{\mathfrak{c}'}{\mathfrak{c}}$ gegeben ist. Mit Hilfe der Elemente von $\mathfrak{m}\left(\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}}\right) = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$

lassen sich daher gerade alle ganzen Divisoren der Klasse $\mathfrak{C}$ gewinnen. Der durch die Klasse $\mathfrak{C}$ eindeutig bestimmte Rang r des Moduls $\mathfrak{m}\left(\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}}\right)$ bezüglich k heißt die Dimension von $\mathfrak{C}$.

Ist die Elementezahl p des Körpers k endlich, so kann man auf Grund der vorstehenden Überlegungen die Zahl aller ganzen Divisoren der Klasse $\mathfrak{C}$ angeben. Der Modul $\mathfrak{m}\left(\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}}\right)$ enthält dann nämlich $p^r - 1$ von Null verschiedene Elemente; mit α besitzen ferner die Elemente $a \cdot \alpha$ und nur sie den gleichen Divisor, falls $a \neq 0$ in k liegt. Den Elementen von $\mathfrak{m}\left(\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}}\right)$ entsprechen daher $\frac{p^r-1}{p-1}$ verschiedene Divisoren, d. h. $\mathfrak{C}$ umfaßt $\frac{p^r-1}{p-1}$ ganze Divisoren.

Satz 13. *Ist p die Zahl der Elemente von k, r die Dimension der Divisorenklasse $\mathfrak{C}$, so enthält $\mathfrak{C}$ genau $\frac{p^r-1}{p-1}$ ganze Divisoren.*

6. Ist n_z der Nennerdivisor des Elementes z, $\mathfrak{d}_z$ der Differentendivisor von K bezüglich $k(z)$, so heißt die durch den Divisor $\frac{\mathfrak{d}_z}{n_z^2}$ bestimmte Divisorenklasse die Differentialklasse $\mathfrak{W}$ von K. Zu einer beliebigen Divisorenklasse $\mathfrak{C}$ definiert man die Klasse $\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{C}}$ als Ergänzungsklasse. Versteht man noch unter $\{\mathfrak{C}\}$ die Dimension der Klasse $\mathfrak{C}$, so gilt folgender wichtige Satz, der sich nunmehr ganz ebenso wie bei *H.-L.* beweisen läßt[24]).

Satz 14 (Riemann-Rochescher Satz). *Ist $\mathfrak{C}$ eine Divisorenklasse der Ordnung q, so ist*

$$\{\mathfrak{C}\} = \left\{\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{C}}\right\} + q - g + 1.$$

Aus diesem Satz ergibt sich ohne weiteres als Folgerung

$$\{\mathfrak{C}\} - \frac{q}{2} = \{\mathfrak{C}'\} - \frac{q'}{2},$$

wo $\mathfrak{C}'$ die Ergänzungsklasse von $\mathfrak{C}$ und q' die Ordnung dieser Ergänzungsklasse bedeutet.

Da die Ordnung der Differentialklasse $\mathfrak{W}$ gleich $2g - 2$ ist und eine Klasse der Ordnung $q' \leqq 0$ stets notwendig die Dimension 0 besitzt, so ist die Dimension $\{\mathfrak{C}\}$ einer Divisorenklasse $\mathfrak{C}$ mit positiver Ordnung $q \geqq 2g - 2$ nach dem Riemann-Rocheschen Satz gleich $q - g + 1 > 0$, d. h. falls $0 < q \geqq 2g - 2$ ist, gibt es sicher ganze Divisoren in der Klasse $\mathfrak{C}$.

---

[24]) *H.-L.*, S. 301–304.

II. Teil.

Theorie der Zetafunktion.

§ 7.

Die Divisorenklassengruppe.

Aus dem Riemann-Rocheschen Satz ergibt sich unter der Voraussetzung der Endlichkeit von k eine wichtige Folgerung für die Gruppe $\mathfrak{D}$ aller Divisoren von K. Ihrer Herleitung stellen wir den folgenden fast selbstverständlichen Satz voran.

Satz 15. *Jeder Divisor* $\mathfrak{c}$ *von* K *läßt sich darstellen in der Form* $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0 \mathfrak{c}_1^s$, *wo* $\mathfrak{c}_1$ *ein fester Divisor von möglichst kleiner, positiver Ordnung* d *und* $\mathfrak{c}_0$ *ein Divisor der Ordnung* 0 *ist. Mit anderen Worten: Die Faktorgruppe von* $\mathfrak{D}$ *nach der Untergruppe* $\mathfrak{D}_0$ *aller Divisoren der Ordnung* 0 *ist eine der Additionsgruppe der ganzen Zahlen isomorphe zyklische Gruppe.*

Da die Ordnungen der Divisoren von K stets ganze Zahlen sind, gibt es einen Divisor $\mathfrak{c}_1$ von möglichst kleiner positiver Ordnung d. Die Ordnung n jedes Divisors $\mathfrak{c}$ ist dann notwendig Vielfaches von d, $n = ds$, d. h. $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}_1^s} = \mathfrak{c}_0$ ist ein Divisor der Ordnung 0.

Die Gruppe $\mathfrak{D}$ besteht also stets aus unendlich vielen Klassen. Dagegen gilt

Satz 16. *Ist* k *ein endlicher Körper, so umfaßt die Gruppe* $\mathfrak{D}_0$ *aller Divisoren der Ordnung* 0 *nur endlich viele Klassen, und jede Untergruppe* $\mathfrak{D}'$ *von* $\mathfrak{D}$, *die die Hauptklasse und mindestens einen Divisor mit von* 0 *verschiedener Ordnung enthält, ist von endlichem Index unter* $\mathfrak{D}$.

Im Hinblick auf Satz 15 genügt es, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Wir bemerken zunächst:

Ist n eine feste natürliche Zahl, so gibt es nur endlich viele ganze Divisoren der Ordnung n und daher auch nur endlich viele Divisoren der Ordnung 0, die durch Division zweier ganzer Divisoren der Ordnung n entstehen.

Um dies einzusehen, bezeichne man mit z ein nicht zu k gehöriges Element; jeder ganze Divisor der Ordnung n ist dann Teiler eines Elements $c' = \left(\frac{1}{z}\right)^l c$, wo c Element aus $k[z]$, $0 \leqq l \leqq n$, und der Grad von c in z höchstens gleich $n - l$ ist. Solche Elemente c' gibt es aber im Falle eines endlichen Koeffizientenkörpers k nur endlich viele, und jedes ist nur durch endlich viele ganze Divisoren der Ordnung n teilbar, so daß die Zahl der ganzen Divisoren der Ordnung n in der Tat endlich ist.

Es existieren also sicher nur endlich viele Divisorenklassen, deren Divisoren die Ordnung 0 besitzen, wenn man zeigen kann: Jeder Divisor $\mathfrak{c}_0$ der Ordnung 0 ist einem Divisor äquivalent, welcher durch Division zweier Divisoren der Ordnung n entsteht, wo n geeignet, jedoch fest gewählt ist.

Zu diesem Zwecke werde $n = m\bar{n} \geqq 2g-2$ angenommen, wo $m = (K:k(z))$ und $\bar{n}$ ganz ist. Der Zählerdivisor eines beliebigen Polynoms c aus $k[z]$ vom Grad $\bar{n}$ in z ist dann ein Divisor $\mathfrak{c}_n$ der Ordnung n. Der Divisor $\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_n$ hat ebenfalls die Ordnung n, und da $n \geqq 2g-2$ ist, existiert nach dem Riemann-Rocheschen Satz ein Element $\alpha \neq 0$, das Multiplum von $\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_n}$ ist, dessen Divisor also die Gestalt $\frac{\mathfrak{c}_n'}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_n}$ besitzt, wo $\mathfrak{c}_n'$ ein ganzer Divisor der Ordnung n ist. $\mathfrak{c}_0$ ist somit in der Tat dem Quotient $\frac{\mathfrak{c}_n'}{\mathfrak{c}_n}$ zweier Divisoren der Ordnung n äquivalent.

3. Im folgenden nehmen wir immer an, daß k ein endlicher Körper ist. Die Zahl der Divisorenklassen der Ordnung 0 soll dann mit h bezeichnet werden.

Aus Satz 15 geht hervor, daß die Ordnungen der Divisoren von K übereinstimmen mit sämtlichen Vielfachen der Zahl d, wenn d die Ordnung eines Divisors möglichst kleiner positiver Ordnung ist. Ist n ein beliebiges Vielfaches von d, $\mathfrak{c}_n$ ein Divisor der Ordnung n, so sind alle Divisoren der Ordnung n in der Restklasse $\mathfrak{D}_0\mathfrak{c}_n$ von $\mathfrak{D}$ nach $\mathfrak{D}_0$ enthalten. Bedeuten daher $\mathfrak{C}_0^{(1)}, \ldots, \mathfrak{C}_0^{(h)}$ die h Klassen der Ordnung 0, so sind $\mathfrak{C}_0^{(1)}\mathfrak{c}_n, \ldots, \mathfrak{C}_0^{(h)}\mathfrak{c}_n$ sämtlich Klassen der Ordnung n, d. h.

Satz 17. *Ist n ein Vielfaches der Ordnung d eines Divisors von möglichst kleiner positiver Ordnung, so gibt es genau h Divisorenklassen der Ordnung n.*

Unter einer Divisorengruppe $\mathfrak{D}'$ wollen wir eine Untergruppe von $\mathfrak{D}$ verstehen, die die Hauptklasse enthält. Aus Satz 16 fließt dann

Satz 18. *Jede Divisorengruppe $\mathfrak{D}'$ mit alleiniger Ausnahme der endlich vielen in $\mathfrak{D}_0$ enthaltenen Divisorengruppen ist von endlichem Index unter der Gruppe $\mathfrak{D}$ aller Divisoren von K.*

Bemerkung. Die Ordnung d eines Divisors möglichst niedriger positiver Ordnung wird sich im folgenden Paragraphen gleich 1 herausstellen.

§ 8.

Die Zetafunktion.

1. Von nun an setzen wir stets voraus, daß der Körper k aller absolut algebraischen Elemente von K nur endlich viele, und zwar genau p Elemente enthält. Ist $\mathfrak{c}$ ein ganzer Divisor, f die Ordnung von $\mathfrak{c}$, so setzen wir $|\mathfrak{c}| = p^f$.

In Analogie mit der Theorie der algebraischen Zahlen führen wir die Z-Funktion des Körpers K ein und verstehen darunter die Funktion $Z(s)$ der komplexen Veränderlichen s, die folgendermaßen definiert ist:

$$(1) \qquad Z(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-|\mathfrak{p}|^{-s}}.$$

Dabei ist das Produkt rechter Hand über alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K zu erstrecken.

Die Funktion $Z(s)$ hängt gemäß ihrer Definition von der Natur des Körpers K allein ab und unterscheidet sich dadurch von der Z-Funktion, die Herr E. Artin in seinem Spezialfall betrachtet. Der Zusammenhang zwischen der durch (1) definierten Funktion $Z(s)$ und der von Herrn Artin untersuchten Z-Funktion wird in § 10 hergestellt.

Aus der Definitionsgleichung (1) ergibt sich in bekannter Weise, daß die Funktion $Z(s)$ in der Halbebene $\Re(s) > 1$ regulär ist und in demselben Gebiet durch die Reihe

$$(2) \qquad Z(s) = \sum_{\mathfrak{c}} \frac{1}{|\mathfrak{c}|^s}$$

dargestellt wird, wo die Summe rechter Hand über alle ganzen Divisoren $\mathfrak{c}$ aus K auszudehnen ist.

2. Nächstes Ziel ist, das Verhalten von $Z(s)$ auf und jenseits der Geraden $\Re(s) = 1$ festzustellen. Hierzu braucht man wieder den Riemann-Rocheschen Satz, mit dessen Hilfe man zu folgendem Satz gelangt:

Satz 19. *Die Funktion $Z(s)$ ist periodisch mit der Periode $\frac{2\pi i}{\log p}$ und in der ganzen s-Ebene regulär mit Ausnahme der Stellen $0 + \frac{2l\pi i}{\log p}$ bzw. $1 + \frac{2l\pi i}{\log p}$, an denen sie jeweils einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-\frac{h}{(p-1)\log p}$ bzw. $\frac{hp^{1-g}}{(p-1)\log p}$ besitzt.*

Der Beweis dieses Satzes wird in zwei Schritten geführt.

a) Indem man sich auf die Summendarstellung (2) von $Z(s)$ stützt, erhält man auf Grund des Riemann-Rocheschen Satzes nachstehende, nur in den Logarithmen abweichende Vorstufe zu Satz 19:

Ist d die Ordnung eines Divisors von möglichst kleiner positiver Ordnung und wird $p' = p^d$ gesetzt, so ist $Z(s)$ periodisch mit der Periode $\frac{2\pi i}{\log p'}$ und in der ganzen s-Ebene regulär mit Ausnahme der Stellen $0 + \frac{2l\pi i}{\log p'}$ bzw. $1 + \frac{2l\pi i}{\log p'}$, an denen sie jeweils einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-\frac{h}{(p-1)\log p'}$ bzw. $\frac{hp^{1-g}}{(p-1)\log p'}$ besitzt.

Sind $\mathfrak{C}_q^{(1)}, \ldots, \mathfrak{C}_q^{(h)}$ die h Klassen der Ordnung dq, wo q eine beliebige ganze Zahl ist (vgl. § 7, Satz 17), und bedeutet $\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}$ die Dimension der Klasse $\mathfrak{C}_q^{(i)}$, so ist die Zahl der ganzen Divisoren der Klasse $\mathfrak{C}_q^{(i)}$ nach Satz 13 gleich

$$\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}}-1}{p-1},$$

und daher nach (2)

$$Z(s)=\frac{1}{p-1}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}}-1}{p^{dqs}}=\frac{1}{p-1}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}}}{p'^{qs}}-\frac{h}{p-1}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{p'^{qs}}$$

$$=\frac{1}{p-1}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}}}{p'^{qs}}+\frac{h}{p-1}\frac{1}{1-p'^{s}}.$$

Bedeute q_0 die kleinste ganze Zahl der Art, daß $q_0 d \geqq 2g-2$, so ist für $q \geqq q_0$ nach dem Riemann-Rocheschen Satz

$$\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}=dq-g+1,$$

und man hat somit

$$Z(s)=\frac{1}{p-1}\sum_{q=1}^{q_0-1}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}}}{p'^{qs}}+\frac{hp^{1-g}}{p-1}\sum_{q=q_0}^{\infty}\frac{p'^{q}}{p'^{qs}}+\frac{h}{p-1}\cdot\frac{1}{1-p'^{s}},$$

d. h.

$$(3)\qquad Z(s)=\frac{1}{p-1}\sum_{q=1}^{q_0-1}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}}}{p'^{qs}}+\frac{hp^{1-g}}{p-1}\cdot\frac{p'^{q_0(1-s)}}{1-p'^{1-s}}+\frac{h}{p-1}\cdot\frac{1}{1-p'^{s}}.$$

Aus (3) ergeben sich ohne weiteres alle angegebenen Behauptungen über $Z(s)$.

b) Mit a) ist Satz 19 vollständig bewiesen, wenn $d=1$ nachgewiesen ist; denn dann ist $p'=p^d=p$. Nun ist d offenbar gleich dem größten gemeinschaftlichen Teiler der Ordnungen aller Primdivisoren von K. Hieran knüpfen wir an und beweisen unter Benutzung der Produktdarstellung (1) von $Z(s)$:

Der größte gemeinschaftliche Teiler d der Ordnungen aller Primdivisoren von K ist 1.

Ist η ein Element vom Grade d bezüglich k, $\overline{K}=K(\eta)$, so entsprechen jeder Primstelle $\mathfrak{p}$ von K genau d bezüglich K konjugierte Primstellen $\bar{\mathfrak{p}}_i$ von K, weil die Ordnung f von $\mathfrak{p}$ durch d teilbar ist, und es hat jeder der d Primdivisoren $\bar{\mathfrak{p}}_i$ von $\overline{K}$ die Ordnung $\frac{f}{d}$ [25]), so daß aus $|\mathfrak{p}|=p^f$ und $|\bar{\mathfrak{p}}_i|=p^{d\frac{f}{d}}$ gerade $|\mathfrak{p}|=|\bar{\mathfrak{p}}_i|$ folgt.

[25]) Vgl. § 2, 4.

Für die Z-Funktion des Körpers $\bar{K}$ ergibt sich daher

$$(4) \qquad Z_{\bar{K}}(s) = \prod_{\bar{\mathfrak{p}}} \frac{1}{1-|\bar{\mathfrak{p}}|^{-s}} = \left(\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-|\mathfrak{p}|^{-s}}\right)^{d} = (Z_K(s))^d.$$

Dabei ist das erste Produkt über alle Primdivisoren $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\bar{K}$, das zweite über alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K erstreckt. Da $Z_{\bar{K}}(s)$ und $Z_K(s)$ nach a) beide für $s=0$ einen Pol erster Ordnung haben, muß notwendig $d=1$ sein.

Aus der Tatsache, daß die Ordnung d eines Divisors von möglichst kleiner positiver Ordnung gleich 1 ist, folgt in Verbindung mit § 7; **3** und § 6; **5**, **6** der

Satz 20. *Ist $q \geqq 2g-2$ eine beliebige, positive ganze Zahl, so existieren stets genau $h\frac{p^{q-g+1}-1}{p-1}$ ganze Divisoren der Ordnung q.*

3. Ähnlich wie man in der Zahlentheorie die Zetafunktion der einzelnen Idealklassen betrachtet, ist es auch hier für manche Anwendungen zweckmäßig, eine Verallgemeinerung der Funktion $Z(s)$ einzuführen.

Ist $\mathfrak{D}'$ eine Divisorengruppe (vgl. § 7; **3**) von endlichem Index j unter $\mathfrak{D}$ und sind $\mathfrak{D}_1' = \mathfrak{D}', \mathfrak{D}_2', \ldots, \mathfrak{D}_j'$ die Restklassen von $\mathfrak{D}$ nach $\mathfrak{D}'$, so definieren wir die Funktion

$$Z(s; \mathfrak{D}_i') = \sum_{\mathfrak{c} \text{ aus } D_i'} \frac{1}{\|\mathfrak{c}\|^s},$$

wo die Summe über alle ganzen Divisoren $\mathfrak{c}$ der Restklasse $\mathfrak{D}_i'$ erstreckt ist. Aus dem in 2a) zur Summation von $Z(s)$ eingeschlagenen Verfahren ergibt sich, wenn $\mathfrak{D}'$ einen Divisor der Ordnung 1 enthält, mühelos:

Satz 21. *$Z(s; \mathfrak{D}_i')$ ist periodisch mit der Periode $\frac{2\pi i}{\log p}$ und in der ganzen Ebene regulär mit Ausnahme der Stellen $0 + \frac{2l\pi i}{\log p}$ bzw. $1 + \frac{2l\pi i}{\log p}$, an denen sie jeweils einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-\frac{h}{j(p-1)\log p}$ bzw. $\frac{hp^{1-g}}{j(p-1)\log p}$ besitzt.*

§ 9.

Die Funktionalgleichung der Zetafunktion.

Satz 22. *Die Funktion $Z(s)$ genügt der Funktionalgleichung*

$$Z(1-s) = p^{(g-1)(2s-1)} Z(s),$$

die sich mit Hilfe der Funktion $\Xi(s) = p^{s(g-1)} Z(\frac{1}{2}+s)$ auch auf die Form $\Xi(-s) = \Xi(s)$ bringen läßt.

Die beiden angegebenen Formen der Funktionalgleichung gehen ineinander über, wenn man in der ersten s durch $\frac{1}{2}+s$ ersetzt. Es genügt daher, die Funktionalgleichung in der zweiten Gestalt zu beweisen.

Zu diesem Zwecke gehen wir von der Gleichung (3) aus. Da $d=1$ ist, ist $p'=p$, und die kleinste ganze Zahl q_0, für die $q_0 d \geqq 2g-2$ ist, ist $q_0=1$ bzw. $q_0=2g-2$ im Falle $2g-2>1$. Man hat also

$$Z(s)=\frac{1}{p-1}\sum_{q=1}^{q_0-1}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}}}{p^{qs}}+\frac{h p^{-(g-1)}}{p-1}\,\frac{p^{(2g-2)(1-s)}}{1-p^{1-s}}+\frac{h}{p-1}\,\frac{1}{1-p^{s}},$$

wo die erste Summe rechts im Falle $2g-2\leqq 1$ fortfällt, und daher

$$Z\left(\frac{1}{2}+s\right)=\frac{1}{p-1}\sum_{q=1}^{q_0-1}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}}}{p^{\frac{q}{2}+qs}}+\frac{h}{p-1}\left(\frac{p^{-2s(g-1)}}{1-p^{\frac{1}{2}-s}}+\frac{1}{1-p^{\frac{1}{2}+s}}\right),$$

d. h.

$$\begin{aligned}\Xi(s)&=p^{s(g-1)}\frac{1}{p-1}\sum_{q=1}^{q_0-1}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}}}{p^{\frac{q}{2}+qs}}+\frac{h}{p-1}\left(\frac{p^{-s(g-1)}}{1-p^{\frac{1}{2}-s}}+\frac{p^{s(g-1)}}{1-p^{\frac{1}{2}+s}}\right)\\&=S_1(s)+S_2(s).\end{aligned}$$

Hier genügt $S_2(s)=\frac{h}{h-1}\left(\frac{p^{-s(g-1)}}{1-p^{\frac{1}{2}-s}}+\frac{p^{s(g-1)}}{1-p^{\frac{1}{2}+s}}\right)$ offenbar der Funktionalgleichung

$$S_2(-s)=S_2(s),$$

und wir haben nur noch zu zeigen, daß auch

$$S_1(-s)=S_1(s)$$

ist.

Nun ist

$$(p-1)S_1(s)=p^{s(g-1)}\sum_{q=1}^{2g-3}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}}}{p^{\frac{q}{2}+qs}}=\sum_{q=1}^{2g-3}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}-\frac{q}{2}}}{p^{s(q-g+1)}}.$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{C}_q'$ die Ergänzungsklasse von $\mathfrak{C}_q$, so daß also $\mathfrak{C}_q'$ die Ordnung $q'=2g-2-q$ hat, so durchläuft $\mathfrak{C}_q'$ zugleich mit $\mathfrak{C}_q$ alle Klassen, deren Ordnung kleiner als $2g-2$ ist, d. h. es ist

$$(p-1)S_1(s)=\sum_{q=1}^{2g-3}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q'^{(i)}\}-\frac{q'}{2}}}{p^{s(q'-g+1)}}=\sum_{q=1}^{2g-3}\sum_{i=1}^{h}\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q'^{(i)}\}-\frac{q'}{2}}}{p^{-s(q-g+1)}}.$$

Daraus folgt

$$(p-1)S_1(s)=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{2g-3}\sum_{i=1}^{h}\left(\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q^{(i)}\}-\frac{q}{2}}}{p^{s(q-g+1)}}+\frac{p^{\{\mathfrak{C}_q'^{(i)}\}-\frac{q'}{2}}}{p^{-s(q-g+1)}}\right),$$

und da nach dem Riemann-Rocheschen Satz

$$\{\mathfrak{C}_q\}-\frac{q}{2}=\{\mathfrak{C}_q'\}-\frac{q'}{2}$$

ist, gilt in der Tat

$$S_1(-s)=S_1(s).$$

§ 10.

Anwendungen.

1. Es soll zum Schluß noch der Zusamenhang zwischen den vorstehenden Ergebnissen und den von Herrn E. Artin in seinem Spezialfall hergeleiteten Resultaten hergestellt werden.

Sei z ein nicht zu k gehöriges Element, $\mathfrak{Z}$ der Ring aller in z ganzen Elemente, $\tilde{\mathfrak{p}}$ ein Primideal von $\mathfrak{Z}$. Herr Artin untersucht dann die Funktion

$$Z_{\mathfrak{Z}}(s) = \prod_{\tilde{\mathfrak{p}}} \frac{1}{1 - |\tilde{\mathfrak{p}}|^{-s}},$$

wo das Produkt über alle Primideale $\tilde{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{Z}$ erstreckt wird und $|\tilde{\mathfrak{p}}|$ gleich der Zahl der Restklassen von $\mathfrak{Z}$ modulo $\tilde{\mathfrak{p}}$ ist. Ist $\mathfrak{p}$ der zu dem Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ gehörige Primdivisor, so ist offenbar $|\mathfrak{p}| = |\tilde{\mathfrak{p}}|$. Zwischen der Funktion $Z_{\mathfrak{Z}}(s)$ und der von uns betrachteten Funktion $Z(s)$ besteht daher die Gleichung

$$Z(s) = \prod_{\mathfrak{u}} \frac{1}{1 - |\mathfrak{u}|^{-s}} Z_{\mathfrak{Z}}(s), \tag{4}$$

wo das Produkt über die endlich vielen verschiedenen in $\frac{1}{z}$ aufgehenden Primdivisoren $\mathfrak{u}$ zu nehmen ist. Das Produkt

$$\prod_{\mathfrak{u}} \frac{1}{1 - |\mathfrak{u}|^{-s}}$$

ist periodisch mit der Periode $\frac{2\pi i}{\log p}$ und in der ganzen Ebene regulär mit Ausnahme der Stellen $s = 0 + \frac{2l\pi i}{\log p}$, an denen es einen Pol hat, dessen Ordnung gleich der Zahl der verschiedenen in $\frac{1}{z}$ aufgehenden Primdivisoren $\mathfrak{u}$ ist.

Daraus folgt sofort:

Satz 23. *Die Funktion $Z_{\mathfrak{Z}}(s)$ ist periodisch mit der Periode $\frac{2\pi i}{\log p}$ und in der ganzen Ebene regulär mit Ausnahme der Stellen $s = 1 + \frac{2l\pi i}{\log p}$, an denen sie einen Pol erster Ordnung besitzt. $Z_{\mathfrak{Z}}(0)$ ist dann und nur dann von 0 verschieden, wenn der Nennerdivisor von z gleich der Potenz eines Primdivisors $\mathfrak{u}$ ist, und zwar ist in diesem Falle $Z_{\mathfrak{Z}}(0) = -\frac{u_z \cdot h}{p-1}$, wo u_z die Ordnung von $\mathfrak{u}$ bedeutet.*

Auch das Residuum der Funktion $Z_{\mathfrak{Z}}(s)$ an den Polstellen läßt sich mit Hilfe von (4) leicht auf das bekannte Residuum von $Z(s)$ an der Stelle 1 zurückführen. Es treten dann in der Residuenformel für $Z_{\mathfrak{Z}}(s)$ das Geschlecht g und die Zahl h der Divisorenklassen 0-ter Ordnung auf.

während sich das Residuum im Spezialfall des Herrn Artin wesentlich mit Hilfe der Diskriminante von $\mathfrak{J}$ bezüglich $k[z]$, dem Regulator und der Idealklassenzahl von $\mathfrak{J}$ ausdrücken ließ.

Nun ist $g = \frac{w_z}{2} - m_z + 1$, falls K über $k(z)$ von erster Art, m_z der Grad von K bezüglich $k(z)$ und w_z die Verzweigungszahl von K bezüglich $k(z)$ ist. Dabei ist die Beziehung von w_z zur Diskriminante bekannt (vgl. § 4, 5). Um auch die Zahl h der Divisorenklassen 0-ter Ordnung mit der Zahl der Idealklassen von $\mathfrak{J}$ in Verbindung zu setzen, haben wir kurz das Verhältnis von Divisorenklassen und Idealklassen zu untersuchen.

2. Die Gesamtheit aller ganzen und gebrochenen Ideale von $\mathfrak{J}$ bildet bei der Multiplikation eine Gruppe, die Gruppe $\mathfrak{A}$ aller Ideale von $\mathfrak{J}$. Die Restklassen von $\mathfrak{A}$ nach der Untergruppe $\mathfrak{B}$ aller Hauptideale heißen die Idealklassen von $\mathfrak{J}$.

Bezeichne $\mathfrak{U}$ die Gruppe aller Divisoren, in denen nur die in $\frac{1}{z}$ aufgehenden Primdivisoren $\mathfrak{u}$ wirklich auftreten. Ist $\mathfrak{c}$ der zum Ideal $\tilde{\mathfrak{c}}$ aus $\mathfrak{J}$ gehörige Divisor und wird dem Ideal $\tilde{\mathfrak{c}}$ die Menge der Divisoren $\mathfrak{U}\mathfrak{c}$ zugeordnet, so erhält man einen Homomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und der Gruppe $\mathfrak{D}/\mathfrak{U}$. Bei diesem Homomorphismus entspricht der Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ die Untergruppe $\mathfrak{H}\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{D}$, und es sind die Faktorgruppen $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{D}/\mathfrak{H}\mathfrak{U}$ isomorph, $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{D}/\mathfrak{H}\mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{H}\mathfrak{U}$ die Hauptklasse und mindestens einen Divisor mit von 0 verschiedener Ordnung umfaßt, ist $(\mathfrak{D}:\mathfrak{H}\mathfrak{U}) = (\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ endlich.

Satz 24. *Die Ideale von $\mathfrak{J}$ verteilen sich auf endlich viele Idealklassen. Die Zahl der Idealklassen von $\mathfrak{J}$ wird mit h_z bezeichnet.*

Um h_z durch h auszudrücken, dienen uns folgende einfache Gleichungen:

$$h_z = (\mathfrak{D}:\mathfrak{H}\mathfrak{U}) = (\mathfrak{D}:\mathfrak{D}_0\mathfrak{U})(\mathfrak{D}_0\mathfrak{U}:\mathfrak{H}\mathfrak{U}),$$

$$(\mathfrak{D}_0\mathfrak{U}:\mathfrak{H}\mathfrak{U}) = (\mathfrak{D}_0:\mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{H}\mathfrak{U}) = \frac{(\mathfrak{D}_0:\mathfrak{H})}{(\mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{H}\mathfrak{U}:\mathfrak{H})}.$$

Bedeutet $\mathfrak{U}_0$ die Untergruppe aller Divisoren der Ordnung 0 aus $\mathfrak{U}$, so ist $\mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{H}\mathfrak{U} = \mathfrak{H}\mathfrak{U}_0$ und $(\mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{H}\mathfrak{U}:\mathfrak{H}) = (\mathfrak{H}\mathfrak{U}_0:\mathfrak{H}) = (\mathfrak{U}_0:\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_0)$. Man hat also schließlich

$$h_z = (\mathfrak{D}:\mathfrak{D}_0\mathfrak{U})\frac{(\mathfrak{D}_0:\mathfrak{H})}{(\mathfrak{U}_0:\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_0)} = h\frac{(\mathfrak{D}:\mathfrak{D}_0\mathfrak{U})}{(\mathfrak{U}_0:\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_0)}.$$

Hier ist $(\mathfrak{D}:\mathfrak{D}_0\mathfrak{U})$ nach Satz 15 gleich der Ordnung des Divisors kleinster positiver Ordnung aus $\mathfrak{D}_0\mathfrak{U}$ und damit aus $\mathfrak{U}$, also $(\mathfrak{D}:\mathfrak{D}_0\mathfrak{U})$ gleich dem größten gemeinschaftlichen Teiler u_z der Ordnungen der in $\frac{1}{z}$ aufgehenden Primdivisoren $\mathfrak{u}$. Andererseits ist ein Element ε, dessen Divisor nur Primdivisoren $\mathfrak{u}$ wirklich enthält, stets Einheit von $\mathfrak{J}$, da mit ε auch $\frac{1}{\varepsilon}$ in $\mathfrak{J}$

enthalten ist[26]). $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_0$ besteht daher aus den Divisoren der Einheiten von $\mathfrak{Z}$, und der Index $(\mathfrak{U}_0 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}_0)$ soll infolgedessen der Regulator r_z von $\mathfrak{Z}$ heißen.

Zusammenfassend ergibt sich also

Satz 25. *Es ist* $h = \frac{h_z r_z}{u_z}$, *wo* u_z *der größte gemeinschaftliche Teiler der Ordnungen der in* $\frac{1}{z}$ *aufgehenden Primstellen und* r_z *der Regulator von* $\mathfrak{Z}$ *ist.*

3. Nunmehr läßt sich das Residuum der Funktion $Z_{\mathfrak{Z}}(s)$ an der Stelle $s = 1$ in der Tat mit Hilfe von Diskriminante, Idealklassenzahl und Regulator ausdrücken. Wie aus (4) hervorgeht, hängt das Residuum von der Zahl und der Ordnung der in $\frac{1}{z}$ aufgehenden Primdivisoren ab. Wir nehmen daher an, daß $\mathfrak{u}_1^{e_1} \mathfrak{u}_2^{e_2} \dots \mathfrak{u}_s^{e_s}$ der Nennerdivisor von z und f_i die Ordnung von $\mathfrak{u}_i$ sei, so daß $e_1 f_1 + \dots + e_s f_s = m_z = (K : k(z))$ ist. Es sei ferner K über $k(z)$ von erster Art. Dann ist

$$\frac{h p^{1-g}}{(p-1)\log p} = \left(\frac{1}{1-p^{-f_1}}\right)^{e_1} \dots \left(\frac{1}{1-p^{-f_s}}\right)^{e_s} \lim_{s \to 1} (s-1) Z_{\mathfrak{Z}}(s),$$

also

$$\lim_{s \to 1} (s-1) Z_{\mathfrak{Z}}(s) = \frac{h_z r_z}{p^{\frac{w_z}{2}} u_z} \frac{(p^{f_1}-1)^{e_1} \dots (p^{f_s}-1)^{e_s}}{(p-1)\log p}.$$

Spezialisiert man auf $m_z = 2$ und bedenkt, daß dann für den Zählerdivisor von $\frac{1}{z}$ genau drei Möglichkeiten bestehen, so erhält man die von Herrn Artin durch Rechnung einzeln abgeleiteten Formeln.

---

[26]) Vgl. § 4, 3.

(Eingegangen am 30. April 1929.)

Neue Grundlagen für einen Infinitesimalkalkul der Matrizen.

Von

Ludwig Schlesinger in Gießen.

Inhaltsübersicht.

Seite

I. Absoluter Betrag einer Matrix 33
II. Grenzmatrix. Das Produktintegral 35
III. Existenzbeweis für R-integrierbare Matrizen 38
IV. Die Exponentialmatrix als Baustein 42
V. Stetigkeit; Differenzierbarkeit. Differentiationsregeln . 44
VI. Integrationsregeln. Adjungierte Matrizen 49
VII. Abschätzungsformeln 51
VIII. Treppenmatrizen. L-integrierbare Matrizen 54
IX. Sätze über das Produktintegral einer L-integrierbaren Matrix 57

I.

Absoluter Betrag einer Matrix.

Will man von den formalen Rechnungsregeln für Matrizen, wie sie von Cayley und Frobenius aufgestellt worden sind, zu einem Infinitesimalkalkul fortschreiten, so muß ein quantitatives Element eingeführt werden, da für die Matrizen als mehrdimensionale Gebilde die sich auf bloße Anordnung stützenden Methoden nicht angewandt werden können. Ein solches quantitatives Element ergibt sich, wenn man den Begriff des absoluten Betrages einer Matrix einführt. Das kann nun in verschiedener Weise geschehen und ist infolgedessen mit einer gewissen Willkür behaftet. In neuerer Zeit hat namentlich J. H. M. Wedderburn im Bulletin of the American Mathematical Society **31** (1925), S. 304 ff. den absoluten Betrag einer Matrix $A = (a_{ik})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ als $\sqrt{\sum_{i,k} |a_{ik}|^2}$ definiert. Ich habe in früheren Publi-

kationen[1]), ohne die Bezeichnung des absoluten Betrages einer Matrix ausdrücklich einzuführen, mit dem n-fachen des größten unter den absoluten Beträgen der Elemente a_{ik} operiert. Wenn wir diesen mit a bezeichnen, so daß also

$$a = \max |a_{ik}| \geqq |a_{ik}|$$

ist, so gilt offenbar

$$\sqrt{\sum_{i,k} |a_{ik}|^2} \leqq n a. \tag{1}$$

Bedeutet ω eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von A, so sind die n Gleichungen

$$\omega q_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} q_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

auflösbar. Ist $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ein Lösungssystem, so gilt also

$$\omega q_\mu \bar{q}_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} q_\nu \bar{q}_\mu,$$

wenn wir mit $\bar{q}_\mu$ den konjugierten komplexen Wert von q_μ bezeichnen, und indem wir in bezug auf μ summieren, erhalten wir

$$\omega \sum_{\mu=1}^{n} q_\mu \bar{q}_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} q_\nu \bar{q}_\mu,$$

also

$$|\omega| \sum_{\mu=1}^{n} q_\mu \bar{q}_\mu \leqq \sum_{\mu,\nu=1}^{n} |a_{\mu\nu}| \, |q_\nu| \, |q_\mu| \tag{3}$$

und, wenn wir schließlich ins Quadrat erheben,

$$|\omega|^2 \left(\sum_{\mu=1}^{n} |q_\mu|^2 \right)^2 \leqq \left(\sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}| \, |q_\nu| \, |q_\mu| \right)^2.$$

Nun ist bekanntlich (Schwarzsche Ungleichung)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

es gilt also

$$|\omega|^2 \left(\sum_{\mu=1}^{n} |q_\mu|^2 \right)^2 \leqq \sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|^2 \left(\sum_{\mu=1}^{n} |q_\mu|^2 \right)^2$$

und mithin

$$|\omega|^2 \leqq \sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|^2.$$ [2])

[1]) Vgl. z. B. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig 1908, S. 5 ff., S. 41, 42; S. 89, 90.

[2]) Diese Ungleichung folgt ohne weiteres aus der sehr viel tiefer liegenden, die I. Schur, Math. Annalen 66 (1909), S. 492, aufgestellt hat.

Bezeichnen wir also mit Ω die Wurzel der charakteristischen Gleichung, die dem absoluten Betrage nach von keiner anderen übertroffen wird, so gilt die Ungleichung

$$|\Omega| \leqq \sqrt{\sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|^2} \leqq n a. \tag{4}$$

Die an erster Stelle auftretende Größe $|\Omega|$ erweist sich als naturgemäße Wahl für den absoluten Betrag der Matrix A, wenn man in eine Potenzreihe $\sum_\nu \alpha_\nu x^\nu$ an Stelle von x die Matrix A einsetzt, indem nach einem bekannten Satz von Eduard Weyr die n^2 Reihen, die die Elementen der Matrix $\sum_\nu \alpha_\nu A^\nu$ bilden, stets konvergieren, wenn $|\Omega|$ kleiner ist als der Halbmesser des Konvergenzkreises der Reihe $\sum_\nu \alpha_\nu x^\nu$ [3]). Die Ungleichung (4) zeigt also, daß die Definition von $n a$ als absoluter Betrag der Matrix die gröbste, die Definition von $|\Omega|$ die feinste und die von Wedderburn gewählte zwischen den beiden gelegen ist. Die erstere hat keinerlei invariante Eigenschaft, die zweite (Wedderburnsche) ist (vgl. Frobenius, Berliner Sitzungsberichte 1911, S. 241) invariant, wenn man A durch UAV ersetzt, wo U, V sogenannte unitäre Matrizen sind. Endlich ist die dritte $|\Omega|$ invariant für alle mit A ähnlichen Matrizen. Wie Wedderburn a. a. O. zutreffend hervorhebt, besteht die wesentliche Eigenschaft, die dem absoluten Betrag einer Matrix anhaften muß, darin, daß der absolute Betrag der Summe $A+B$ zweier Matrizen nicht größer ist als die Summe der absoluten Beträge und der absolute Betrag des Produktes AB nicht größer als das Produkt der absoluten Beträge. Offenbar besteht diese Eigenschaft für $n a$, und wir wollen deshalb im folgenden mit dieser Größe als der zwar rohesten, aber auch einfachsten Definition des absoluten Betrages einer Matrix operieren und bezeichnen diesen absoluten Betrag von nun ab mit $[A] = n \max |a_{ik}|$. Für die Einheitsmatrix I ist also $[I] = n$.

II.

Grenzmatrix. Das Produktintegral.

Wir definieren nunmehr für eine Folge von Matrizen $A_\nu = (a_{ik}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, daß $\lim_\nu A_\nu = A$ existiert, wenn nach Vorschrift eines beliebig kleinen ε eine ganze Zahl N_ε so angegeben werden kann, daß $[A_{\nu+r} - A_\nu] < \varepsilon$ für $\nu \geqq N_\varepsilon$ und r beliebig. Es existieren also in diesem Falle die $\lim_\nu a_{ik}^{(\nu)} = a_{ik}$ als Elemente der Grenzmatrix A.

[3]) Eine Präzisierung des Weyrschen Satzes gibt K. Hensel, Crelles Journal **155** (1925), S. 107; vgl. auch die einfache Herleitung bei G. Pick, Jahresbericht der D. M.-V. **35** (1926), S. *98*.

Hiernach ist auch klar, was man unter der Konvergenz einer unendlichen Reihe von Matrizen zu verstehen hat. Ferner wird eine Matrix A, deren Elemente Funktionen von x sind, an einer Häufungsstelle x_0 des Definitionsbereichs stetig heißen, wenn für jede nach dieser Häufungsstelle konvergierende Folge x_k $(k = 1, 2, \ldots)$, deren Elemente dem Definitionsbereiche von A angehören, $\lim_k A(x_k)$ existiert und gleich $A(x_0)$ ist. Es ist dies offenbar äquivalent mit der Bedingung, daß $[A(x_0) - A(x)]$ mit Verkleinerung von $|x_0 - x|$ beliebig klein gemacht werden kann. An Stellen, wo die Matrix A stetig ist, sind ihre sämtlichen Elemente stetig, und umgekehrt. — Wir beweisen noch den folgenden oft nützlichen Satz:

Wenn die Folge von Matrizen $A_1, A_2, \ldots$ gegen eine Grenzmatrix A konvergiert, $\lim_\nu A_\nu = A$, so konvergiert die Zahlenfolge $[A_\nu]$ gegen den Grenzwert $\lim_\nu [A_\nu] = [A]$.

Zufolge der Voraussetzung gilt nämlich für vorgeschrieben kleines ε, daß

$$[A_\nu - A] < \varepsilon$$

ist, wenn $\nu > N$; es ist demnach für alle $i, k = 1, 2, \ldots, n$

$$|a_{ik}^\nu - a_{ik}| < \frac{\varepsilon}{n}. \tag{4a}$$

Nun sei für ein festes ν

$$\frac{1}{n}[A_\nu] = \max |a_{ik}^\nu| = |a_{\alpha\beta}^\nu|$$

und für die Grenzmatrix A

$$\frac{1}{n}[A] = \max |a_{ik}| = |a_{\gamma\delta}|,$$

dann ist, je nachdem $|a_{\alpha\beta}^\nu| - |a_{\gamma\delta}| \gtrless 0$ ist, der absolute Betrag dieser Differenz kleiner als $|a_{\alpha\beta}^\nu| - |a_{\alpha\beta}|$ bzw. als $|a_{\gamma\delta}| - |a_{\gamma\delta}^\nu|$, also ist zufolge der Ungleichung (4a) für $\nu > N$ in jedem Falle $\big||a_{\alpha\beta}^\nu| - |a_{\gamma\delta}|\big| < \frac{\varepsilon}{n}$, d. h. $|[A_\nu] - [A]| < \varepsilon$, also in der Tat $\lim_\nu [A_\nu] = [A]$.

Wir wenden uns nun zur Einführung des wichtigsten Begriffs dieser Theorie, nämlich des *Produktintegrals*[4]).

Es bedeute $A(x)$ eine Matrix, deren Elemente in dem Intervall $p \leqq x \leqq r$ der reellen Veränderlichen x beschränkte Funktionen dieser Veränderlichen sind. Indem wir zwischen p und r die Zwischenwerte $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ einschalten und für $p = x_0$ eine Anfangsmatrix Y^0 mit nicht verschwindender

[4]) Vgl. meine Arbeit, Crelles Journal 128 (1904), S. 263 und die daselbst zitierten älteren (1887—1899) Arbeiten V. Volterras.

Determinante beliebig vorschreiben, definieren wir durch den Algorithmus

$$(5) \qquad Y^{\nu} - Y^{\nu-1} = (x_{\nu} - x_{\nu-1})\, Y^{\nu-1} A(\xi_{\nu-1}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$
$$x_{\nu-1} \leqq \xi_{\nu-1} < x_{\nu}$$

eine Endmatrix Y^m für den Punkt $x_m = r$. Es ist dann offenbar

$$(6) \qquad Y^{\nu} = Y^0 \prod_{k=1}^{\nu} \{I + (x_k - x_{k-1})\, A(\xi_{k-1})\}$$

und insbesondere

$$Y^m = Y^0 \prod_{\nu=1}^{m} \{I + (x_{\nu} - x_{\nu-1})\, A(\xi_{\nu-1})\},$$

wobei natürlich die Reihenfolge der Faktoren wesentlich ist. Wenn bei Verfeinerung der Teilung und beliebiger Wahl der Zwischenwerte die Matrix Y^m für $m \to \infty$ einer Grenzmatrix zustrebt, so bezeichnen wir diese durch das Symbol

$$\lim_m Y^m = Y^0 \int_p^r (I + A(x)\, dx)$$

und lesen es Produktintegral über die Matrix A zwischen den Grenzen p und r. Um die Bedingungen für die Existenz dieses Integrals herzuleiten, verfahren wir (wie auch in den „Vorlesungen" von 1908, S. 6ff.) ganz nach dem Vorbilde des Riemannschen Integrals einer Funktion einer reellen Veränderlichen. Die Grundlage der ganzen Untersuchung bildet ein Hilfssatz („Vorlesungen", S. 5, 6), den wir in der von Wedderburn (a. a. O., S. 307) gewählten Fassung wie folgt aussprechen:

Hilfssatz. Wenn für m Matrizen $A_1, A_2, \ldots, A_m$

$$P_m = (I + A_1)(I + A_2) \ldots (I + A_m),$$
$$Q_m = (1 + [A_1])(1 + [A_2]) \ldots (1 + [A_m])$$

gesetzt wird, so gilt für eine beliebige Matrix C

$$[P_m C] < e^{\sum_{\nu}^{m} [A_\nu]} [C].$$

Der Beweis liegt auf der Hand. Es ist nämlich

$$P_m = I + \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu + \sum_{\nu<\mu} A_\nu A_\mu + \sum_{\nu<\mu<\varrho} A_\nu A_\mu A_\varrho + \ldots + A_1 A_2 \ldots A_m,$$

also

$$[P_m] \leqq [I] + \sum_{\nu=1}^{m} [A_\nu] + \sum_{\nu<\mu} [A_\nu][A_\mu] + \ldots + [A_1][A_2] \ldots [A_m] = [I] - 1 + Q_m$$

und, da für ein positives a $1 + a < e^a$ ist, haben wir

$$[P_m] < [I] - 1 + e^{\sum_{\nu=1}^{m} [A_\nu]},$$

und ähnlich folgt für eine beliebige Matrix C, wie behauptet,

$$[P_m C] < e^{\sum_{\nu=1}^{m}[A_\nu]}[C]. \tag{I}$$

Auf den obigen Algorithmus (5) angewandt, liefert dieser Hilfssatz die folgende Ungleichung: Wenn die a_{ik} beschränkt sind, so ist offenbar auch $[A]$ beschränkt, und umgekehrt. Wir können also voraussetzen, daß für alle Werte $p \leqq x \leqq r$ die Ungleichung

$$[A] < G$$

gilt. Dann folgt aber aus (6)

$$[Y^\nu] < [Y^0]\, e^{\sum_{k=1}^{\nu}(x_k - x_{k-1})[A(\xi_{k-1})]} < [Y^0]\, e^{G(x_\nu - x_0)} \tag{7}$$

und insbesondere

$$[Y^m] < [Y^0]\, e^{G(r-p)}. \tag{8}$$

III.

Existenzbeweis für R-integrierbare Matrizen.

Wir betrachten nun zuvörderst unseren Algorithmus für zwei verschiedene Wahlen der Zwischenwerte, also

$$\begin{aligned} Y^\nu &= Y^{\nu-1}\{I + (x_\nu - x_{\nu-1})\, A(\xi_{\nu-1})\} \\ \bar{Y}^\nu &= \bar{Y}^{\nu-1}\{I + (x_\nu - x_{\nu-1})\, A(\bar{\xi}_{\nu-1})\} \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Dann folgt durch Subtraktion

$$\bar{Y}^\nu - Y^\nu = (\bar{Y}^{\nu-1} - Y^{\nu-1})\{I + (x_\nu - x_{\nu-1})\, A(\bar{\xi}_{\nu-1})\} + E_\nu, \tag{9}$$

wo

$$E_\nu = (x_\nu - x_{\nu-1})\, Y^{\nu-1}\{A(\bar{\xi}_{\nu-1}) - A(\xi_{\nu-1})\}$$

ist. Diese Gleichungen sind von der Form

$$\Delta_\nu = \Delta_{\nu-1} B_\nu + E_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m;\ \Delta_0 = 0). \tag{a}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta_m &= (\ldots(E_1 B_2 + E_2) B_3 + E_3) B_4 + \ldots + E_{m-1}) B_m + E_m \\ &= \sum_{\nu=1}^{m-1} E_\nu B_{\nu+1} B_{\nu+2} \ldots B_m + E_m. \end{aligned} \tag{b}$$

Dies auf die Gleichungen (9) angewandt, ergibt

$$\bar{Y}^m - Y^m = \sum_{\nu=1}^{m-1} E_\nu \{I + (x_{\nu+1} - x_\nu)\, A(\bar{\xi}_\nu)\} \ldots \{I + (x_m - x_{m-1})\, A(\xi_{m-1})\} + E_m,$$

und indem wir zu den absoluten Beträgen übergehen und den Hilfssatz (I)

anwenden, wird

$$[\bar{Y}^m - Y^m] < \sum_{\nu=1}^{m-1} [E_\nu]\, e^{\sum_{\lambda=\nu+1}^{m} (x_\lambda - x_{\lambda-1})[A(\bar{\xi}_{\lambda-1})]} + [E_m]$$

$$< \sum_{\nu=1}^{m-1} [E_\nu]\, e^{G(x_m - x_\nu)} + [E_m].$$

Nun ist, wenn wir $Y^{\nu-1}$ nach (7) abschätzen,

$$[E_\nu] < (x_\nu - x_{\nu-1})[Y^0]\, e^{G(x_{\nu-1} - x_0)} [A(\bar{\xi}_{\nu-1}) - A(\xi_{\nu-1})] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Für irgend zwei Punkte $\xi_{\nu-1}, \bar{\xi}_{\nu-1}$ des Intervalles $x_{\nu-1} \ldots x_\nu$ hat der Ausdruck

$$[A(\bar{\xi}_{\nu-1}) - A(\xi_{\nu-1})]$$

eine obere Schranke $S_{\nu-1}$, die wir als die Schwankung der Matrix A in diesem Intervall bezeichnen wollen. Es ist also $S_{\nu-1}$ das n-fache der Schwankung derjenigen unter den n^2 Funktionen a_{ik}, deren Schwankung nicht kleiner ist als die Schwankung aller übrigen (vgl. „Vorlesungen", S. 8). Wir finden also

$$[\bar{Y}^m - Y^m] < \sum_{\nu=1}^{m} e^{G(x_m - x_\nu)}\, e^{G(x_{\nu-1} - x_0)} (x_\nu - x_{\nu-1})[Y^0]\, S_{\nu-1}$$

und, wenn wir rechter Hand den Faktor $e^{G(x_\nu - x_{\nu-1})} > 1$ einfügen,

$$[\bar{Y}^m - Y^m] < e^{G(r-p)} [Y^0] \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1})\, S_{\nu-1}. \tag{10}$$

Wenn wir also für die Matrix A neben ihrer Beschränktheit noch voraussetzen, daß der Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1})\, S_{\nu-1},$$

den wir als die zu der Teilung des Intervalles $p \ldots r$ gehörige Gesamtschwankung bezeichnen, mit Verfeinerung der Teilung gegen Null strebt, so zeigt die Ungleichung (10), daß der absolute Betrag der Differenz zwischen zwei Endmatrizen, die sich nur durch verschiedene Wahl der Zwischenwerte voneinander unterscheiden, mit Verfeinerung der Teilung ebenfalls gegen Null konvergiert.

Wir haben nun noch das Verhalten der Y^m zu untersuchen, wenn wir von der Teilung durch die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ zu einer *Unterteilung* übergehen. Wir bringen zunächst nur an dem Intervall $x_{k-1} \ldots x_k$ durch die Punkte

$$\mathfrak{x}_0 = x_{k-1} < \mathfrak{x}_1 < \cdots < \mathfrak{x}_{\mu-1} < \mathfrak{x}_\mu = x_k$$

mit den Zwischenwerten η_ν eine Unterteilung an, während die übrigen Intervalle ungeändert bleiben mögen, und bezeichnen die auf diese Weise

entstehende Endmatrix mit Y_k^m. Dann ist

$$(11)\quad [Y_k^m - Y^m] \leqq [Y^0]\Big[\prod_{\nu=1}^{k-1}\Big]\Big[\prod_{\nu=1}^{\mu}\{I+(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})A(\eta_{\nu-1})\} - I-(x_k-x_{k-1})A(\xi_{k-1})\Big]\Big[\prod_{\nu=k+1}^{m}\Big],$$

wo wir bei den ungeändert gebliebenen Teilen des Produktes die Faktoren unterdrückt haben. Nun ist die abzuschätzende Differenz

$$(11\,a)\quad \Big[\prod_{\nu=1}^{\mu}\{I+(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})A(\eta_{\nu-1})\} - I-(x_k-x_{k-1})A(\xi_{k-1})\Big]$$

$$= \Big[\sum_{\nu=1}^{\mu}(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})\{A(\eta_{\nu-1})-A(\xi_{k-1})\} + \sum_{\nu<\lambda}(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})(\xi_\lambda-\xi_{\lambda-1})$$
$$A(\eta_{\nu-1})A(\eta_{\lambda-1})+\ldots\Big]$$
$$< (x_k-x_{k-1})S_{k-1} + \sum_{\nu<\lambda}(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})(\xi_\lambda-\xi_{\lambda-1})G^2+\cdots$$

$$= (x_k-x_{k-1})S_{k-1} + \prod_{\nu=1}^{\mu}\{1+(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})G\} - 1 - \sum_{\nu=1}^{\mu}(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})G$$
$$< (x_k-x_{k-1})S_{k-1} + e^{G(x_k-x_{k-1})} - 1 - (x_k-x_{k-1})G$$
$$< (x_k-x_{k-1})S_{k-1} + (x_k-x_{k-1})^2 G^2 e^{G(x_k-x_{k-1})}.$$

Berücksichtigen wir nun noch, daß für die in der Ungleichung (11) auftretenden Produkte

$$\Big[\prod_{\nu=1}^{k-1}\Big]\Big[\prod_{\nu=k+1}^{m}\Big] < e^{(r-p)G}$$

ist, so ergibt sich

$$(12)\quad [Y_k^m - Y^m] < [Y^0]\,e^{(r-p)G}\{(x_k-x_{k-1})S_{k-1} + (x_k-x_{k-1})^2 G^2 e^{(x_k-x_{k-1})G}\}.$$

Teilen wir nun weiter etwa das Intervall $x_{i-1}\ldots x_i$, $i \neq k$, und nennen die auf diese Weise entstehende Endmatrix Y_{ki}^m, so erhalten wir nach (12)

$$(13)\quad [Y_{ki}^m - Y_k^m] < [Y^0]\,e^{(r-p)G}\{(x_i-x_{i-1})S_{i-1} + (x_i-x_{i-1})^2 G^2 e^{(x_i-x_{i-1})G}\}.$$

Aus (12) und (13) folgt nunmehr

$$[Y_{ki}^m - Y^m] < [Y^0]\,e^{(r-p)G}\{(x_k-x_{k-1})S_{k-1} + (x_i-x_{i-1})S_{i-1} + (x_k-x_{k-1})^2 G^2 e^{(x_k-x_{k-1})G} + (x_i-x_{i-1})^2 G^2 e^{(x_i-x_{i-1})G}\}.$$

Wenn wir also alle Intervalle mit Unterteilungen versehen haben und die

sich so ergebende Endmatrix mit Y_u^m bezeichnen, so ist

$$[Y_u^m - Y^m] < [Y^0]\, e^{(r-p)G} \Big\{ \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1})\, S_{k-1} + \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1})^2\, G^2\, e^{(x_k - x_{k-1})G} \Big\}. \tag{13a}$$

Damit ist gezeigt, daß die durch irgendeine Unterteilung hervorgehende Endmatrix sich von der zur ursprünglichen Teilung gehörigen im absoluten Betrage um beliebig wenig unterscheidet, wenn die ursprüngliche Teilung hinreichend fein genommen worden ist, vorausgesetzt, daß dadurch die Gesamtschwankung beliebig klein gemacht werden kann [5]). Daraus folgt nun in sehr bekannter Weise, daß für irgendzwei Teilungen, deren Teilintervalle hinreichend klein sind, die Endmatrizen sich im absoluten Betrage beliebig wenig voneinander unterscheiden, und dies besagt nichts anderes, als daß sich Y^m mit Verfeinerung der Teilung und bei beliebiger Wahl der Zwischenwerte einer Grenzmatrix Y annähert

$$Y = \lim_{m} Y^0 \prod_{\nu=1}^{m} (I + (x_\nu - x_{\nu-1})\, A(\xi_{\nu-1})), \tag{14}$$

für die also die oben eingeführte Bezeichnung des Produktintegrals

$$Y = Y^0 \int_p^r (I + A\,dx)$$

benutzt werden soll.

Aus der Definition folgt ohne weiteres für $p < r < s < q$ die Kompositionsgleichung

$$\int_p^s (I + A\,dx) = \int_p^r \cdot \int_r^s . \tag{14a}$$

Natürlich gilt Analoges bei Zwischenschaltung einer beliebigen endlichen Anzahl von Punkten.

In $\int_p^r (I + A\,dx)$ denken wir uns nun die obere Grenze r veränderlich, also zwar, daß $r = x$ dem Intervall $p < x < q$ angehören möge, und setzen voraus, daß für jedes solche x der Limes der Gesamtschwankung der Matrix A in dem Intervall $p \ldots x$ gleich Null ist. Dann folgt durch Anwendung des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes, daß die Annäherung der Gesamtschwankung an die Null in dem ganzen Intervall von p bis q

[5]) Es wird nämlich $(x_k - x_{k-1})\, G^2\, e^{(x_k - x_{k-1})G}$ mit $x_k - x_{k-1}$ beliebig klein, etwa kleiner als η; dann ist aber

$$\sum_k (x_k - x_{k-1})^2\, G^2\, e^{(x_k - x_{k-1})G} < \eta \sum_k (x_k - x_{k-1}) = \eta\,(r - p),$$

also ebenfalls beliebig klein.

gleichmäßig erfolgt, und die Ungleichung (13a) zeigt ohne weiteres, daß sich auch die Y^m der Grenze Y in dem ganzen Intervall $p \dots q$ gleichmäßig annähern. Von der Matrix A, die in dem Intervall $p \dots q$ beschränkt ist und für die der Grenzwert der Gesamtschwankung verschwindet, sagen wir, sie sei in diesem Intervalle im Riemannschen Sinne (kurz R-) integrierbar. Offenbar ist jedes Element einer solchen Matrix eine R-integrierbare Funktion, und umgekehrt ist eine Matrix, deren Elemente R-integrierbare Funktionen sind, selbst R-integrierbar.

IV.

Die Exponentialmatrix als Baustein.

Wir betrachten nunmehr den besonderen Fall, wo die Matrix A in dem Intervall $p \dots q$ konstant ist. Wir haben dann definitionsgemäß

$$\int_p^q (I + A\,dx) = \lim_m \prod_{\nu=1}^{m} \{I + (x_\nu - x_{\nu-1})\,A\}, \tag{15}$$

wo aber jetzt die Faktoren des Produktes unter dem Limeszeichen miteinander vertauschbar sind. Wenn wir die Intervallteile einander gleich wählen, so schreibt sich dieses Integral als $\lim_m \left(I + \frac{q-p}{m} A\right)^m$. Wir bezeichnen nach der Analogie der elementaren Definition der Exponentialfunktion diesen Ausdruck mit

$$\int_p^q (I + A\,dx) = \lim_m \left(I + \frac{q-p}{m} A\right)^m = e^{(q-p)A}. \tag{16}$$

Er spielt in unserer Theorie die analoge Rolle wie der Flächeninhalt eines Rechtecks $(q-p)\cdot$konst. für das gewöhnliche Integral. Wir werden gleich sehen, daß er auch direkt als Baustein für das allgemeine Produktintegral benutzt werden kann. Es sei nämlich A wieder eine veränderliche R-integrierbare Matrix in dem Intervall $p \dots q$, also

$$\int_p^x (I + A\,dx) = \lim_m \prod_{\nu=1}^{m} \{I + (x_\nu - x_{\nu-1})\,A(\xi_{\nu-1})\} \qquad (p < x < q).$$

Wir betrachten nun eine Unterteilung des Intervalles $x_{k-1} \dots x_k$ durch die Teilpunkte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu$, nehmen aber, abweichend von dem in der Nummer III befolgten Verfahren, für jedes der Teilintervalle der Unterteilung immer wieder $A(\xi_{k-1})$ als zugehörigen Funktionswert. Dann folgt nach der Analogie der Ungleichung (11a) auf S. 7

$$\left[\prod_{\lambda=1}^{\mu} \{I + (\xi_\lambda - \xi_{\lambda-1})\,A(\xi_{k-1})\} - \{I + (x_k - x_{k-1})\,A(\xi_{k-1})\}\right] < (x_k - x_{k-1})^2 [A(\xi_{k-1})]^2\, e^{(x_k - x_{k-1})[A(\xi_{k-1})]},$$

a aber bei hinreichender Verfeinerung der Unterteilung des Intervalles
$x_{k-1} \cdots x_k$

$$\lim_{\mu} \prod_{\lambda=1}^{\mu} \{I + (\xi_\lambda - \xi_{\lambda-1}) A(\xi_{k-1})\} = e^{(x_k - x_{k-1}) A(\xi_{k-1})}$$

t, so gilt auch

$$[e^{(x_k - x_{k-1}) A(\xi_{k-1})} - \{I + (x_k - x_{k-1}) A(\xi_{k-1})\}] < (x_k - x_{k-1})^2 [A(\xi_{k-1})]^2 e^{(x_k - x_{k-1}) |A(\xi_{k-1})|}, \tag{7}$$

ne Ungleichung, die unmittelbar evident wird, wenn man für die durch
e Gleichung (16) erklärte Exponentialfunktion einer Matrix X die Reihen-
ntwicklung

$$e^{(q-p)X} = I + \frac{(q-p)X}{1} + \frac{(q-p)^2 X^2}{2!} + \cdots$$

enutzen wollte, was wir aber an dieser Stelle lieber noch vermeiden.
enken wir uns nun alle Intervalle für $k = 1, 2, \ldots, m$ mit Unterteilungen
ersehen, so finden wir, ähnlich wie aus (11a) die Ungleichung (13a) in
ummer III, aus (17) die Ungleichung

$$\left[\prod_{k=1}^{m} e^{(x_k - x_{k-1}) A(\xi_{k-1})} - \prod_{k=1}^{m} \{I + (x_k - x_{k-1}) A(\xi_{k-1})\}\right] < e^{(q-p) G} \cdot G^2 \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1})^2 e^{(x_k - x_{k-1}) G}$$

nd, wenn wir nunmehr zur Grenze übergehen,

$$\int_p^x (I + A\,dx) = \lim_m \prod_{k=1}^{m} e^{(x_k - x_{k-1}) A(\xi_{k-1})}, \tag{8}$$

o natürlich die Faktoren des Produktes unter dem Limeszeichen im all-
emeinen nicht vertauschbar sind. Die Darstellung (18) des Produkt-
tegrals ist der des gewöhnlichen Riemannschen Integrals

$$\int_p^x f(x)\,dx = \lim_m \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1})$$

nz analog.

Um gleich eine Anwendung der Darstellung (18) zu geben, wollen
r zunächst die Determinante der Matrix (16) bestimmen. Es ist nach
efinition

$$e^{xA} = \lim_m \left(I + \frac{xA}{m}\right)^m, \qquad \text{Det. } e^{xA} = \lim_m \text{Det.} \left(I + \frac{xA}{m}\right)^m.$$

un ist aber

$$\text{Det.} \left(I + \frac{xA}{m}\right) = 1 + \frac{x}{m} \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \frac{x^2}{m^2} \sum A_2 + \ldots + \frac{x^n}{m^n} \text{Det. } A,$$

wo $\sum \Delta_2$ die Summe der Hauptminoren zweiter Ordnung bedeutet, also zur m-ten Potenz erhoben

$$\text{Det.}\left(I+\frac{xA}{m}\right)^m=\left(1+\frac{x\sum\limits_k a_{kk}+\frac{1}{m}(x^2\sum\Delta_2+\ldots)}{m}\right)^m,$$

und nach den elementaren Gesetzen für die gewöhnliche (skalare) Exponentialfunktion ergibt sich hieraus

$$\lim_m \text{Det.}\left(I+\frac{xA}{m}\right)^m=e^{x\sum\limits_k a_{kk}}.$$

Man bezeichnet die Summe $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$ der Diagonalglieder einer Matrix A als die *Spur der Matrix*, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}=\text{Sp.}\,A$. Es gilt also

$$\text{Det.}\,e^{xA}=e^{x\,\text{Sp.}\,A}. \tag{19}$$

Nun folgt aus der Gleichung (18) für die Determinante der durch das allgemeine Produktintegral dargestellten Matrix

$$\text{Det.}\int_p^{\overrightarrow{x}}(I+A\,dx)=\lim_m \prod_{k=1}^{m}\text{Det.}\,e^{(x_k-x_{k-1})A(\xi_{k-1})},$$

also nach (19)

$$\text{Det.}\int_p^{\overrightarrow{x}}(I+A\,dx)=\lim_m \prod_{k=1}^{m} e^{(x_k-x_{k-1})\,\text{Sp.}\,A(\xi_{k-1})}=e^{\lim\limits_m \sum\limits_k (x_k-x_{k-1})\,\text{Sp.}\,A(\xi_{k-1})},$$

und hieraus ergibt sich die wichtige, von Jacobi herrührende Gleichung

$$\text{Det.}\int_p^{\overrightarrow{x}}(I+A\,dx)=e^{\int_p^x \text{Sp.}\,A\,dx}, \tag{20}$$

aus der unmittelbar ersichtlich ist, daß die Determinante eines Produktintegrals von Null verschieden ist, solange die Matrix A beschränkt bleibt[6]). In einem Bereiche, in dem dies der Fall ist, kann also auch stets die inverse Matrix des Produktintegrals gebildet werden.

V.

Stetigkeit; Differenzierbarkeit. Differentiationsregeln.

Wir betrachten nun ein den Punkt x in sich fassendes Intervall $\xi\ldots\zeta$, so daß $p<\xi\leqq x\leqq\zeta<q$ ist. Denken wir uns dieses Intervall $\xi\ldots\zeta$ durch die Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ mit den Zwischenwerten η_ν geteilt und

[6]) Einen andern Beweis der Gleichung (20), der auch wie der obige die Differenzierbarkeit des Produktintegrals nicht voraussetzt, habe ich in der Zeitschrift Christiaan Huygens 8 (1929) S. 80 gegeben.

ie Teilung verfeinert, so wird für

$$\mathfrak{Y}^m = \prod_{k=1}^{m} \{I + (\xi_k - \xi_{k-1}) A(\eta_{k-1})\}$$

$$\int_{\xi}^{\zeta} (I + A\,dx) = \lim_{m} \mathfrak{Y}^m.$$

etzen wir anderseits

$$\mathfrak{Y}' = I + (\zeta - \xi) A(\eta), \qquad \xi \leqq \eta < \zeta,$$

) können wir die Ungleichung (12) anwenden und erhalten

$$[\mathfrak{Y}^m - \mathfrak{Y}'] < [I]\, e^{(\zeta-\xi)G} \{(\zeta - \xi) S + (\zeta - \xi)^2 G^2 e^{(\zeta-\xi)G}\},$$

o S die Schwankung der Matrix A in dem Intervall $\xi \ldots \zeta$ bedeutet. Durch Grenzübergang wird also

21)
$$\left[\int_{\xi}^{\zeta} (I + A\,dx) - \{I + (\zeta - \xi) A(\eta)\}\right] < [I]\, e^{(\zeta-\xi)G} \{(\zeta - \xi) S + (\zeta - \xi)^2 G^2 e^{(\zeta-\xi)G}\}.$$

ndem wir jetzt das Intervall $\xi \ldots \zeta$ sich auf den Punkt x zusammenziehen ssen, was wir durch $\zeta - \xi \to 0$ andeuten, können wir aus der vorstehenen Ungleichung (21) zwei wichtige Folgerungen ziehen:

1. Da die Matrix A für jeden Punkt x des Intervalles $p \ldots q$ beschränkt t, gilt

22)
$$\lim_{\zeta - \xi \to 0} \int_{\xi}^{\zeta} (I + A\,dx) - I = 0.$$

un ist nach der Kompositionsgleichung (14a)

$$Y = \int_{p}^{x} (I + A\,dx) = \int_{p}^{\xi} \cdot \int_{\xi}^{x}, \qquad \text{mithin} \quad Y^{-1} \int_{p}^{\xi} = \left(\int_{\xi}^{x}\right)^{-1},$$

nd

$$\int_{p}^{\zeta} = Y \int_{x}^{\zeta}, \qquad \text{mithin} \quad \int_{x}^{\zeta} = Y^{-1} \int_{p}^{\zeta}.$$

s gilt also

$$\left[\int_{p}^{\xi} - Y\right] \leqq [Y] \left[Y^{-1} \int_{p}^{\xi} - I\right] = [Y] \left[\left(\int_{\xi}^{x}\right)^{-1} - I\right],$$

$$\left[\int_{p}^{\zeta} - Y\right] \leqq [Y] \left[Y^{-1} \int_{p}^{\zeta} - I\right] = [Y] \left[\int_{x}^{\zeta} - I\right],$$

nd folglich ergibt sich nach der Gleichung (22)

$$\lim_{\xi \to x} \left[\int_{p}^{\xi} - Y\right] = 0, \qquad \lim_{\zeta \to x} \left[\int_{p}^{\zeta} - Y\right] = 0.$$

Dies besagt aber, daß das Produktintegral Y in seiner Abhängigkeit von der oberen Grenze x in jedem Punkte des Intervalles $p \dots q$ stetig ist. Hierüber hinausgehend kann man über die Matrix Y noch das Folgende aussagen.

Wenn wir die Gleichungen des Algorithmus (5) addieren, so erhalten wir

$$Y^m - Y^0 = \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1})\, Y^{\nu-1} A(\xi_{\nu-1}). \tag{5a}$$

Denken wir uns den Endpunkt des Integrationsintervalls wieder veränderlich, also $x = x_m$, so ist $Y(x) = \lim_m Y^m$ eine stetige Matrix. — Lassen wir insbesondere x mit dem Teilungspunkte $x_{\nu-1}$ unserer Teilung zusammenfallen, so wird $Y(x_{\nu-1})$ hervorgehen, indem wir die Teilung des Intervalls $p \dots x_{\nu-1}$ verfeinern und zur Grenze übergehen. Wir können also bei jeder Verfeinerung der Teilung und somit auch für den Grenzwert selbst die Ungleichung (13a) anwenden und schreiben

$$[Y(x_{\nu-1}) - Y^{\nu-1}] < [Y^0]\, e^{(x_{\nu-1}-p)G} \times \left\{ \sum_{k=1}^{\nu-1} (x_k - x_{k-1})\, S_{k-1} + \sum_{k=1}^{\nu-1} (x_k - x_{k-1})^2\, G^2\, e^{(x_k - x_{k-1})G} \right\}.$$

Diese Ungleichung gilt offenbar a potiori, wenn wir rechter Hand den auf der rechten Seite von (13a) stehenden Ausdruck, den wir kurz mit R bezeichnen, einsetzen. Wir finden demnach nach Multiplikation mit $(x_\nu - x_{\nu-1}) A(\xi_{\nu-1})$ und Summation die Ungleichung

$$\left[\sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1})\, Y(x_{\nu-1})\, A(\xi_{\nu-1}) - \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1})\, Y^{\nu-1} A(\xi_{\nu-1}) \right] < G(q-p)\, R.$$

Nun wird R mit Verfeinerung der Teilung beliebig klein, auch kann man zufolge der Stetigkeit von $Y(x)$ an die Stelle von $Y(x_{\nu-1})$ setzen $Y(\xi_{\nu-1})$; wir haben also

$$\lim_m \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1})\, Y^{\nu-1} A(\xi_{\nu-1}) = \lim_m \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1})\, Y(\xi_{\nu-1}) \cdot A(\xi_{\nu-1}),$$

und dies ist nach der Definition des bestimmten Integrals die Matrix, deren Elemente die zwischen den Grenzen p und r erstreckten Integrale über die Elemente der Matrix $Y(x) A(x)$ sind; wir bezeichnen diese Matrix kurz mit

$$\int_p^r Y(x) A(x)\, dx$$

und können demnach die aus (5a) durch Grenzübergang hervorgehende Gleichung in der Form

$$Y - Y^0 = \int_p^r Y(x) A(x)\, dx \tag{23}$$

schreiben. — Sie faßt die n^2 Gleichungen

$$y_{ik} - y_{ik}^0 = \sum_{\lambda=1}^{n} \int_p^x y_{i\lambda} a_{\lambda k} \, dx$$

zusammen, die ein System Volterrascher Integralgleichungen für die Elemente der Matrix Y darstellen. Wir bezeichnen entsprechend auch (23) als Volterrasche Integralgleichung für die Matrix Y. —

2. Wir betrachten nun eine Stelle x, an der die Matrix A selbst stetig ist. Es gilt dann $\lim_{\zeta-\xi\to 0} S = 0$ und $\lim_{\zeta-\xi\to 0} A(\eta) = A(x)$; wir erhalten also, wenn wir in der Ungleichung (21) durch die Länge des Intervalles $\zeta - \xi$ dividieren,

$$(24) \quad \lim_{\zeta-\xi\to 0} \frac{1}{\zeta-\xi} \left\{ \int_\xi^\zeta (I + A\,dx) - I \right\} = \lim_{\zeta-\xi\to 0} \frac{1}{\zeta-\xi} \left\{ \left(\int_p^\xi \right)^{-1} \int_p^\zeta - I \right\} = A(x).$$

Wenn für eine Matrix $P(x)$, deren Elemente Funktionen von x sind und deren Determinante nicht identisch verschwindet, für irgendein sich auf x zusammenziehendes Intervall $\xi \leqq x \leqq \zeta$ der Grenzwert

$$(25) \quad \lim_{\zeta-\xi\to 0} \frac{1}{\zeta-\xi} \{P(\xi)^{-1} P(\zeta) - I\} = Q(x)$$

existiert, so setzen wir

$$D_x P(x) = Q(x),$$

nennen die Matrix $P(x)$ an der Stelle x differenzierbar und sagen von der Matrix $Q(x)$, sie sei die derivierte Matrix von $P(x)$ nach x.

Wenn $P(x)$ an der Stelle x differenzierbar ist, so ist diese Matrix offenbar daselbst auch stetig, also $\lim_{\xi-\xi\to 0} P(\xi) = P(x)$, wir können also die Gleichung (25) auch in der Form schreiben

$$\lim_{\zeta-\xi\to 0} \left\{ P(\xi)^{-1} \frac{P(\zeta) - P(\xi)}{\zeta-\xi} \right\} = P(x)^{-1} \lim_{\zeta-\xi\to 0} \frac{P(\zeta)-P(\xi)}{\zeta-\xi} = Q(x).$$

Wir sehen hieraus, daß aus der Differenzierbarkeit der Matrix $P(x)$ die Differenzierbarkeit ihrer Elemente im gewöhnlichen Sinne folgt, und umgekehrt; es ist nämlich

$$\lim_{\zeta-\xi\to 0} \frac{P(\zeta)-P(\xi)}{\zeta-\xi} = P'(x) = \frac{dP(x)}{dx}$$

offenbar nichts anderes als die Matrix, deren Elemente die gewöhnlichen Derivierten der Elemente der Matrix $P(x)$ sind. Wir haben also

$$(26) \quad D_x P = P^{-1} \frac{dP}{dx}.$$

Für das Produktintegral Y besagt also die Gleichung (24), daß

$$D_x Y = A,$$

oder mit anderen Worten, daß Y an jeder Stelle x, wo die Matrix A stetig ist, differenzierbar ist und das lineare homogene Differentialsystem

$$\frac{dY}{dx} = YA \tag{27}$$

befriedigt. Aus diesem Differentialsystem folgt durch Integration die Volterrasche Integralgleichung (23); das Umgekehrte gilt aber nur, wenn das in (23) auftretende Integral nach seiner oberen Grenze differenzierbar, also insbesondere an Stellen x, wo A und folglich auch YA stetig ist.

Indem wir jetzt die Stetigkeit von A in dem Intervall $p \dots q$ voraussetzen, wollen wir eine Anzahl von Differentiations- und Integrationsregeln ableiten, die wir fortlaufend numerieren.

1. Bedeutet C eine konstante Matrix, für die Det. $C \neq 0$, so gilt $D_x C = 0$.

1a. Umgekehrt folgt aus $D_x P = 0$, d. h. $P^{-1}\frac{dP}{dx} = 0$, daß P eine konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante ist. Insbesondere gilt also

$$\int_p^x (I + 0\,dx) = I.$$

2. Sind P und Q differenzierbar (also jedenfalls Det. P und Det. Q nicht identisch Null), so gilt

$$D_x(PQ) = Q^{-1} D_x P \cdot Q + D_x Q.$$

2a. Für $Q = P^{-1}$ folgt hieraus insbesondere

$$D_x P^{-1} = -P \cdot D_x P \cdot P^{-1}.$$

2b. Ferner für ein konstantes $Q = C$

$$D_x(PC) = C^{-1} D_x P \cdot C.$$

2c. Und für konstantes $P = C$

$$D_x(CQ) = D_x Q.$$

2d. Die letztere Regel ist wie folgt umkehrbar:

Hat man $D_x P = D_x Q$, so folgt aus 2. und 2a

$$\begin{aligned} D_x(PQ^{-1}) &= Q \cdot D_x P \cdot Q^{-1} + D_x Q^{-1}, \\ &= Q \cdot D_x P \cdot Q^{-1} - Q \cdot D_x Q \cdot Q^{-1}, \\ &= Q\,(D_x P - D_x Q)\,Q^{-1} = 0, \end{aligned}$$

also ist nach 1a $PQ^{-1} = C$ konstant mit Det. $C \neq 0$, d. h. $P = CQ$. Insbesondere ergibt sich hieraus, daß eine Lösungsmatrix des Differentialsystems $D_x Y = A$ durch ihre Anfangswerte eindeutig bestimmt ist.

3. Führt man in die für das Intervall $p \dots q$ stetige Matrix A durch $= f(t)$ eine neue Veränderliche ein, für die dem Intervall $m \leqq t \leqq n$ genseitig eindeutig das Intervall $p \leqq x \leqq q$ entspricht, und wo $f(t)$ in m Intervall $m \dots n$ eine stetige Derivierte $f'(t)$ besitzt, so ist zunächst $(f(t))$ in dem letztgenannten Intervall stetig, und es gilt

$$\int_p^q (I + A\,dx) = \int_m^n (I + A(f(t))\,f'(t)\,dt).$$

ach dem Satze über die Derivierte eines Produktintegrals haben nämlich e beiden Produktintegrale

$$\int_{f(m)}^{f(t)} (I + A\,dx) \quad \text{und} \quad \int_m^t (I + A(f(t))\,f'(t)\,dt)$$

eselbe derivierte Matrix $A(f(t))\,f'(t)$, und da sich beide für $t = m$ auf reduzieren, so sind sie nach 2d identisch. Daraus folgt aber für $t = n$ e Behauptung.

VI.

Integrationsregeln. Adjungierte Matrizen.

Die Bedingung, daß A stetig ist, wird sicher erfüllt, wenn A im gan- n Intervall $p \dots q$ konstant ist; die Matrix (16) oder

$$e^{(x-p)A} = \int_p^x (I + A\,dx) \tag{3}$$

friedigt also die Differentialgleichung

$$D_x \mathfrak{Y} = A, \tag{9}$$

n. ein lineares Differentialsystem mit konstanten Koeffizienten. Die Lö- ngsmatrix (28) dieses Differentialsystems ist dadurch eindeutig bestimmt, 3 sie sich für $x = p$ auf I reduziert; die gleiche Eigenschaft kommt er der durch die Potenzreihe

$$I + (x-p)A + \frac{1}{2}(\ -p)^2 A^2 + \frac{1}{3!}(x-p)^3 A^3 + \dots \tag{)}$$

gestellten Lösungsmatrix vor (29) zu. Daß die Reihe (30) für jeden rt von x und für jede Matrix A konvergiert, erkennt man sofort, wenn n bedenkt, daß eine unendliche Reihe von Matrizen $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ definitions- näß konvergent ist, wenn bei vorgeschriebenem positiven ε und für reichend großes ν und beliebiges ganzzahliges r $\left[\sum_{k=\nu+1}^{\nu+r} A_k\right] < \varepsilon$ gemacht

werden kann, so daß also für die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ die Konvergen
von $\sum_{\nu=1}^{\infty} [A_\nu]$ hinreichend ist; die Reihe (30) konvergiert demnach, wen
$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}[(x-p)^\nu A^\nu]$, also sicher auch, wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}|x-p|^\nu [A]^\nu$ konver
gent ist. Die beiden Matrizen (28) und (30) sind also identisch, d. h. e
gilt die Reihenentwicklung

$$\mathfrak{Y} = e^{(x-p)A} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}(x-p)^\nu A^\nu. \tag{31}$$

Hieraus können wir eine Reihe wichtiger Eigenschaften der Exponentialmatri

$$e^A = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} A^\nu$$

ablesen. Sind A und B vertauschbare Matrizen, also $AB = BA$, so ist auch
jede Summe von Potenzen von A mit jeder Summe von Potenzen von B
also auch e^A mit e^B vertauschbar, und man findet durch Komposition

$$e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A = e^{A+B},$$

woraus

$$e^{-A} = (e^A)^{-1} \tag{32}$$

folgt. Auch gilt offenbar

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}. \tag{33}$$

Nunmehr können wir aus der Darstellung (18) des Produktintegrals eine
beliebigen Matrix A die folgenden wichtigen Integrationsregeln ableiten.

Aus der Darstellung (18), wo wir aber die obere Grenze statt mit x
wieder mit r bezeichnen wollen, folgt

$$Y^{-1} = \Big(\int_p^r (I + A\,dx)\Big)^{-1} = \lim_m \prod_{k=m,\,m-1,\,\ldots,\,1} e^{-(x_k - x_{k-1})\,A(\xi_{k-1})}; \tag{34}$$

wenn wir also für $r > p$ das Produktintegral durch

$$\int_r^p (I + A\,dx) = \lim_m \prod_{k=m,\,m-1,\,\ldots,\,1} (I + (x_{k-1} - x_k)\,A(\xi_{k-1})) \tag{35}$$

definieren, so daß gemäß (18)

$$\int_r^p (I + A\,dx) = \lim_m \prod_{k=m,\,m-1,\,\ldots,\,1} e^{-(x_k - x_{k-1})\,A(\xi_{k-1})}$$

wird, so schreibt sich (34) in der Form

$$\Big(\int_p^r (I + A\,dx)\Big)^{-1} = \int_r^p (I + A\,dx). \tag{36}$$

Hiernach gilt nun die Kompositionsgleichung (14a) auch, wenn $r > s$ ist

Wenn wir in der Matrix A die Spalten zu Zeilen machen, so erhalten wir die transponierte Matrix $\bar{A}$. Aus $AB = C$ folgt offenbar $\bar{B}\bar{A} = \bar{C}$, und es ergibt sich folglich aus (34)

$$Z = \overline{\left(\overset{r}{\underset{p}{\int\!\!\int}}(I + A\,dx)\right)^{-1}} = \lim_{m} \prod_{k=1,2,\ldots,m} e^{-(x_k - x_{k-1})\bar{A}(\xi_{k-1})},$$

und dies ist wieder zufolge von (18) nichts anderes als

$$Z = \overset{r}{\underset{p}{\int\!\!\int}}(I - \bar{A}\,dx).$$

Man nennt die Matrix Z die zu Y *adjungierte*; offenbar ist diese Beziehung zwischen Y und Z eine gegenseitige. An einer Stelle x, wo A stetig ist, gilt für $Z(x)$ die Differentialgleichung

(37) $$D_x Z = -\bar{A} \quad \text{oder} \quad \frac{dZ}{dx} = -Z\bar{A},$$

die auch als die zu (27) adjungierte bezeichnet wird.

VII.

Abschätzungsformeln.

Wir entwickeln jetzt zwei Abschätzungsformeln für das Produktintegral, von denen die erste in gewissem Sinne dem Mittelwertsatze der gewöhnlichen Integralrechnung analog ist.

Aus der Darstellung

$$Y^m = Y^0 \prod_{\nu=1}^{m} \{I + (x_\nu - x_{\nu-1})\, A(\xi_{\nu-1})\}$$

folgt mit Benutzung des Hilfssatzes (I)

(38) $$[Y^m] < [Y^0]\, e^{\sum_{\nu=1}^{m} |x_\nu - x_{\nu-1}|\,[A(\xi_{\nu-1})]}$$

Nun war (Nr. III) vorausgesetzt, daß für die Matrix A

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1})\, S_{\nu-1} = 0$$

sein sollte. Daraus folgt, daß für die Funktion $[A(x)]$ der Limes der Gesamtschwankung ebenfalls gegen Null konvergiert, d. h. daß $[A(x)]$ im Riemannschen Sinne integrierbar ist. Wir finden also, indem wir in der Ungleichung (38) zur Grenze übergehen,

(I) $$\left[Y^0 \overset{x}{\underset{p}{\int\!\!\int}}(I + A\,dx)\right] \leqq [Y^0]\, e^{\left|\int_p^x [A(x)]\,|dx|\right|}$$

(vgl. H. Fuhr, Jahresber. der D. M.-V. 28 (1919), S. 168, Formel (I)).

Es seien nunmehr A und B zwei verschiedene Matrizen, die in dem Intervall $p \ldots q$, wo $p < q$, den Bedingungen der Beschränktheit und des Verschwindens des Limes der Gesamtschwankung genügen. Wir bilden mit denselben Anfangswerten $Y^0 = Z^0$ die beiden Algorithmen

$$Y^\nu - Y^{\nu-1} = (x_\nu - x_{\nu-1})\, Y^{\nu-1} A(\xi_{\nu-1}),$$
$$Z^\nu - Z^{\nu-1} = (x_\nu - x_{\nu-1})\, Z^{\nu-1} B(\xi_{\nu-1}).$$

Dann folgt durch Subtraktion

$$(39) \quad Z^\nu - Y^\nu = (Z^{\nu-1} - Y^{\nu-1}) \cdot \{I + (x_\nu - x_{\nu-1})\, B(\xi_{\nu-1})\} + E_\nu,$$

wo

$$(40) \qquad E_\nu = Y^{\nu-1}(x_\nu - x_{\nu-1})\{B(\xi_{\nu-1}) - A(\xi_{\nu-1})\}$$

ist. Nun ist die Gleichung (39) von der Form (a), wir erhalten also mit Rücksicht auf (b)

$$Z^m - Y^m = \sum_{\nu=1}^{m-1} E_\nu \{I + (x_{\nu+1} - x_\nu)\, B(\xi_\nu)\}\{I + (x_{\nu+2} - x_{\nu+1})\, B(\xi_{\nu+1})\}$$
$$\ldots \{I + (x_m - x_{m-1})\, B(\xi_{m-1})\} + E_m$$

und, wenn wir zu den absoluten Beträgen übergehen,

$$[Z^m - Y^m] < \sum_{\nu=1}^{m-1} [E_\nu]\, e^{\sum_{\lambda=\nu}^{m-1} (x_{\lambda+1} - x_\lambda)[B(\xi_\lambda)]} + [E_m].$$

Nun ist

$$[B] \leqq [B - A] + [A],$$

ferner folgt aus (40)

$$[E_\nu] \leqq [Y^{\nu-1}](x_\nu - x_{\nu-1})[B - A]_{\xi_{\nu-1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

also nach der Ungleichung (7)

$$[E_\nu] < [Y^0]\, e^{\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} (x_\lambda - x_{\lambda-1})[A(\xi_{\lambda-1})]} (x_\nu - x_{\nu-1})[B - A]_{\xi_{\nu-1}}.$$

Es ergibt sich somit

$$[Z^m - Y^m] < \sum_{\nu=1}^{m-1} [Y^0]\, e^{\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} (x_\lambda - x_{\lambda-1})[A(\xi_{\lambda-1})]}$$
$$\times (x_\nu - x_{\nu-1})[B - A]_{\xi_{\nu-1}}\, e^{\sum_{\lambda=\nu+1}^{m} (x_\lambda - x_{\lambda-1})\{[B-A]+[A]\}\xi_{\lambda-1}}$$
$$+ [Y^0]\, e^{\sum_{\lambda=1}^{m-1} (x_\lambda - x_{\lambda-1})[A(\xi_{\lambda-1})]} \cdot (x_m - x_{m-1})[B - A]_{\xi_{m-1}},$$

oder zusammengefaßt

$$[Z^m - Y^m] < \sum_{\nu=1}^{m} [Y^0]\, e^{\sum_{\lambda=1}^{\nu} (x_\lambda - x_{\lambda-1})[A(\xi_{\lambda-1})]} (x_\nu - x_{\nu-1})[B - A]_{\xi_{\nu-1}}$$
$$\times e^{\sum_{\lambda=\nu+1}^{m} (x_\lambda - x_{\lambda-1})[B-A]\xi_{\lambda-1}},$$

wo aber dem $[E_m]$ entsprechend für $\nu = m$ der letzte Faktor gleich Eins zu setzen ist. Fügen wir nun im Exponenten des ersten Faktors unter dem Summenzeichen das fehlende Glied $(x_\nu - x_{\nu-1})[A(\xi_{\nu-1})]$ hinzu, was nur eine Verstärkung der Ungleichung nach sich zieht, so ergibt sich weiter

$$[Z^m - Y^m] < [Y^0]\, e^{\sum_{\lambda=1}^{m}(x_\lambda - x_{\lambda-1})[A(\xi_{\lambda-1})]} \sum_{\nu=1}^{m}(x_\nu - x_{\nu-1})[B-A]_{\xi_{\nu-1}} \times e^{\sum_{\lambda=\nu+1}^{m}(x_\lambda - x_{\lambda-1})[B-A]_{\xi_{\lambda-1}}}.$$

Nun ist

$$(x_\nu - x_{\nu-1})[B-A]_{\xi_{\nu-1}} < e^{(x_\nu - x_{\nu-1})[B-A]_{\xi_{\nu-1}}} - 1,$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{m}(x_\nu - x_{\nu-1})[B-A]_{\xi_{\nu-1}}\, e^{\sum_{\lambda=\nu+1}^{m}(x_\lambda - x_{\lambda-1})[B-A]_{\xi_{\lambda-1}}}$$
$$< \sum_{\nu=1}^{m}(e^{(x_\nu - x_{\nu-1})[B-A]_{\xi_{\nu-1}}} - 1)\, e^{\sum_{\lambda=\nu+1}^{m}(x_\lambda - x_{\lambda-1})[B-A]_{\xi_{\lambda-1}}}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{m}\left\{e^{\sum_{\lambda=\nu}^{m}(x_\lambda - x_{\lambda-1})[B-A]_{\xi_{\lambda-1}}} - e^{\sum_{\lambda=\nu+1}^{m}(x_\lambda - x_{\lambda-1})[B-A]_{\xi_{\lambda-1}}}\right\},$$

und da die zu subtrahierende Exponentialgröße für $\nu = m$ gleich Eins zu nehmen ist, so ist dies weiter gleich

$$e^{\sum_{\lambda=1}^{m}(x_\lambda - x_{\lambda-1})[B-A]_{\xi_{\lambda-1}}} - 1.$$

Wir finden daher schließlich

$$(41) \qquad [Z^m - Y^m] < [Y^0]\, e^{\sum_{\lambda=1}^{m}(x_\lambda - x_{\lambda-1})[A(\xi_{\lambda-1})]} \cdot \left\{e^{\sum_{\lambda=1}^{m}(x_\lambda - x_{\lambda-1})[B-A]_{\xi_{\lambda-1}}} - 1\right\}.$$

Wenn wir in dieser Ungleichung den Grenzübergang $m \to \infty$ vollziehen und beachten, daß ebenso wie $[A]$ auch $[B-A]$ im Riemannschen Sinne integrierbar ist, so erhalten wir für $p \leqq x \leqq q$,

$$Y = Y^0 \int_p^x (I + A\,dx) = \lim_m Y^m; \quad Z = Y^0 \int_p^x (I + B\,dx) = \lim_m Z^m$$

die Ungleichung (vgl. Fuhr, a. a. O. S. 172, Gl. (VI) [7])

$$(III) \qquad [Z - Y] \leqq [Y^0]\, e^{\int_p^x [A]\,dx}\left\{e^{\int_p^x [B-A]\,dx} - 1\right\}.$$

Wir geben noch eine oft brauchbare Modifikation dieser *Approximationsformel*, indem wir an Stelle von Z eine Matrix U treten lassen,

[7]) Eine speziellere Form findet sich auch schon bei Volterra, Fondamenti della teoria delle equazioni diff. lin. I, Napoli 1887, S. 55—57.

von der wir vorerst nur voraussetzen, daß sie sich für $x = p$ auf Y^0 reduziert, und daß sie in dem Intervall $p \dots q$ beschränkt sei. Setzen wir dann $U^\nu = U(\xi_\nu)$, so ergibt sich analog zu der Ungleichung (39)

$$Y^\nu - U^\nu = (Y^{\nu-1} - U^{\nu-1})(I + (x_\nu - x_{\nu-1}) A(\xi_{\nu-1})) + E_\nu,$$
$$E_\nu = U^{\nu-1} - U^\nu + (x_\nu - x_{\nu-1}) U^{\nu-1} A(\xi_{\nu-1}),$$
$$= (x_\nu - x_{\nu-1}) \left\{ U^{\nu-1} A(\xi_{\nu-1}) - \frac{U^\nu - U^{\nu-1}}{x_\nu - x_{\nu-1}} \right\},$$

woraus nach dem wiederholt angewandten Verfahren

$$[Y^m - U^m] \leqq e^{\sum_{\lambda=1}^{m} (x_\lambda - x_{\lambda-1})[A(\xi_{\lambda-1})]} \sum_{\nu=1}^{m} [E_\nu] e^{-\sum_{\lambda=1}^{\nu} (x_\lambda - x_{\lambda-1})[A(\xi_{\lambda-1})]}$$

folgt. Wenn nun die Matrix U differenzierbar vorausgesetzt wird, so daß beim Grenzübergang

$$\lim \frac{E_\nu}{x_\nu - x_{\nu-1}} = \left(UA - \frac{dU}{dx} \right)_{x = \xi_{\nu-1}}$$

ist, so erhalten wir die Ungleichung

$$\text{(IV)} \qquad [Y - U] \leqq e^{\int_p^x [A(x)]\,dx} \int_p^x \left[UA - \frac{dU}{dx} \right] e^{-\int_p^x [A]\,dx}\, dx$$

(vgl. Fuhr, a. a. O. S. 170, Gl. (IV)).

VIII.

Treppenmatrizen. L-integrierbare Matrizen.

In der Gleichung (18) steht unter dem Limeszeichen ein Ausdruck, der aufgefaßt werden kann als das Produktintegral einer für das Intervall $p \dots q$ definierten *Treppenmatrix*, d. h. einer Matrix L, die in jedem der m Teilintervalle $x_{k-1} \dots x_k$ mit einer daselbst konstanten Matrix L_k übereinstimmt. Für eine solche Matrix L ist nämlich nach der Kompositionsformel (14a)

$$\text{(42)} \qquad \int_p^q (I + L\,dx) = \prod_{k=1}^{m} e^{(x_k - x_{k-1}) L_k}.$$

Für eine Treppenmatrix, die ja R-integrierbar ist, gelten natürlich die oben allgemein abgeleiteten Formeln (II) und (III). Jedes Element einer Treppenmatrix ist eine sogenannte Treppenfunktion (fonction simple bei Fr. Riesz, Acta Mathematica 42, S. 191ff.), und zwar haben alle n^2 Elemente von L *in denselben* Intervallen konstante Werte.

Das Produktintegral einer R-integrierbaren Matrix A erscheint in (18) als der Grenzwert der Produktintegrale einer Folge von Treppenmatrizen,

von denen evident ist, daß sie die Matrix A an allen Stetigkeitsstellen des Intervalls $p \dots q$ approximieren. Nun bilden die Unstetigkeitsstellen einer R-integrierbaren Funktion und folglich auch die einer R-integrierbaren Matrix höchstens eine Menge vom Maße Null, es wird also nahegelegt, eine Verallgemeinerung des Produktintegrals einer R-integrierbaren Matrix in der Weise zu versuchen, daß wir eine Matrix A betrachten, die, abgesehen von einer Menge vom Maße Null (fast überall), durch Treppenmatrizen approximiert wird, und das Produktintegral von A als Grenzwert der Produktintegrale über jene Treppenmatrizen definieren[8]). Es entspricht das dem Vorgange, wie Fr. Riesz (a. a. O.) das Lebesguesche Integral einführt.

Es sei $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ eine in dem Intervall $p \dots q$ gleichmäßig beschränkte Folge von Treppenmatrizen, die in diesem Intervall fast überall gegen die Matrix A konvergiert; es sei also

$$[\Phi_\nu] \leqq G, \quad \lim_\nu \Phi_\nu = A.$$

Dann ist fast überall

$$\lim_{\nu \to \infty} (\Phi_{\nu+r} - \Phi_\nu) = 0$$

für jeden positiven ganzzahligen Wert von r. Es sei nun $M_{\nu,r}$ die Menge der Punkte des Intervalles $p \dots q$, für die bei gegebenem positiven ε

$$[\Phi_{\nu+r} - \Phi_\nu] \geqq \varepsilon$$

ist. Bezeichnen wir dann das Lebesguesche Maß der Menge $M_{\nu,r}$ mit $m M_{\nu,r} = l_{\nu r}$, so gilt offenbar

$$\int_p^q [\Phi_{\nu+r} - \Phi_\nu]\, dx < 2 l_{\nu r} G + \varepsilon (q - p).$$

Wir bezeichnen weiter mit M^* eine Menge, die so beschaffen ist, daß für jeden ihrer Punkte und für jede positive ganze Zahl N Mengen $M_{\nu,r}$ mit $\nu \geqq N$ vorhanden sind, die diese Punkte von M^* enthalten. Dann ist, da die Folge der Φ_ν fast überall konvergieren sollte, M^* vom Maße Null. Es folgt also aus dem „Lemme général" von Riesz (a. a. O. S. 195, 196), daß

$$\lim_{\nu \to \infty} l_{\nu r} = 0,$$

also für hinreichend großes ν $\int_p^q [\Phi_{\nu+r} - \Phi_\nu]\, dx$ kleiner als $\varepsilon (q - p)$, d. h.

[8]) Man könnte daran denken, von dem zu einer konstanten Matrix A gehörigen Produktintegral ausgehend zunächst zu dem einer Treppenmatrix aufzusteigen und dann aus solchen durch Grenzübergang das allgemeine Produktintegral aufzubauen. Es zeigt sich aber, daß die auf die Theorie des Produktintegrals bezüglichen Entwicklungen für konstante und für Treppenmatrizen sich nicht erheblich einfacher gestalten als für beliebige R-integrierbare Matrizen.

also beliebig klein wird. Es gilt demnach für

$$\Omega_\nu = Y^0 \int_p^q (I + \Phi_\nu dx),$$

da nach der Approximationsformel (III)

$$[\Omega_{\nu+r} - \Omega_\nu] \leqq [Y^0]\, e^{\int_p^q [\Phi_\nu] dx} \left\{ e^{\int_p^q [\Phi_{\nu+r} - \Phi_\nu] dx} - 1 \right\},$$

also für hinreichend großes ν beliebig klein ist, daß die Folge der $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ nach einem Grenzwert konvergiert. Hat man nun zwei verschiedene Folgen von Treppenmatrizen Φ_ν und Φ'_ν, die fast überall nach der gemeinsamen Grenzmatrix $\lim_\nu \Phi_\nu = \lim_\nu \Phi'_\nu = A$ konvergieren, so folgt, da für hinreichend großes ν fast überall $[\Phi_\nu - \Phi'_\nu] < \varepsilon$ ist, wieder nach der Approximationsformel (III), daß auch für die entsprechenden Produktintegrale $[\Omega_\nu - \Omega'_\nu]$ beliebig klein gemacht werden kann. Hiernach ist also der Grenzwert $\lim \Omega_\nu$ von der Wahl der Treppenfolge unabhängig, so daß wir als Definition setzen können

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_p^q (I + \Phi_\nu\, dx) = \int_p^q (I + A\, dx). \tag{43}$$

Wir sagen nun von der Matrix A, sie sei in dem Intervall $p \ldots q$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar (kurz L-integrierbar), wenn A fast überall als Grenzwert einer gleichmäßig beschränkten Folge von Treppenmatrizen darstellbar ist. Es existiert dann nach Friedrich Riesz für die einzelnen Elemente der Matrix A das Integral $\int_p^q a_{ik}\, dx = \lim_\nu \int_p^q \varphi_{ik}^{(\nu)}\, dx$, und zwar als Integral im Sinne von Lebesgue.

Um den Zusammenhang mit der Lebesgueschen Integrationstheorie herzustellen, bemerken wir das Folgende. Eine beschränkte und meßbare Funktion einer reellen Veränderlichen x ist fast überall als Grenzwert einer gleichmäßig beschränkten Folge von Treppenfunktionen darstellbar. Wenn man sich den Beweis dieses Satzes vergegenwärtigt, wie er z. B. in Schlesinger-Pleßner, Lebesguesche Integrale, § 35, S. 119—123 dargestellt ist, so sieht man, daß für eine Matrix A von n^2 beschränkten und meßbaren Funktionen a_{ik} die Darstellung der a_{ik} als Grenzwerte von Treppenfunktionen $a_{ik} = \lim_\nu l_{ik}^\nu$ so eingerichtet werden kann, daß die n^2 Treppenfunktionen l_{ik}^ν für $i, k = 1, 2, \ldots, n$ immer in denselben Intervallen konstante Werte annehmen, so daß also die Matrix A fast überall als Grenzmatrix einer gleichmäßig beschränkten Folge von Treppenmatrizen erscheint. Die von uns aufgestellte Definition einer L-integrierbaren Matrix deckt sich hiernach mit der einer Matrix, deren Elemente beschränkte und meßbare Funktionen sind. Mit beschränkten Funktionen bzw. Matrizen wollen wir uns hier der Einfachheit wegen be-

gnügen, der Übergang zu nichtbeschränkten L-integrierbaren Funktionen kann dann unschwer etwa nach dem Prinzip von de la Vallée-Poussin (vgl. Schlesinger-Pleßner, a. a. O. S. 86) vollzogen werden. Offenbar sind Summen, Differenzen und Kompositionen von L-integrierbaren Matrizen wieder L-integrierbar und das gleiche gilt für die Inverse einer L-integrierbaren Matrix, sofern nur deren Determinante dem absoluten Betrage nach oberhalb einer angebbaren positiven Schranke bleibt.

Nach Lebesgue gilt nun (vgl. a. a. O. S. 105), daß die Grenzfunktion einer gleichmäßig beschränkten Folge von beschränkten und meßbaren Funktionen, die fast überall konvergiert, ebenfalls beschränkt und meßbar ist und daß ihr Integral als Grenzwert der Integrale jener Funktionenfolge erscheint. Daraus folgt ohne weiteres, daß, wenn eine gleichmäßig beschränkte Folge von L-integrierbaren Matrizen fast überall nach einer Grenzmatrix konvergiert, diese Grenzmatrix ebenfalls L-integrierbar ist. Um aber das Produktintegral der Grenzmatrix darstellen zu können, bedarf es noch einiger vorbereitender Bemerkungen.

IX.

Sätze über das Produktintegral einer L-integrierbaren Matrix.

Wenn die Matrix A L-integrierbar, also fast überall als Grenze $A = \lim_{\nu} \Phi_\nu$ einer gleichmäßig beschränkten Folge von Treppenmatrizen darstellbar ist, so folgt aus dem in der Nummer II bewiesenen Satze, daß auch $[A] = \lim_{\nu} [\Phi_\nu]$. Nun bilden die $[\Phi_\nu]$ offenbar eine gleichmäßig beschränkte Folge von Treppenfunktionen, der absolute Betrag $[A]$ einer L-integrierbaren Matrix A ist also beschränkt und meßbar und nach dem angeführten Lebesgueschen Satze ist

$$\int_p^q [A]\,dx = \lim_{\nu} \int_p^q [\Phi_\nu]\,dx. \tag{44}$$

Ebenso folgt, daß, wenn fast überall $A = \lim_{\nu} A_\nu$ ist, wo die A_ν eine gleichmäßig beschränkte Folge L-integrierbarer Matrizen sind, auch $[A] = \lim_{\nu} [A_\nu]$, so daß also nach dem Lebesgueschen Satze

$$\int_p^q [A]\,dx = \lim_{\nu} \int_p^q [A_\nu]\,dx \tag{45}$$

gilt.

Es sei nun wieder fast überall $A = \lim_{\nu} \Phi_\nu$; dann gilt für jede der Treppenmatrizen Φ_ν die Ungleichung (II), und wenn für eine zweite Folge gleichmäßig beschränkter Treppenmatrizen fast überall $B = \lim_{\nu} \Psi_\nu$ ist, so gilt für die Φ_ν, Ψ_ν auch die Ungleichung (III). Machen wir in den so

für Φ_ν bzw. Φ_ν, Ψ_ν geschriebenen Ungleichungen (II) bzw. (III) den Grenzübergang $\nu \to \infty$, so erhalten wir nach der Definition (43) des Produktintegrals einer L-integrierbaren Matrix und zufolge der Gleichung (44) zwei Ungleichungen, die besagen, daß unsere Ungleichungen (II) und (III) auch für die Produktintegrale L-integrierbarer Matrizen in Geltung bleiben.

Konvergiert nun die gleichmäßig beschränkte Folge L-integrierbarer Matrizen $A_1, A_2, \ldots$ fast überall nach der Grenzmatrix $A = \lim A_\nu$, so gilt nach (III)

$$\left[Y_0 \overset{q}{\underset{p}{\int}} (I + A\,dx) - Y_0 \overset{q}{\underset{p}{\int}} (I + A_\nu\,dx) \right] < [Y_0]\, e^{\int_p^q [A_\nu]\,dx} \left\{ e^{\int_p^q [A - A_\nu]\,dx} - 1 \right\}.$$

Nach dem Lebesgueschen Satze ist aber $\lim_\nu \int_p^q [A - A_\nu]\,dx = 0$, also ist auch

$$\overset{q}{\underset{p}{\int}} (I + A\,dx) = \lim_\nu \overset{q}{\underset{p}{\int}} (I + A_\nu\,dx),$$

d. h. es gilt genau wie für das gewöhnliche Integral beschränkter und meßbarer Funktionen der Satz:

Wenn die gleichmäßig beschränkte Folge L-integrierbarer Matrizen A_ν fast überall nach dem Grenzwert A konvergiert, so ist A selbst L-integrierbar, und das zu A gehörige Produktintegral ist der Grenzwert der zu A_ν gehörigen Produktintegrale.

Da die R-integrierbaren Matrizen jedenfalls auch L-integrierbar sind, so folgt hieraus, daß der vorstehende Satz richtig bleibt, wenn man an die Stelle der L-Integrierbarkeit die R-Integrierbarkeit setzt, vorausgesetzt, daß die Grenzmatrix A der R-integrierbaren Matrizen A_ν selbst R-integrierbar ist. Dafür ist aber bekanntlich (vgl. z. B. Borel, Lecons sur les fonctions de variables réelles, 1905, S. 45, 46) notwendig und hinreichend, daß die Folge A_ν sich im allgemeinen quasiuniform der Grenzmatrix A annähert. Natürlich kann der sich so ergebende Satz auch direkt aus der für die R-integrierbare Matrix geltenden Formel (III) abgeleitet werden (vgl. Fuhr, a. a. O. S. 172).

Wir betrachten eine Menge M, die dem Intervall $p \ldots q$ angehört, und es möge die Matrix A auf M definiert sein. Es bedeute dann A' die Matrix, die auf M mit A übereinstimmt und auf der Komplementärmenge CM von M verschwindet (d. h. daß daselbst ihre sämtlichen Elemente verschwinden). Wenn dann A' im Intervall $p \ldots q$ L-integrierbar ist, so gilt das gleiche natürlich auch für jedes andere die Menge M enthaltende Intervall, und $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\int}} (I + A'dx)$ ist von der Wahl dieses Intervalles unabhängig, da ja $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\int}} (I + 0\,dx) = I$ ist. Wir sagen dann, die Matrix A sei auf M

L-integrierbar und setzen als Definition

$$\overset{\frown}{\int_M}(I+A\,dx)=\overset{\frown}{\int_p^q}(I+A'dx). \tag{46}$$

Daß die Menge M oder genauer jede Teilmenge von M, wo irgendein Element der Matrix A' nicht verschwindet, meßbar ist, folgt daraus, daß jedes Element a'_{ik} von A' eine meßbare Funktion ist, so daß die Mengen, auf denen $a'_{ik} \gtrless 0$ ist, meßbar sind. Insbesondere ist also die Teilmenge von M meßbar, auf der $A \neq 0$ ist, und die Elemente von A sind auf dieser Teilmenge beschränkte und meßbare Funktionen.

Ist M' eine meßbare Teilmenge von M, so ist A auch auf dieser Teilmenge L-integrierbar. Denn sei F' die zu M' gehörige *charakteristische Matrix*, d. h. die Matrix, die in den Punkten von M' gleich I und in den Punkten der Komplementärmenge CM' gleich 0 ist, dann ist AF' L-integrierbar und auf M' mit A identisch. Eine in dem Intervall $p \ldots q$ L-integrierbare Matrix A ist also auch auf jeder meßbaren Teilmenge dieses Intervalles L-integrierbar.

Denken wir uns nun eine in dem Intervall $p \ldots q$ veränderliche meßbare Menge U, so ist für die in diesem Intervall L-integrierbare Matrix A

$$\overset{\frown}{\int_U}(I+A\,dx)=\Phi(U)$$

eine Matrix, deren Elemente auf $p \ldots q$ definierte Mengenfunktionen sind. Mit Rücksicht auf die Gleichung (46) gilt nun die Ungleichung (II) in der Form

$$[Y_0\,\Phi(U)] < [Y_0]\,e^{\int_U [A]\,dx}.$$

Die durch das Integral $\int_U [A]\,dx$ dargestellte Mengenfunktion ist nun bekanntlich (Schlesinger-Pleßner, a. a. O. S. 109) totalstetig, d. h. nach Vorschrift eines beliebig kleinen positiven ε kann man ein positives δ so bestimmen, daß $\int_U [A]\,dx < \varepsilon$ ist für jede Menge U, deren Maß $mU < \delta$ ist. Also hat die Matrix $\Phi(U)$ die Eigenschaft, daß für ein beliebig klein vorgeschriebenes positives η ein positives δ so gefunden werden kann, daß $[\Phi(U) - I] < \eta$ ist, wenn $mU < \delta$. Wir bezeichnen diese Eigenschaft als die *totale Stetigkeit* der von der Menge U abhängenden Matrix $\Phi(U)$.

In seiner ursprünglichen Form $\overset{\frown}{\int_u^v}(I+A\,dx)$, wo $p \leqq u < v \leqq q$ ist, hängt das Produktintegral von dem in $p \ldots q$ veränderlich zu denkenden Intervall $u \ldots v$ ab; seine Elemente sind also Intervallfunktionen (vgl. Schlesinger-Pleßner, a. a. O. S. 123ff.). Man gibt nichts Wesentliches an

Allgemeinheit preis, wenn man bei dieser scheinbar spezielleren Auffassung des Produktintegrals stehen bleibt, statt es als von der veränderlichen Menge U abhängig zu betrachten (vgl. a. a. O. S. 125). — Wir verstehen nun unter der derivierten Matrix von $\overset{v}{\underset{u}{\widehat{\int}}}(I+A\,dz)$ an einer Stelle x des Intervalls $p \dots q$ (wir haben der Deutlichkeit wegen die Integrationsveränderliche mit z bezeichnet) den Grenzwert

$$(47) \qquad \lim_{\zeta-\xi\to 0} \frac{1}{\zeta-\xi}\left\{\overset{\zeta}{\underset{\xi}{\widehat{\int}}}(I+A\,dz)-I\right\} = D_x \overset{v}{\underset{u}{\widehat{\int}}}(I+A\,dz),$$

sofern er existiert, wo $\xi \dots \zeta$ ein den Punkt x in sich fassendes, in $p \dots q$ gelegenes Intervall bedeutet, das sich auf den Punkt x zusammenzieht (vgl. oben die Gleichung (24) für den Fall einer R-integrierbaren Matrix A). Um die Bedingungen festzustellen, unter denen dieser Grenzwert existiert, denken wir uns die Matrix A fast überall als Grenzwert einer gleichmäßig beschränkten Folge von Treppenmatrizen $A = \lim_{\nu} \Phi_\nu$ dargestellt und betrachten die Differenzen

$$(48) \qquad \overset{\zeta}{\underset{\xi}{\widehat{\int}}}(I+\Phi_\nu\,dz) - e^{(\zeta-\xi)\Phi_\nu(x)}.$$

Da $e^{(\zeta-\xi)\Phi_\nu(x)}$ für ein festes x nach der Nr. IV, Gleichung (16) nichts anderes ist als das Produktintegral $\overset{\zeta}{\underset{\xi}{\widehat{\int}}}(I+\Phi_\nu(x)\,dz)$, so können wir die Differenz (48) mit Hilfe der Approximationsformel (III) abschätzen; es ergibt sich, wenn unabhängig von ν $\Phi_\nu < G$,

$$(49) \qquad \left[\overset{\zeta}{\underset{\xi}{\widehat{\int}}}(I+\Phi_\nu\,dz) - e^{(\zeta-\xi)\Phi_\nu(x)}\right] < [I]\, e^{(\zeta-\xi)G}\left\{e^{\int_\xi^\zeta [\Phi_\nu(z)-\Phi_\nu(x)]\,dz} - 1\right\}.$$

Gehen wir hierin zur Grenze über und beachten, daß die Treppenmatrix $\Phi_\nu(z)-\Phi_\nu(x)$ für $\nu\to\infty$ in die L-integrierbare Matrix $A(z)-A(x)$ übergeht, so finden wir

$$\left[\overset{\zeta}{\underset{\xi}{\widehat{\int}}}(I+A\,dz) - e^{(\zeta-\xi)A(x)}\right] < [I]\, e^{(\zeta-\xi)G}\left\{e^{\int_\xi^\zeta [A(z)-A(x)]\,dz} - 1\right\},$$

also, wenn wir die Exponentialgrößen entwickeln und durch $\zeta-\xi$ dividieren:

$$\left[\frac{1}{\zeta-\xi}\left\{\overset{\zeta}{\underset{\xi}{\widehat{\int}}}(I+A\,dz)-I\right\} - A(x) - \frac{\zeta-\xi}{1}\{\dots\}\right]$$
$$< [I]\, e^{(\zeta-\xi)G}\left\{\frac{1}{\zeta-\xi}\int_\xi^\zeta [A(z)-A(x)]\,dz + \dots\right\}$$

Hier können wir nunmehr das Intervall $\zeta - \xi$ sich auf x zusammenziehen lassen. Für die L-integrierbare Funktion $[A(z) - A(x)]$ gilt nach dem Satze von Lebesgue, wonach ein Integral fast überall differenzierbar ist (vgl. Schlesinger-Pleßner, a. a. O. S. 122), fast überall

$$\lim_{\zeta - \xi \to 0} \frac{1}{\zeta - \xi} \int_{\xi}^{\zeta} [A(z) - A(x)]\, dz = [A(x) - A(x)] = 0,$$

Wir erhalten somit fast überall:

$$\lim_{\zeta - \xi \to 0} \frac{1}{\zeta - \xi} \left\{ \overrightarrow{\int_{\xi}^{\zeta}} (I + A\, dz) - I \right\} = A(x),$$

d. h. es gilt der Satz:

Das Produktintegral einer L-integrierbaren Matrix A besitzt fast überall eine derivierte Matrix, und diese stimmt fast überall mit A überein,

d. h. das Produktintegral $\overrightarrow{\int_{u}^{v}} (I + A\, dz)$ *befriedigt fast überall das Differentialsystem*

$$D_x Y = A.$$

(Eingegangen am 10. Oktober 1929.)

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Definitionen und Bezeichnungen.

Es sei stets r ganz, $r \geqq 2$;

$$Q = Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$$

sei stets eine positiv definite quadratische Form[1]) mit der Determinante D die Form Q heiße *rational*, wenn es eine Zahl α gibt, so daß $a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}\alpha$ wo die $b_{\mu\nu}$ ganz sind; sonst heiße Q *irrational*. Wenn die Form Q die Gestalt

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \qquad (\text{also } \alpha_j > 0$$

hat, soll $Q(u)$ eine *Quadratform* heißen. Wenn $x > 0$ (in der Folge wird stets $x > 0$ vorausgesetzt), so sei $A(x) = A_Q(x)$ gleich der Anzahl der Gitterpunkte (d. h. der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten $u_1, u_2, \ldots, u_r$) im abgeschlossenen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$. Das Volumen dieses Ellipsoids ist

$$V(x) = V_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)};$$

es werde noch

$$\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x)$$

gesetzt. Endlich sei

$$R(x) = R_Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |\mathsf{P}_Q(y)|\,dy,$$

$$T(x) = T_Q(x) = \left(\frac{1}{x}\int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\,dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

[1]) Mit sonst beliebigen reellen Koeffizienten $a_{\mu\nu}$.

§ 2.

Einleitung; der Hauptsatz.

Man hat sich in den letzten Jahrzehnten ausführlich mit der Funk-
ion $P(x)$ — hauptsächlich mit ihrer Größenordnung für wachsendes x —
eschäftigt. Insbesondere ist[2])

1) $P(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ für $r = 2$ (Landau 1, 2),

2) $P(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ für $r = 2$ (Landau 4),

3) $P(x) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$ für $r = 3$ (Landau 1, 2),

4) $P(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ für $r = 3$ (Landau 4).

Man ist heute — besonders infolge der grundlegenden Arbeiten des Herrn
andau — imstande, die Formeln (1) bis (4) verhältnismäßig einfach zu
eweisen.

Zwischen (1) und (2) besteht aber noch eine große Lücke; ebenso
wischen (3) und (4). Man hat sich daher bemüht, die Schranken für $P(x)$
och weiter einzuengen. Dabei stößt man aber, besonders bei den O-For-
eln, auf ungeheuere Schwierigkeiten. Durch äußerst schwierige und scharf-
nnige Überlegungen ist es Herrn van der Corput (v. d. Corput 1) gelungen,
u beweisen, daß man in (1) den Exponenten $\frac{1}{3}$ noch ein wenig herab-
rücken kann; insbesondere für den *Kreis* (d. h. $Q(u) = u_1^2 + u_2^2$) lautet
as gegenwärtig schärfste Resultat

$$P(x) = O\left(x^{\frac{27}{82}}\right) \qquad \text{(Nieland 1)},$$

ie Herr Nieland mittels der neuesten van der Corputschen Methode be-
iesen hat. Für den Kreis wurde auch (2) vom Herrn Hardy zu

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x\right) \qquad \text{(Hardy 1)}$$

erschärft. Auch für die *Kugel* (d. h. $Q(u) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$) ist es gelungen,
e Formeln (3), (4) entsprechend zu verschärfen:

$$P(x) = O\left(x^{\frac{43}{58}+\varepsilon}\right) \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0 \qquad \text{(Walfisz 3)},$$

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x\right) \qquad \text{(Szegö 1)}.$$

---

[2]) Die Zitate beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Abhand-
ng; ich strebe dabei keine Vollständigkeit an und gebe meistens zu jedem Resultat
r ein — und zwar nicht immer das historisch erste — Zitat an.

Die Methoden, die zu (1) bis (4) führen, sind für jedes $r \geqq 2$ anwendbar und liefern

$$P(x) = O\left(x^{\frac{r}{2} - \frac{r}{r+1}}\right) \qquad \text{(Landau 1, 2)}, \tag{5}$$

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{r-1}{4}}\right) \qquad \text{(Landau 4)}. \tag{6}$$

Man sieht, was für eine ungeheure Kluft sich zwischen diesen beiden Abschätzungen für große r öffnet!

Nun ist es eine fast triviale Tatsache, daß für jede *rationale* Form Q die Formel

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right) \qquad \text{(Jarník bei Landau 6)} \tag{7}$$

gilt; und für große r ist diese Formel viel schärfer als (6). Es wäre daher natürlich zu glauben, daß die Landausche Formel (6) für große r nur eine recht ungenaue Abschätzung liefert.

Wie man sieht, sind die Formeln (1) bis (6) und auch die für $r = 2, 3$ besprochenen Verschärfungen weit davon entfernt, eine definitive Lösung des Problems zu geben. Es wirkte daher höchst überraschend, als es 1924 Herrn Walfisz gelang (Walfisz 1), das O-Problem für rationale Q mit $r \geqq 8$ vollständig zu lösen. Durch eine geeignete Modifikation seiner Methode konnte dann Herr Landau auch die Fälle $4 \leqq r \leqq 7$ bewältigen (Landau 5). Ihre Resultate lauten: wenn die Form $Q(u)$ rational ist, so ist

$$P(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right) \quad \text{für} \quad r > 4, \tag{8}$$

$$P(x) = O(x \log^2 x) \quad \text{für} \quad r = 4. \tag{9}$$

Ein Vergleich von (8) und (9) mit (7) zeigt, daß für rationale Q die Größenordnung von $P(x)$ für $r > 4$ ganz genau, für $r = 4$ bis auf einen logarithmischen Faktor genau bestimmt ist. Dabei darf man den Faktor $\log^2 x$ in (9) nicht völlig weglassen, da für die vierdimensionale Kugel $\left(Q(u) = \sum_{j=1}^{4} u_j^2\right)$

$$P(x) = \Omega(x \log\log x) \qquad \text{(Walfisz 2)}$$

gilt; man kann freilich noch eine Verkleinerung des Faktors $\log^2 x$ in (9) anstreben, was auch verschiedene Autoren mit Erfolg versuchten.

Der Erfolg, den die Gitterpunktlehre dadurch bei *rationalen* Q mit $r \geqq 4$ verzeichnet hat, hat natürlich die Untersuchung des Einflusses von *irrationalen* Koeffizienten in der Form Q angeregt; in dieser Richtung hat Herr Walfisz (Walfisz 4) den ersten erfolgreichen Schritt getan. Ich habe dann ausführlich die irrationalen Quadratformen untersucht und habe unter anderem bewiesen (Jarník 2): Wenn $r \geqq 4$, so ist für fast alle Quadrat-

formen[3]) und für jedes $\varepsilon > 0$

$$P(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right). \tag{10}$$

Man sieht, wie scharf die anscheinend so ungenaue Landausche Formel (6) ist; vielleicht ist sie sogar völlig scharf (bis auf logarithmische Faktoren?), da die Abschätzung (10) wahrscheinlich noch nicht definitiv ist.

Zu jeder Form Q gibt es eine Zahl $f = f(Q)$, so daß

$$P_Q(x) = O(x^{f+\varepsilon}), \quad P_Q(x) = \Omega(x^{f-\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Für rationale Formen ist nach (2), (4), (7), (8), (9)

$$f = \frac{r}{2} - 1 \text{ für } r > 3, \tag{11}$$

$$f \geqq \frac{1}{2} = \frac{r}{2} - 1 \text{ für } r = 3, \qquad f \geqq \frac{1}{4} > \frac{r}{2} - 1 \text{ für } r = 2.$$

Die Formel (11) ist also für $r > 3$ richtig, für $r = 2$ sicher falsch. Es entsteht also die Frage: Gilt (11) auch noch für $r = 3$ (für rationale Q)?

Zweitens ist nach (10) $f \leqq \frac{r}{4}$ für fast alle Quadratformen, wenn $r \geqq 4$; weil $\frac{r}{4} < \frac{r}{2} - 1$ für $r > 4$, so hängt f für $r > 4$ wesentlich vom arithmetischen Charakter der Koeffizienten der Form Q ab. Also entsteht eine weitere Frage: Hängt f auch für $r = 2, 3, 4$ von den Koeffizienten von Q ab?

Die Beantwortung dieser beiden Fragen scheint ein Problem zu sein, das hoch über den Möglichkeiten der heutigen Mathematik steht. Wir werden uns daher ein einfacheres Problem stellen: Wir bilden die Funktionen $R(x)$, $T(x)$ nach § 1; das sind gewisse Mittelbildungen aus der Funktion $P(x)$, die leichter zu behandeln sind als $P(x)$ selbst; und wir werden folgenden Hauptsatz beweisen:

Hauptsatz. 1. *Es ist*

$$R(x) = \Omega\left(x^{\frac{r-1}{4}}\right),^{4})$$

ja sogar

$$\liminf_{x=\infty} x^{\frac{-r+1}{4}} R(x) > 0.$$

---

[3]) „für fast alle Quadratformen" bedeutet: für alle Quadratformen $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2$ $(\alpha_j > 0)$ bis auf einige Quadratformen, deren Koeffizientensysteme $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ im r-dimensionalen Raume der Punkte $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null bilden.

[4]) Das heißt (weil $R(x) \geqq 0$)

$$\limsup_{x=\infty} x^{\frac{-r+1}{4}} R(x) > 0.$$

2. *Für jede rationale Form $Q(u)$ ist*

$$R(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right),$$

ja sogar

$$\liminf_{x=\infty} x^{-\frac{r}{2}+1} R(x) > 0.$$

3. *Für jede (rationale oder irrationale) Quadratform ist*

$$R(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x\right) \quad \text{für} \quad r = 2,$$

$$R(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x\right) \quad \text{für} \quad r = 3,$$

$$R(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right) \quad \text{für} \quad r > 3.$$

4. *Die Behauptungen* 1., 2., 3. *bleiben richtig, wenn man in ihnen $R(x)$ durch $T(x)$ ersetzt.*

Es sei nun Q eine Quadratform, $f_1 = f_1(Q)$ sei so gewählt, daß

$$R(x) = O(x^{f_1+\varepsilon}), \quad R(x) = \Omega(x^{f_1-\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Dann ist nach dem Hauptsatz $f_1 = \frac{1}{4}$ für $r = 2$, $f_1 = \frac{1}{2}$ für $r = 3$, mag Q rational oder irrational sein. Dagegen gilt für $r > 4$ $f_1 = \frac{r}{2} - 1$ für rationale Q und nach (10) $f_1 \leqq \frac{r}{4} < \frac{r}{2} - 1$ für fast alle Q (da offenbar $f_1 \leqq f$). Also hängt für $r > 4$ die Zahl f_1 sicher von den Koeffizienten von Q ab.

Wenn Q rational, so ist nach dem Hauptsatz $f_1 = \frac{r}{2} - 1$ für $r > 2$, $f_1 = \frac{1}{4} > \frac{r}{2} - 1$ für $r = 2$. Das sind also die Beiträge, die der Hauptsatz zur Beantwortung der beiden aufgestellten Fragen liefert; ich bemerke aber noch einmal ausdrücklich, daß der Hauptsatz nicht $\mathsf{P}(x)$ selbst, sondern die beiden leichter zu behandelnden Funktionen $R(x)$, $T(x)$ betrifft.

Auch der Fall $r = 4$ verdient Beachtung; für jede Quadratform ist, wenn $r = 4$

$$R(x) = O(x), \quad T(x) = O(x);$$

der logarithmische Faktor aus (9) ist also verschwunden.

Im Spezialfall des Kreises ($Q(u) = u_1^2 + u_2^2$) ist bereits viel mehr bekannt, als

$$T(x) = O\left(x^{\frac{1}{4}} \log^2 x\right), \text{ d. h. als } \int_0^x \mathsf{P}^2(y)\, dy = O\left(x^{\frac{3}{4}} \log^4 x\right),$$

nämlich

$$\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\, dy = \gamma x^{\frac{3}{4}} + O(x \log^3 x) \quad \text{(Walfisz 2, etwas schwächer bereits bei Landau 3)}$$

wo $\gamma > 0$ eine absolute Konstante ist.

Aus der Schwarzschen Ungleichung

$$R(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |P(y)|\,dy \leqq \frac{1}{x}\cdot\left(\int_0^x dy \int_0^x P^2(y)\,dy\right)^{\frac{1}{2}} = T(x)$$

folgt, daß es genügt, die O-Abschätzungen des Hauptsatzes für $T(x)$ (d. h. die entsprechenden Abschätzungen für $\int_0^x P^2(y)\,dy$), die Ω-Abschätzungen für $R(x)$ (d. h. die entsprechenden Abschätzungen für $\int_0^x |P(y)|\,dy$) zu beweisen. Übrigens ist für jede Quadratform, wenn $r > 4$,

$$P(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right) \qquad \text{(Jarník 3)},$$

also auch

$$T(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right),$$

so daß es genügt, die folgenden Sätze zu beweisen.

Satz 1. *Es sei Q eine Quadratform; dann ist*

$$\int_0^x P^2(y)\,dy = O\left(x^{\frac{5}{2}}\log^4 x\right) \quad \textit{für } r = 2,$$

$$\int_0^x P^2(y)\,dy = O\left(x^2\log^2 x\right) \quad \textit{für } r = 3,$$

$$\int_0^x P^2(y)\,dy = O\left(x^3\right) \qquad \textit{für } r = 4.$$

Satz 2.
$$\liminf_{x=\infty} x^{\frac{-r-3}{4}} \int_0^x \max\left(0, P(y)\right) dy > 0,$$

$$\liminf_{x=\infty} x^{\frac{-r-3}{4}} \int_0^x \max\left(0, -P(y)\right) dy > 0.$$

Dies ist sogar etwas mehr als wir brauchen, da z. B. $\max(0, P(y)) \leqq |P(y)|$.

Satz 3. *Wenn Q rational, so ist*

$$\liminf_{x=\infty} x^{-\frac{r}{2}} \int_0^x |P(y)|\,dy > 0.$$

Satz 1, in welchem die Hauptschwierigkeit liegt, wird mit einer Methode bewiesen, die an Jarník 2, 3 erinnert. Der Beweis vom Satz 2 bietet methodisch kaum etwas Neues; er ist nur eine Modifikation des Landauschen Beweises von (6), und auch diese Modifikation habe ich schon einmal (Jarník 1; damals nur für $r = 2$, dafür aber nicht nur für Ellipsen, sondern für viel allgemeinere Gebiete) ausgeführt. Satz 3 ist trivial.

§ 3.

Beweis des Satzes 1.

Es sei $\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 s}$; diese Reihe konvergiert absolut für $\Re(s) > 0$.

In diesem ganzen Paragraphen sei eine Quadratform

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \qquad (\alpha_j > 0,\ r \geqq 2$$

fest gegeben. Es seien $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ diejenigen Zahlen, die sich in der Gestalt

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j m_j^2 \qquad (m_j \text{ ganz}$$

darstellen lassen; a_n sei die Anzahl derartiger Darstellungen der Zahl λ_n. Dann ist offenbar

$$A(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n, \qquad \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

für $\Re(s) > 0$. Nach einem Satz vom Herrn Perron über Dirichletsche Reihen ist also für jedes $x > 0$, welches keinem λ_n gleich ist, und für jedes $a > 0$

$$A(x) = A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) \frac{e^{xs}}{s}\, ds.$$

Dazu schreiben wir noch die bekannte Formel auf[5])

$$V(x) = V_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{2\pi i \sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}}{s^{\frac{r}{2}+1}}\, ds.$$

Daher ist $\left(a = \frac{1}{x} \text{ gewählt}\right)$

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\, dy \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^x dy \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right) \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots} \right. \\ &\qquad \times \frac{e^{y(s+s')}}{s\, s'}\, ds\, ds' \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right) \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s'} \right. \\ &\qquad \times \frac{e^{x(s+s')} - 1}{s\, s'(s+s')}\, ds\, ds', \end{aligned} \right.$$

[5]) Alle vorkommenden Quadratwurzeln sind mit positivem Realteil zu nehmen.

wenn man im mittleren Glied von (12) die Integrationsfolge vertauschen darf. Statt diese Vertauschbarkeit nachzuweisen, beweisen wir (12) durch direktes Ausrechnen. Es ist

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy &= \int_0^x \left(\sum_{\lambda_n \leqq y} a_n - \frac{\pi^{\frac{r}{2}} y^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right)^2 dy \\ &= \sum_{\lambda_n \leqq x} \sum_{\lambda_m \leqq x} a_n a_m (x - \max(\lambda_n, \lambda_m)) \\ &\quad - 2\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n \frac{\pi^{\frac{r}{2}}\left(x^{\frac{r}{2}+1} - \lambda_n^{\frac{r}{2}+1}\right)}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+2\right)} + \frac{\pi^r}{\alpha_1 \dots \alpha_r} \cdot \frac{x^{r+1}}{(r+1)\left(\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\right)^2}.\end{aligned}\right.$$

Im letzten Glied in (12) ist $\left(s = \frac{1}{x} + ti,\ t \text{ reell}\right)$

$$\theta(\alpha_j s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \alpha_j s}; \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| e^{-n^2 \alpha_j s} \right| = \theta\left(\alpha_j \frac{1}{x}\right);$$

weiter sind die Funktionen $\frac{1}{s^{\frac{r}{2}}}$, e^{xs} bei festem $x > 0$ für $\Re(s) = \frac{1}{x}$ beschränkt; wenn wir also noch zeigen, daß das Integral

$$\beta = \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \left| \frac{ds\,ds'}{s\,s'(s+s')} \right|$$

konvergiert, dürfen wir die Integration der unendlichen Reihen im letzten Glied von (12) gliedweise ausführen, und zwar in beliebiger Reihenfolge. Und in der Tat ist ($c(x)$ bedeute eine nur von x abhängige positive Zahl)

$$c(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt\,dt'}{(1+|t|)(1+|t'|)(1+|t+t'|)} < 4\,c(x) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dt\,dt'}{(1+t)(1+t')(1+|t-t'|)}$$

$$= 8\,c(x) \int_0^\infty dt \int_0^t \frac{dt'}{(1+t)(1+t')(1+t-t')} = 16\,c(x) \int_0^\infty \frac{\log(1+t)}{(1+t)(2+t)}\,dt,$$

also ist das Integral β konvergent. Wir schreiben nun im letzten Glied von (12)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \text{ bzw. } \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s'} \text{ für } \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) \text{ bzw. } \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s')$$

und integrieren gliedweise; wenn wir den Residuensatz und die bekannte Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}}{s^{b+1}}\,ds = \frac{x^b}{\Gamma(b+1)} \quad (b > 0,\ a > 0,\ x \geqq 0)$$

benutzen, bekommen wir für die einzelnen Glieder (die Integrationsgrenzen $\frac{1}{x}-i\infty$, $\frac{1}{x}+i\infty$ schreibe ich nicht auf):

$$-\frac{1}{4\pi^2}\iint\frac{e^{-\lambda_n s}e^{-\lambda_m s'}(e^{x(s+s')}-1)}{ss'(s+s')}\,ds\,ds'=\begin{cases}0 & \text{für } x<\max(\lambda_n,\lambda_m)\\ x-\max(\lambda_n,\lambda_m) & \text{für } x\geqq\max(\lambda_n,\lambda_m)\end{cases}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_r}}\iint\frac{e^{-\lambda_n s}(e^{x(s+s')}-1)}{ss'^{\frac{r}{2}+1}(s+s')}\,ds\,ds'$$

$$=\begin{cases}0 & \text{für } x<\lambda_n\\ -\frac{1}{2\pi i}\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_r}}\int\frac{e^{xs'}-e^{\lambda_n s'}}{s'^{\frac{r}{2}+2}}\,ds'=-\frac{\pi^{\frac{r}{2}}\left(x^{\frac{r}{2}+1}-\lambda_n^{\frac{r}{2}+1}\right)}{\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+2\right)} & \text{für } x\geqq\lambda_n\end{cases}$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\frac{\pi^r}{\alpha_1\dots\alpha_r}\iint\frac{e^{x(s+s')}-1}{s^{\frac{r}{2}+1}s'^{\frac{r}{2}+1}}\cdot\frac{ds\,ds'}{s+s'}$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}\frac{\pi^r}{\alpha_1\dots\alpha_r}\int_0^x dy\iint\frac{e^{y(s+s')}}{s^{\frac{r}{2}+1}s'^{\frac{r}{2}+1}}\,ds\,ds'$$

$$=\frac{\pi^r}{\alpha_1\dots\alpha_r}\int_0^x\frac{y^r}{\left(\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\right)^2}dy=\frac{\pi^r x^{r+1}}{\alpha_1\dots\alpha_r(r+1)\,\Gamma^2\left(\frac{r}{2}+1\right)}.$$

Durch Summation bekommt man aber sofort die rechte Seite von (13); damit ist (12) bewiesen.

Im Rest dieses Paragraphen sei stets $x>1$. Mit c bezeichnen wir unterschiedslos positive Zahlen, die nur von r, $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ abhängen. Eine Zahl $\frac{h}{k}$ nenne ich eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt, wenn $h\geqq 0$, $0<k\leqq\sqrt{x}$, $(h,k)=1$. Ein für allemal bemerke ich: Wenn ich einen Bruch $\frac{h}{k}$ aufschreibe und ihn eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt nenne, verstehe ich darunter, daß der Bruch schon in seiner reduzierten Gestalt aufgeschrieben ist, d. h. daß $h\geqq 0$, $0<k\leqq\sqrt{x}$, $(h,k)=1$. Zwei Fareypunkte (und ebenso später zwei Medianten) heißen benachbart, wenn zwischen ihnen kein Fareypunkt (bzw. keine Mediante) liegt. Dabei bezeichne ich als Medianten alle Zahlen $\frac{h+\bar{h}}{k+\bar{k}}$, wo $\frac{h}{k}$, $\frac{\bar{h}}{\bar{k}}$ zwei benachbarte Fareypunkte sind. Wenn $\frac{h}{k}$ ein Fareypunkt mit $h>0$ ist, so sei $\mathfrak{B}_{h,k}$ dasjenige linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, welches

den Punkt $\frac{h}{k}$ enthält und zu Endpunkten zwei benachbarte Medianten hat. Wenn $I = (a, b)$ ein Intervall ist und $\delta > 0$, so bedeute δI das Intervall $(\delta a, \delta b)$. Es sei

$$A = \max_{1 \leqq j \leqq r} \frac{2\pi}{\alpha_j}.$$

Die kleinste Mediante ist $\frac{0+1}{1+[\sqrt{x}]} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Wenn also bei festem j $(1 \leqq j \leqq r)$ die Zahl $\frac{h}{k}$ alle Fareypunkte mit $h > 0$ durchläuft, so überdeckt die Vereinigungsmenge der Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j} \mathfrak{B}_{h,k}$ sicher das ganze Intervall $\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\theta'}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{\theta''}{k\sqrt{x}} \right), \tag{14}$$

wo $\frac{1}{2} \leqq \theta' \leqq 1$, $\frac{1}{2} \leqq \theta'' \leqq 1$.

Folgende Bemerkungen werden wir oft brauchen:

I. Für $0 \leqq t \leqq \frac{2A}{\sqrt{x}}$, $s = \frac{1}{x} + ti$, $x > c$ ist

$$\left| \frac{\theta(\alpha_1 s)\,\theta(\alpha_2 s) \ldots \theta(\alpha_r s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}}{s} \right| < c x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Denn es ist

$$\theta(\alpha_j s) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}(1 + \psi_j(s)), \text{ wo } \psi_j(s) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi}{\alpha_j s}};$$

für unsere s ist aber

$$\Re\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{x}{1 + x^2 t^2} > c, \text{ also } |\psi_j(s)| < c e^{-\frac{\pi x}{\alpha_j (1+t^2 x^2)}},$$

also

$$\theta(\alpha_1 s) \ldots \theta(\alpha_r s) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} (1 + \chi(s)), \text{ wo } |\chi(s)| < c e^{-\frac{cx}{1+x^2 t^2}}.$$

Die Funktion von t

$$\frac{e^{-\frac{cx}{1+t^2 x^2}}}{|s|^{\frac{r}{2}+1}} = x^{\frac{r}{2}+1} \frac{e^{-\frac{cx}{1+t^2 x^2}}}{(1+t^2 x^2)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}}$$

nimmt aber für $x > c$ im Intervall $0 \leqq t < \infty$ ihr Maximum für $1 + t^2 x^2 = cx$ an, wie man leicht nachrechnet; dieses Maximum ist also kleiner als $c x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}$.

II. Es sei $s = \frac{1}{x} + ti$, wo t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt, $x > c$; dann ist ($a = 1$ für $r = 2$, $a = 0$ sonst):

$$c\frac{h}{k} < t < c\frac{h}{k}, \tag{16}$$

$$\int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{\theta^r(\alpha_j s)}{s}\right| dt < c\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{hk^{\frac{r}{2}-1}}\log^a x, \tag{17}$$

$$\int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{1}{s^{\frac{r}{2}+1}}\right| dt < c\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{hk^{\frac{r}{2}-1}}\log^a x. \tag{18}$$

Beweis: Nach (14) ist

$$\left|t - \frac{2\pi h}{\alpha_j k}\right| < \frac{c}{k\sqrt{x}},$$

also gilt (16). Zweitens ist [6])

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}};$$

also (wegen (16))

$$\int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{\theta^r(\alpha_j s)}{s}\right| dt < \frac{c}{k^{\frac{r}{2}-1}h} \int_{-\frac{c}{k\sqrt{x}}}^{\frac{c}{k\sqrt{x}}} \frac{du}{\left(\frac{1}{x^2}+u^2\right)^{\frac{r}{4}}}$$

$$= c\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}-1}h} \int_{-\frac{c\sqrt{x}}{k}}^{\frac{c\sqrt{x}}{k}} \frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{r}{4}}} < c\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}-1}h}\log^a x \qquad \left(u = t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k},\ v = xu\right).$$

Drittens ist nach (14), (16) und wegen $|s| > t$

$$\int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{1}{s^{\frac{r}{2}+1}}\right| dt < c\frac{k^{\frac{r}{2}+1}}{h^{\frac{r}{2}+1}} \cdot \frac{c}{k\sqrt{x}};$$

wegen $h \geqq 1$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$ folgt daraus (18).

Nach (12) ist, wenn wir $s = \frac{1}{x} + ti$, $s' = \frac{1}{x} + t'i$ setzen und bedenken, daß sich der Betrag des letzten Integranden nicht ändert, wenn wir das Wertepaar t, t' durch $-t$, $-t'$ ersetzen,

---

[6]) Jarník 2, S. 708, Formel (13).

$$\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy \leqq \frac{2(e^2+1)}{4\pi^2}\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_r}\,s^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s|}$$

$$\times \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_r}\,s'^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s'|}\cdot\frac{dt'}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+(t+t')^2}}$$

$$= \frac{2(e^2+1)}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_r}\,s^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s|}\cdot\frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_r}\,s'^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s'|}$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+(t+t')^2}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+(t-t')^2}}\right)dt\,dt'.$$

Also genügt es offenbar, wenn wir dieselbe O-Abschätzung, die wir für

$$\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy$$

beweisen wollen, für das Integral

$$J=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_r}\,s^{\frac{r}{2}}}\right|\cdot\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_r}\,s'^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s\,s'|\,\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)}\,dt\,dt'$$

beweisen. Daher genügt es auch, wenn wir dieselbe Abschätzung für die folgenden Integrale K, L, M beweisen (der nicht aufgeschriebene Integrand ist derselbe wie bei J):

$$K=\int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}}\dots dt', \qquad L=\int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} dt \int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\dots dt'=\int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} dt \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}}\dots dt',$$

$$M=\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} dt \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty}\dots dt'.\ ^{7})$$

Im Rest dieses Paragraphen sei $2 \leqq r \leqq 4$.

---

[7]) Die etwas künstliche Wahl der Integrationsgrenzen (an einigen Stellen $\frac{A}{\sqrt{x}}$, an anderen $\frac{2A}{\sqrt{x}}$) wurde absichtlich getroffen, damit die Schwierigkeiten, die sich in der Nähe der Geraden $t=t'$ zeigen, auf möglichst wenigen Stellen auftreten.

Abschätzung von K.

Nach (15) ist für $x > c$

$$K < c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \frac{dt\,dt'}{\frac{1}{x}+|t-t'|} = 2c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int_0^{t} \frac{dt'}{\frac{1}{x}+t-t'}$$

$$= 2c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \log(1+xt)\,dt = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log x\right);$$

dies ist sogar mehr als die gewünschte Abschätzung.

Abschätzung von L.

Wenn $n \geqq 1$, $a_j \geqq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, so ist

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n). \tag{19}$$

Also ist

$$\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}} \right| \leqq \sum_{j=1}^{r} |\theta^r(\alpha_j s')| + \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}} \frac{1}{|s'^{\frac{r}{2}}|};$$

wenn wir noch bedenken: erstens, daß für $0 \leqq t \leqq \frac{A}{\sqrt{x}}$, $t' \geqq \frac{2A}{\sqrt{x}}$ gilt $\frac{1}{\frac{1}{x}+|t-t'|} < \frac{2}{t'}$; zweitens, daß die Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ das Intervall $\left(\frac{2A}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$ überdecken; drittens, daß $t' > c\frac{h}{k}$, wenn t' in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt (alles für $x > c$), sehen wir, daß es genügt, wenn wir für die folgenden Integrale L_j $(0 \leqq j \leqq r$, j ganz) die gewünschte Abschätzung beweisen:

$$L_0 = \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right|}{|s|} dt \int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt'}{|s'^{\frac{r}{2}+1}|\, t'};$$

$$L_j = \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right|}{|s|} dt \cdot \sum_{h,k} \frac{k}{h} \int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \frac{|\theta^r(\alpha_j s')|}{|s'|} dt' \quad \text{für } 1 \leqq j \leqq r.$$

Nun ist nach (15)

$$L_0 < c\,x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} dt \int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt'}{t'^{\frac{r}{2}+2}} = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\right)$$

und nach (15), (17) ist für $1 \leqq j \leqq r$

$$L_j < c\,x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} dt \sum_{\substack{h>0 \\ 0<k\leqq\sqrt{x}}} \frac{k}{h} \cdot \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{h\,k^{\frac{r}{2}-1}} \log x = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log x\right);$$

das ist wieder mehr als die gewünschte Abschätzung.

Abschätzung von M.

Wir sollen folgende Integrale abschätzen:

(20)
$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s)\,\theta(\alpha_j s') \right|}{|s\,s'|\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} dt\,dt',$$

(21)
$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) \right|}{\left|s\,s'^{\frac{r}{2}+1}\right|\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} dt\,dt'$$

das Integral, welches aus (21) durch Vertauschen von s und s' entsteht, brauchen wir aus Symmetriegründen nicht mehr zu beachten),

(22)
$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt\,dt'}{\left|s^{\frac{r}{2}+1}\,s'^{\frac{r}{2}+1}\right|\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)}.$$

In (22) ersetzen wir $|s|$ durch t, $|s'|$ durch t' und sehen, daß (22) für $> c$ kleiner ist als $\left(\text{es ist } t-\frac{1}{x} > \frac{t}{2} \text{ für } t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}},\ x > c\right)$

$$c\,x \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{r}{2}+1}} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{t} \frac{dt'}{t'^{\frac{r}{2}+1}(1+x(t-t'))}$$

$$< c\,x \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{r}{2}+1}} \left(\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, \frac{t}{2}\right)} \frac{dt'}{t'^{\frac{r}{2}+1} x\,t} + \int\limits_{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, \frac{t}{2}\right)}^{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, t-\frac{1}{x}\right)} \frac{dt'}{t^{\frac{r}{2}+1} x(t-t')} + \int\limits_{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, t-\frac{1}{x}\right)}^{t} \frac{dt'}{t^{\frac{r}{2}+1}} \right)$$

$$< c\,x \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{r}{2}+1}} \left(x^{\frac{r}{4}-1} \cdot \frac{1}{t} + \frac{\log t\,x}{x\,t^{\frac{r}{2}+1}} + \frac{1}{x\,t^{\frac{r}{2}+1}} \right) = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log x \right),$$

und das ist wieder mehr als die gewünschte Abschätzung.

Wenn wir auf (20), (21) die Formel (19) anwenden, sehen wir, daß es genügt, für die $2r$ Integrale

$$M_{j,1} = \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{|\theta^r(\alpha_j s)\theta^r(\alpha_j s')|}{|s s'|} \frac{dt\,dt'}{\frac{1}{x}+|t-t'|},$$

$$M_{j,2} = \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \left| \frac{\theta^r(\alpha_j s)}{s\,s'^{\frac{r}{2}+1}} \right| \frac{dt\,dt}{\frac{1}{x}+|t-t'|}$$

$(j = 1, 2, \ldots, r)$ die gewünschte Abschätzung zu beweisen. Wir verkleinern diese Integrale nicht, wenn wir statt

$$\int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} dt \int\limits_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \ldots dt' \quad \text{schreiben} \quad \sum_{\substack{h,k \\ h',k'}} \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} dt \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}} \ldots dt'.$$

In jedem Glied dieser vierfachen Reihe ersetzen wir im Integranden den Faktor $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+|t-t'|}$ durch die sicher nicht kleinere Zahl

$$\lambda(h,k,h',k') = \min\left(x, \frac{1}{\min|t-t'|}\right), \tag{23}$$

wobei $\min|t-t'|$ die untere Grenze von $|t-t'|$ bedeutet, wenn t das Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$, t' das Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}$ durchläuft; $\min\left(x, \frac{1}{0}\right)$ be

deute x. Wenn wir dann in jedem Glied

$$\lambda(h,k,h',k') \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} dt \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}} \frac{|\theta^r(\alpha_j s)\theta^r(\alpha_j s')|}{|s s'|}\, dt'$$

bzw.

$$\lambda(h,k,h',k') \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} dt \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}} \frac{|\theta^r(\alpha_j s)|}{\left|s\, s'^{\frac{r}{2}+1}\right|}\, dt'$$

das Integral nach (17), (18) abschätzen, bekommen wir ($a=1$ für $r=2$, $a=0$ sonst)

(24) $$M_{j,i} < c\, x^{r-2} \log^{2a} x \cdot S \qquad (j=1,2,\ldots,r;\ i=1,2;\ x>c),$$

wo

$$S = \sum \frac{1}{k^{\frac{r}{2}-1} h} \cdot \frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-1} h'} \lambda(h,k,h',k');$$

dabei wird über alle ganzen h, k, h', k' summiert, welche die Ungleichungen $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $h > 0$, $(h,k)=1$, $0 < k' \leqq \sqrt{x}$, $h' > 0$, $(h',k')=1$, $k' \geqq k$ erfüllen (die letzte Einschränkung ist aus Symmetriegründen erlaubt). Es ist

$$S = S_1 + S_2,$$

wo in S_1 alle Glieder mit $\frac{h}{k} = \frac{h'}{k'}$, in S_2 alle übrigen Glieder von S zusammengefaßt sind.

Abschätzung von S_1.

Aus $\frac{h}{k} = \frac{h'}{k'}$ folgt $h = h'$, $k = k'$, also ist wegen $\lambda(h,k,h',k') \leqq x$

$$S_1 < c\, x \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{0<k\leqq\sqrt{x}} \frac{1}{k^{r-2} h^2};$$

also

$$S_1 = O\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \text{ für } r=2, \quad S_1 = O(x \log x) \text{ für } r=3, \quad S_1 = O(x) \text{ für } r=4.$$

Abschätzung von S_2.

Es ist

$$S_2 = S_{2,1} + S_{2,2} + S_{2,3}.$$

Dabei sind in $S_{2,1}$ diejenigen Glieder von S_2 enthalten, für welche

(25) $$\min|t-t'| < \frac{\pi}{\alpha_j} \frac{|h k' - h' k|}{k k'}$$

ist (dabei bedeutet $\min|t-t'|$, wie in (23), die untere Grenze von $|t-t'|$, wenn t das Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$, t' das Intervall $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h',k'}$ durchläuft); die übrigen Glieder von S_2 sind in $S_{2,2}$ enthalten, wenn $hk'-h'k>0$ und in $S_{2,3}$, wenn $hk'-h'k<0$.

Abschätzung von $S_{2,1}$.

Es ist (alles für $x>c$)

$$\left|\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}-\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h'}{k'}\right|=\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{|hk'-h'k|}{kk'}.$$

Die Länge von $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ ist kleiner als $\frac{c}{k\sqrt{x}}$. Wenn also (25) gelten soll, muß

$$\frac{c}{k\sqrt{x}}+\frac{c}{k'\sqrt{x}}>\frac{\pi}{\alpha_j}\frac{|hk'-h'k|}{kk'}$$

sein; wegen $k'\geqq k$ muß also

$$\frac{c}{k\sqrt{x}}>\frac{|hk'-h'k|}{kk'},$$

also

$$k'>c\sqrt{x}, \tag{26}$$

$$|hk'-h'k|<c. \tag{27}$$

Wenn der Fareypunkt $\frac{h}{k}$ gegeben ist, gibt es also für k' höchstens c Möglichkeiten modulo k; denn wegen (27) muß $hk'\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)$ sein, wo $|l|<c$. Also gibt es überhaupt höchstens $c\frac{\sqrt{x}}{k}$ Möglichkeiten für k'. Wenn weiter h, k, k' bereits gegeben sind, gibt es nach (27) höchstens c Möglichkeiten für h', und zwar ist nach (26), (27)

$$h'>\frac{hk'}{k}-\frac{c}{k}>c\frac{h\sqrt{x}}{k}.$$

Also ist (wegen $\lambda(h,k,h',k')\leqq x$)

$$S_{2,1}<cx\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{0<k\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{k^{\frac{r}{2}-1}h}\cdot\frac{\sqrt{x}}{k}\cdot\frac{1}{x^{\frac{r}{4}-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{k}{h\sqrt{x}}.$$

Also

$$S_{2,1}=O(x^{\frac{3}{2}})\ \text{ für }\ r=2;\qquad S_{2,1}=O(x)\ \text{ für }\ r=3;$$

$$S_{2,1}=O(x^{\frac{1}{2}}\log x)\ \text{ für }\ r=4.$$

Abschätzung von $S_{2,2}$.

In den Gliedern von $S_{2,2}$ ist, da (25) nicht gilt,

$$\lambda(h,k,h',k') < c\frac{kk'}{|hk'-h'k|}. \tag{28}$$

Wir setzen

$$hk'-h'k = s+\tau k, \tag{29}$$

wo $\tau \geqq 0$ ganz, $0 < s \leqq k$. Wenn h, k, s gegeben sind, so ist k' durch die Bedingung $hk' \equiv s \pmod k$ eindeutig modulo k bestimmt. Wenn k' irgendwie so gewählt ist, daß $hk' \equiv s \pmod k$ und wenn noch dazu τ gegeben ist, so ist h' durch (29) bestimmt, und zwar ist $h' = \frac{1}{k}(hk' - s - \tau k)$. Da in $S_{2,2}$ stets $h' \geqq 1$, muß $hk' - s - \tau k \geqq k$ sein. Also ist wegen (28), (29)

$$S_{2,2} < c\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{0<k\leqq\sqrt{x}}\sum_{s=1}^{k}\sum_{k'}\sum_{\tau}\frac{1}{k^{\frac{r}{2}-2}}\cdot\frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-2}}\cdot\frac{1}{h}\cdot\frac{k}{hk'-s-\tau k}\cdot\frac{1}{s+\tau k}.$$

Dabei ist bei gegebenen h, k, s die Zahl k' modulo k bestimmt und durch $k \leqq k' \leqq \sqrt{x}$ beschränkt; die ganze Zahl $\tau \geqq 0$ ist bei gegebenen h, k, s, k' durch $hk' - s - \tau k \geqq k$ beschränkt. Also ist

$$\sum_{\tau}\frac{1}{hk'-s-\tau k}\cdot\frac{1}{s+\tau k} < c\frac{1}{hk'}\sum_{s+\tau k\leqq\frac{hk'}{2}}\frac{1}{s+\tau k}$$

$$+c\frac{1}{hk'}\sum_{\frac{hk'}{2}<s+\tau k\leqq hk'-k}\frac{1}{hk'-s-\tau k} < \frac{c}{hk's}\sum_{0\leqq\tau<\frac{hk'}{k}}\frac{1}{1+\tau\frac{k}{s}}$$

$$+\frac{c}{hk'}\sum_{1\leqq u<\frac{hk'}{2k}}\frac{1}{uk} < \frac{c}{hk's}\log(2hk')$$

(man beachte, daß $s \leqq k$ und daß $u = \frac{1}{k}(hk' - s - \tau k)$ ganz ist). Also ist weiter für $x > c$

$$\sum_{k'}\sum_{\tau}\frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-2}}\cdot\frac{1}{hk'-s-\tau k}\cdot\frac{1}{s+\tau k}$$

$$< \frac{c}{hs}\sum_{k'}\frac{\log(2hk')}{k'^{\frac{r}{2}-1}} < \frac{c}{hs}\log(hx)\sum_{0<n\leqq\frac{\sqrt{x}}{k}}\frac{1}{(nk)^{\frac{r}{2}-1}}$$

$$< \frac{c}{hs}\log(hx)\frac{1}{k^{\frac{r}{2}-1}}\left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r}{2}-2}\log^b x,$$

wo $b = 1$ für $r = 4$, $b = 0$ für $r = 2, 3$. Daher ist für $x > c$

$$S_{2,2} < cx^{1-\frac{r}{4}}\log^b x\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{0<k\leqq\sqrt{x}}\sum_{s=1}^{k}\frac{\log h+\log x}{k^{\frac{r}{2}-2}h^2 s} < cx^{1-\frac{r}{4}}\log^{2+b}x\sum_{0<k\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{k^{\frac{r}{2}-2}}.$$

Also ist

$$S_{2,2} = O\left(x^{\frac{3}{4}} \log^2 x\right) \text{ für } r = 2, \quad S_{2,2} = O(x \log^2 x) \text{ für } r = 3,$$
$$S_{2,2} = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^3 x\right) \text{ für } r = 4.$$

Abschätzung von $S_{2,3}$.

In den Gliedern von $S_{2,3}$ gilt wieder (28), da (25) nicht gilt. Wir setzen

$$h'k - hk' = s + \tau k, \tag{30}$$

wo $\tau \geqq 0$ ganz, $0 < s \leqq k$. Wenn h, k, s gegeben sind, so ist k' durch die Bedingung $hk' \equiv -s \pmod{k}$ eindeutig modulo k bestimmt. Es sei k' irgendwie so bestimmt; wenn dazu noch τ gegeben ist, so gibt es genau ein h', welches (30) erfüllt; und zwar ist $h' = \frac{1}{k}(hk' + s + \tau k)$. Also ist wegen (28), (30)

$$S_{2,3} < c \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{0<k\leqq\sqrt{x}} \sum_{s=1}^{k} \sum_{k'} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{r}{2}-2}} \cdot \frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-2}} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{k}{hk' + s + \tau k} \cdot \frac{1}{s + \tau k}.$$

Dabei ist bei gegebenen h, k, s die Zahl k' modulo k bestimmt und durch $k \leqq k' \leqq \sqrt{x}$ eingeschränkt. Es ist

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{1}{hk' + s + \tau k} \cdot \frac{1}{s + \tau k} < \frac{c}{hk's} \sum_{0 \leqq \tau \leqq \frac{2hk'}{k}} \frac{1}{1 + \tau \frac{k}{s}} + \frac{c}{k^2} \sum_{\tau > \frac{2hk'}{k}} \frac{1}{\tau^2} < \frac{c}{hk's} \log(2hk')$$

Dieselbe Abschätzung haben wir bei $S_{2,2}$ bekommen. Weiter geht alles buchstäblich wie bei $S_{2,2}$, so daß die für $S_{2,2}$ bewiesene Abschätzung auch für $S_{2,3}$ gilt.

Definitive Abschätzung von $M_{j,i}$.

Es ist $S = S_1 + S_{2,1} + S_{2,2} + S_{2,3}$, also

$$S = O(x^{\frac{3}{4}} \log^2 x) \text{ für } r = 2, \quad S = O(x \log^2 x) \text{ für } r = 3,$$
$$S = O(x) \text{ für } r = 4.$$

Wegen (24) ist also

$$M_{j,i} = O\left(x^{\frac{3}{4}} \log^4 x\right) \text{ für } r = 2,$$
$$M_{j,i} = O(x^2 \log^2 x) \text{ für } r = 3,$$
$$M_{j,i} = O(x^3) \text{ für } r = 4.$$

Damit ist aber Satz 1 bewiesen.

§ 4.

Beweis des Satzes 2.

Es werde für $x > 0$

$$(31) \qquad A_0(x) = A(x), \quad \mathsf{P}_0(x) = \mathsf{P}(x), \quad A_\varrho(x) = \int_0^x A_{\varrho-1}(y)\,dy,$$

$$\mathsf{P}_\varrho(x) = \int_0^x \mathsf{P}_{\varrho-1}(y)\,dy \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt. Offenbar ist

$$A_\varrho(x) = -\frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}+\varrho}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+\varrho+1\right)} + \mathsf{P}_\varrho(x).$$

Es seien $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ diejenigen Zahlen, die sich durch die Form $Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ mit ganzen u_μ darstellen lassen; es sei a_n die Anzahl derartiger Darstellungen der Zahl λ_n. Dann ist[8])

$$\mathsf{P}_\varrho(x) = A_\varrho(x) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}+\varrho}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+\varrho+1\right)} = \frac{x^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r}{4}}}{\pi^\varrho \sqrt{D}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r}{4}}} J_{\varrho+\frac{r}{2}}\left(2\pi\sqrt{\lambda_n x}\right),$$

wenn $\varrho > \frac{r}{2}$. Für die Besselsche Funktion $J_\nu(z)$ gilt bekanntlich für $z \to +\infty$

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(z - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{z}} + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^w}$ konvergiert bekanntlich für $w > \frac{r}{2}$; wenn wir also $d_\varrho = \frac{\varrho}{2} + \frac{r}{4} + \frac{1}{4}$ setzen, bekommen wir für $\varrho > \frac{r}{2}$

$$(32) \qquad \mathsf{P}_\varrho(x) = \frac{x^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r-1}{4}}}{\pi^{\varrho+1}\sqrt{D}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r+1}{4}}} \cos\pi\left(2\sqrt{\lambda_n x} - d_\varrho\right) + O\left(x^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r-3}{4}}\right).$$

---

[8]) Vgl. z. B. Landau (2), S. 452, Formel (6). Dazu ist folgendes zu bemerken: In unserem Fall sind die Landauschen Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_r, z_1, z_2, \ldots, z_r$ gleich Null, also $\mu = \gamma = \delta = \alpha_n = 1$. Weiter ist bei Herrn Landau $B_0(x) = A_0(x) - 1$ (da der Punkt $[0, 0, \ldots, 0]$ nicht mitgezählt wird), $B_\varrho(x) = \int_0^x B_{\varrho-1}(y)\,dy$; also $B_\varrho(x) = A_\varrho(x) - \frac{x^\varrho}{\varrho!}$. Endlich schreibt Herr Landau jedes λ_n a_n-mal auf, so daß bei ihm die a_n nicht auftreten; sein k heißt bei uns r.

Wir bezeichnen nun mit c_ϱ unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $r, a_{\mu\nu}, \varrho$ abhängen. Aus bekannten Eigenschaften Dirichletscher Reihen ergibt sich, daß für $\varrho > c$ die Ungleichung

$$\frac{a_1}{\lambda_1^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r+1}{4}}} > 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n^{\frac{\varrho}{2}+\frac{r+1}{4}}} \tag{33}$$

gilt. Es sei ϱ irgendeine ganze Zahl $> \frac{r}{2}$, für welche (33) gilt; es sei für jedes ganze $g > 0$

$$x_{1,\varrho}(g) = \frac{1}{\lambda_1}\left(g + \frac{d_\varrho}{2}\right)^2, \quad x_{2,\varrho}(g) = \frac{1}{\lambda_1}\left(g + \frac{d_\varrho}{2} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$\left(\text{also } \cos\pi\left(2\sqrt{\lambda_1 x_{i,\varrho}(g)} - d_\varrho\right) = (-1)^{i+1} \text{ für } i = 1, 2\right)$. Dann ist erstens

$$x_{1,\varrho}(g) < x_{2,\varrho}(g) < x_{1,\varrho}(g+1); \quad x_{i,\varrho}(g) = \frac{g^2}{\lambda_1} + O(g) \quad (i = 1, 2); \tag{34}$$

zweitens ist wegen (32), (33) für $g > c_\varrho$

$$\mathsf{P}_\varrho(x_{1,\varrho}(g)) > c_\varrho g^{\varrho+\frac{r-1}{2}}, \quad \mathsf{P}_\varrho(x_{2,\varrho}(g)) < -c_\varrho g^{\varrho+\frac{r-1}{2}}; \tag{35}$$

drittens ist (wegen (31), (35))

$$\int_{x_{2,\varrho}(g)}^{x_{1,\varrho}(g+1)} \mathsf{P}_{\varrho-1}(y)\,dy > c_\varrho g^{\varrho+\frac{r-1}{2}}, \quad \int_{x_{1,\varrho}(g)}^{x_{2,\varrho}(g)} \mathsf{P}_{\varrho-1}(y)\,dy < -c_\varrho g^{\varrho+\frac{r-1}{2}}. \tag{36}$$

Wir behaupten nun: für jedes ganze $\varrho \geqq 1$ gibt es zu jedem ganzen $g > c_\varrho$ zwei Zahlen $x_{1,\varrho}(g)$, $x_{2,\varrho}(g)$, die (34), (35), (36) erfüllen. Diese Behauptung ist für $\varrho > c$ richtig, also genügt die Induktion von ϱ auf $\varrho - 1$. Es sei also für ein ganzes $\varrho > 1$ und für jedes ganze $g > c_\varrho$ (34), (35), (36) erfüllt. Da die Längen der Integrationsintervalle in (36) $O(g)$ sind, gibt es sicher für jedes ganze $g > c_{\varrho-1}$ zwei Zahlen $x_{2,\varrho-1}(g)$, $x_{1,\varrho-1}(g+1)$, so daß

$$\begin{gathered}\mathsf{P}_{\varrho-1}(x_{1,\varrho-1}(g+1)) > c_{\varrho-1} g^{\varrho-1+\frac{r-1}{2}}, \\ \mathsf{P}_{\varrho-1}(x_{2,\varrho-1}(g)) < -c_{\varrho-1} g^{\varrho-1+\frac{r-1}{2}}, \\ x_{1,\varrho}(g) < x_{2,\varrho-1}(g) < x_{2,\varrho}(g) < x_{1,\varrho-1}(g+1) < x_{1,\varrho}(g+1);\end{gathered} \tag{37}$$

also wegen (34)

$$x_{1,\varrho-1}(g) < x_{2,\varrho-1}(g) < x_{1,\varrho-1}(g+1); \quad x_{i,\varrho-1}(g) = \frac{g^2}{\lambda_1} + O(g) \quad (i = 1, 2);$$

aus (37) folgt aber

$$\int_{x_{2,\varrho-1}(g)}^{x_{1,\varrho-1}(g+1)} \mathsf{P}_{\varrho-2}(y)\,dy > c_{\varrho-1} g^{\varrho-1+\frac{r-1}{2}}, \quad \int_{x_{1,\varrho-1}(g)}^{x_{2,\varrho-1}(g)} \mathsf{P}_{\varrho-2}(y)\,dy < -c_{\varrho-1} g^{\varrho-1+\frac{r-1}{2}}.$$

Damit ist aber die Behauptung durch Induktion bewiesen. Für $\varrho = 1$ angewandt, ergibt sie für $x > c$:

$$\int_0^x \max(0, \mathsf{P}(y))\,dy \geqq \sum_{x_{1,1}(g+1) \leqq x} \int_{x_{2,1}(g)}^{x_{1,1}(g+1)} \mathsf{P}_0(y)\,dy > c \sum_{g < c\sqrt{x}} g^{1+\frac{r-1}{2}} > c x^{\frac{r+3}{4}};$$

$$\int_0^x \max(0, -\mathsf{P}(y))\,dy \geqq \sum_{x_{2,1}(g) \leqq x} - \int_{x_{1,1}(g)}^{x_{2,1}(g)} \mathsf{P}_0(y)\,dy > c \sum_{g < c\sqrt{x}} g^{1+\frac{r-1}{2}} > c x^{\frac{r+3}{4}}.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

§ 5.

Beweis des Satzes 3.

Es sei $Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ eine rationale Form, also $a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}\alpha$, wo $\alpha > 0$ und die $b_{\mu\nu}$ ganz sind. Es sei $n > 0$ ganz; für $\alpha n < x < \alpha(n+1)$ ist offenbar $A(x) = A(\alpha n)$, also

$$\mathsf{P}(x) = A(\alpha n) - \gamma x^{\frac{r}{2}}, \quad \text{wo} \quad \gamma = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)},$$

also

$$\frac{d\mathsf{P}(x)}{dx} = -\frac{r}{2}\gamma x^{\frac{r}{2}-1} \leqq -\frac{r}{2}\gamma(\alpha n)^{\frac{r}{2}-1}.$$

Diejenigen x-Werte, welche den Ungleichungen

$$\alpha n < x < \alpha(n+1), \qquad |\mathsf{P}(x)| < \frac{r\gamma\alpha}{8}(\alpha n)^{\frac{r}{2}-1}$$

genügen, füllen daher höchstens ein Intervall aus, dessen Länge höchstens $\frac{\alpha}{2}$ ist; also ist

$$\int_{\alpha n}^{\alpha(n+1)} |\mathsf{P}(y)|\,dy \geqq \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{r\gamma\alpha}{8}(\alpha n)^{\frac{r}{2}-1};$$

daher ist

$$\liminf_{x=\infty} x^{-\frac{r}{2}} \int_0^x |\mathsf{P}(y)|\,dy > 0,$$

w. z. b. w.

Literatur.

J. G. van der Corput: (1) Neue zahlentheoretische Abschätzungen, Math. Annalen 89 (1923), S. 215–254.

G. H. Hardy: (1) On Dirichlet's divisor problem, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 15 (1916), S. 1–25.

V. Jarník: (1) Sur les points à coordonnées entières dans le plan, Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1924, S. 1—12.

(2) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Annalen 10 (1928), S. 699—721.

(3) Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions, Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1928, S. 1—10.

E. Landau: (1) Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid), Berliner Akademieberichte 1915, S. 458—476.

(2) Über eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Formen, Wiener Akademieberichte **124** (1915), S. 445—468.

(3) Über die Gitterpunkte in einem Kreise, Vierte Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1923, S. 58—65.

(4) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Vierte Abhandlung, Göttinger Nachrichten 1924, S. 137—150.

(5) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 126—132.

(6) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Zweite Abhandlung, Math. Zeitschr. **24** (1926), S. 299—310.

L. W. Nieland: (1) Zum Kreisproblem, Math. Annalen **98** (1928), S. 717—736.

G. Szegö: (1) Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. II. Zahlentheoretische Anwendungen. Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 388—404.

A. Walfisz: (1) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 300—307.

(2) Teilerprobleme, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 66—88.

(3) Über zwei Gitterpunktprobleme, Math. Annalen **95** (1926), S. 69—83.

(4) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Dritte Abhandlung, Math. Zeitschr. **27** (1928), S. 245—268.

Prag, den 2. Februar 1930.

(Eingegangen am 6. Februar 1930.)

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre.

Zweite Abhandlung[1]).

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Definitionen und Bezeichnungen[2]).

Es sei stets r ganz, $r \geqq 2$;

$$Q = Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

sei stets eine positiv definite Form[3]) mit der Determinante D; die Form Q heiße *rational*, wenn es eine Zahl α gibt, so daß $a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}\alpha$, wo die $b_{\mu\nu}$ ganz sind; sonst heiße Q *irrational*. Wenn die Form Q die Gestalt

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \qquad (\alpha_j > 0)$$

hat, soll $Q(u)$ eine *Quadratform* heißen.

Wenn $x > 0$ (in der Folge wird stets $x > 0$ vorausgesetzt), so sei $A(x) = A_Q(x)$ gleich der Anzahl der Gitterpunkte (d. h. der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten $u_1, u_2, \ldots, u_r$) im abgeschlossenen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$. Das Volumen dieses Ellipsoides ist

$$V(x) = V_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)};$$

es werde noch

$$P(x) = P_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x)$$

---

[1]) Die erste gleichbetitelte Abhandlung ist in Math. Zeitschrift **33** (1931), S. 62 erschienen; sie wird weiter als I zitiert.

[2]) Wörtlich wie in I.

[3]) Mit sonst beliebigen reellen Koeffizienten.

gesetzt. Weiter sei

$$R(x) = R_Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |P_Q(y)|\,dy,$$

$$T(x) = T_Q(x) = \left(\frac{1}{x}\int_0^x P_Q^2(y)\,dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

§ 2.

Einleitung; der Hauptsatz.

Die Funktion $P(x)$ — insbesondere ihre Größenordnung für wachsendes x — ist in neuerer Zeit Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen[4]). Die dabei erreichten Resultate sind aber nur in einigen Fällen definitiv und die bisher noch nicht erledigten Fälle scheinen so schwierig zu sein, daß es vielleicht nicht unangemessen ist, wenn man sich ein verwandtes, aber einfacheres Problem aufstellt und versucht, über diese einfachere Frage eine bessere Übersicht zu gewinnen. Dies ist das Ziel dieser Note.

Ich betrachte nämlich nicht die Funktion $P(x)$ selbst, sondern die beiden im § 1 eingeführten und leichter zugänglichen Funktionen $R(x)$, $T(x)$; dies sind gewisse Mittelbildungen aus $P(x)$. Weiter werde ich mich ausschließlich auf Quadratformen beschränken. Das Ziel dieser Note ist folgender

Hauptsatz. *Es sei*

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \qquad (\alpha_j > 0,\ r \geqq 2).$$

1. *Dann ist für* $r > 3$

$$R_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r-1}{4}}\right), \qquad R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

2. *Wenn* Q *rational ist, so ist für* $r > 3$

$$R_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

3. *Dagegen ist für fast alle*[5]) r*-dimensionalen* $Q(u)$, *wenn* $r > 3$,

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r-1}{4}} \log^{\frac{3+3r}{2}} x\right).$$

---

[4]) Näheres darüber in I, § 2.

[5]) Die Behauptung 3 ist folgendermaßen zu verstehen: Wenn $r > 3$, so gibt es im r-dimensionalen Raume der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ eine Menge $N = N_r$ vom Lebesgueschen Maße Null, die folgende Eigenschaft besitzt: wenn $Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2$ $(\alpha_j > 0)$ und wenn der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ nicht in N_r liegt, so ist

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r-1}{4}} \log^{\frac{3+3r}{2}} x\right).$$

4. *Für $r = 3$ ist für alle Quadratformen*

$$R_Q(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}}), \qquad R_Q(x) = O(x^{\frac{1}{4}} \log x).^{6})$$

5. *Für $r = 2$ ist für alle Quadratformen*

$$R_Q(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}}), \qquad R_Q(x) = O(x^{\frac{1}{4}} \log^2 x).^{7})$$

6. *Alle diese Resultate bleiben richtig, wenn man in ihnen $R_Q(x)$ durch $T_Q(x)$ ersetzt.*

Man sieht, daß diese Resultate, wenn man von logarithmischen Faktoren absieht, einen definitiven Charakter tragen; sie geben auch eine ziemlich vollständige[8]) Übersicht über die Abhängigkeit der Größenordnung der Funktionen $R_Q(x)$ und $T_Q(x)$ einerseits von der Dimension r, andererseits vom arithmetischen Charakter der Koeffizienten α_j; z. B. sieht man, daß der Einfluß der α_j, der sich für $r = 2, 3$ — wenn überhaupt — höchstens in einem *logarithmischen* Faktor äußert, für $r > 3$ sogar den *Exponenten* wesentlich beeinflußt.

Nun habe ich in I schon einen beträchtlichen Teil der Behauptungen des neuen Hauptsatzes bewiesen; in dem damaligen Hauptsatz sind nämlich die Behauptungen 1, 2, 4, 5 und die entsprechenden Behauptungen für $T_Q(x)$ (ja sogar etwas mehr) enthalten. Es genügt daher, wenn wir die Behauptung 3 und die entsprechende Behauptung für $T_Q(x)$ beweisen. Da aber (Schwarzsche Ungleichung)

$$R(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \mathsf{P}(y)\, dy \leqq \frac{1}{x}\left(\int_0^x dy \int_0^x \mathsf{P}^2(y)\, dy\right)^{\frac{1}{2}} = T(x),$$

genügt es, die Behauptung 3 nur für $T(x)$ (statt $R(x)$) zu beweisen. Es genügt uns also vollständig, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1. *Wenn $r > 3$, so ist für fast alle r-dimensionalen Quadratformen Q*

$$\int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\, dy = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log^{3+3r} x\right).$$

Der Beweis ist eine Kombination der Beweismethode des Satzes 1 aus I mit einer älteren Methode von mir[9]). Er ist freilich inhaltlich

---

[6]) Man beachte $\frac{1}{2} = \frac{r}{2} - 1 = \frac{r-1}{4}$.

[7]) Man beachte $\frac{1}{4} = \frac{r-1}{4} > \frac{r}{2} - 1$.

[8]) „vollständig" allerdings nur cum grano salis; denn ein Teil der Behauptungen bezieht sich bloß auf „fast alle" Quadratformen.

[9]) V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Mathematische Annalen **100** (1928), S. 699—721.

meistens komplizierter als der erwähnte Beweis in I; dagegen aber an einer Stelle ist er sogar einfacher. Dies kommt davon, daß ich in dem vorliegenden Beweis recht verschwenderisch mit den Logarithmuspotenzen umgehe[10]), wogegen ich in I Wert darauf legte, die heutige Behauptung 1 des Hauptsatzes *ohne* logarithmische Faktoren zu beweisen.

§ 3.

Beweis des Satzes 1.

Es sei $\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 s}$; diese Reihe konvergiert absolut für $\Re(s) > 0$.

Es sei $Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2$ $(\alpha_j > 0,\ r > 3)$, $x > 0$; dann ist[11])

$$(1)\qquad \int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\,dy = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right) \times \left(\prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}} \right) \frac{e^{x(s+s')} - 1}{s\,s'\,(s+s')}\,ds\,ds'.$$

Dies ist die Formel (12) aus I, deren Beweis dort unabhängig vom übrigen Text lesbar ist.

Im Rest dieses Paragraphen sei nun stets $x > 1$. Mit c bezeichnen wir unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $r, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ abhängen. Eine Zahl $\frac{h}{k}$ nenne ich eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt, wenn $h \geqq 0,\ 0 < k \leqq \sqrt{x},\ (h,k) = 1$. Ein für allemal bemerke ich: wenn ich einen Bruch $\frac{h}{k}$ aufschreibe und ihn eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt nenne, verstehe ich darunter, daß der Bruch schon in seiner reduzierten Gestalt aufgeschrieben ist, d. h. daß $h \geqq 0,\ 0 < k \leqq \sqrt{x},\ (h,k) = 1$. Zwei Fareypunkte (und ebenso später zwei Medianten) heißen benachbart, wenn zwischen ihnen kein Fareypunkt (bzw. keine Mediante) liegt. Dabei bezeichne ich als Medianten alle Zahlen $\frac{h+\bar{h}}{k+\bar{k}}$, wo $\frac{h}{k}, \frac{\bar{h}}{\bar{k}}$ zwei benachbarte Fareypunkte sind. Wenn $\frac{h}{k}$ ein Fareypunkt mit $h > 0$ ist, so sei $\mathfrak{B}_{h,k}$ dasjenige linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, welches den

---

[10]) Der sachkundige Leser wird selbst erkennen, an welchen Stellen eine Erniedrigung der Logarithmuspotenz ohne weiteres möglich wäre.

[11]) Alle vorkommenden Quadratwurzeln sind mit positivem Realteil zu nehmen.

unkt $\frac{h}{k}$ enthält und zu Endpunkten zwei benachbarte Medianten hat. Venn $J=\langle a, b)$ und $\delta>0$, so bedeute δJ das Intervall $\langle \delta a, \delta b)$. s sei $A=\max_{1\leqq j\leqq r}\frac{2\pi}{\alpha_j}$. Die kleinste Mediante ist $\frac{0+1}{1+[\sqrt{x}]}<\frac{1}{\sqrt{x}}$; wenn also ei festem j $(1\leqq j\leqq r)$ die Zahl $\frac{h}{k}$ alle Fareyzahlen mit $h>0$ durchuft, so überdeckt die Vereinigungsmenge der Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ sicher das anze Intervall $\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$. Bekanntlich ist

2) $$\mathfrak{B}_{h,k}=\left\langle \frac{h}{k}-\frac{\theta'}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k}+\frac{\theta''}{k\sqrt{x}}\right),$$

o $\frac{1}{2}\leqq\theta'\leqq 1$, $\frac{1}{2}\leqq\theta''\leqq 1$.

Folgende Bemerkungen werden wir oft brauchen:

I. Für $0\leqq t\leqq\frac{2A}{\sqrt{x}}$, $x>c$, $s=\frac{1}{x}+ti$ ist

3) $$\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s)-\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_r}\,s^{\frac{r}{2}}}\right|<c x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}.$$

enn es ist

$$\theta(\alpha_j s)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}(1+\psi_j(s)),\quad \text{wo}\quad \psi_j(s)=2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\frac{\pi}{\alpha_j s}};$$

ir unsere s ist aber $\Re\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{x}{1+x^2t^2}>c$, also

$$|\psi_j(s)|<c e^{-\frac{\pi x}{\alpha_j(1+x^2t^2)}},$$

so

$$\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s)=\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\dots\alpha_r}\,s^{\frac{r}{2}}}(1+\chi(s)),\quad \text{wo}\quad |\chi(s)|<c e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}.$$

Die Funktion von t

$$\frac{e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}}{|s|^{\frac{r}{2}+1}}=x^{\frac{r}{2}+1}\frac{e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}}{(1+x^2t^2)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}}$$

mmt aber für $x>c$ im Intervall $0\leqq t<+\infty$ ihr Maximum für $+x^2t^2=cx$ an, wie man leicht nachrechnet; dieses Maximum ist also einer als $cx^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}$.

II. Es sei $s = \frac{1}{x} + ti$, wo t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt, $x > c$. Dann ist

$$c\frac{h}{k} < t < c\frac{h}{k}, \tag{4}$$

$$|\theta(\alpha_j s)| < c\sqrt{\frac{x}{k}}, \tag{5}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{s}}\right| < c\sqrt{\frac{x}{k}}. \tag{6}$$

Beweis. Nach (2) ist $\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j k\sqrt{x}}$, also gilt (4). (5) folg aus der Formel (vgl. die Formel (13) aus der unter [9]) angeführten Ab handlung)

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}};$$

(6) ist wahr, da aus (4) und aus $0 < k \leqq \sqrt{x}$ folgt

$$\left|\frac{1}{\sqrt{s}}\right| < \frac{1}{\sqrt{t}} < c\sqrt{\frac{k}{h}} < c\sqrt{k} < c\sqrt{\frac{x}{k}}.$$

Betrachten wir nun das Integral rechts in (1); der Faktor [12])

$$\frac{\left(\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}\right)\left(\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}}\right)}{s \cdot s'}$$

ändert seinen Betrag nicht, wenn man t durch $-t$ oder t' durch $-t$ ersetzt; weiter ist

$$|e^{x(s+s')} - 1| \leqq e^2 + 1, \qquad \frac{1}{|s+s'|} < \frac{c}{\frac{1}{x} + \big||t| - |t'|\big|}.$$

Also ist

$$\int_0^c \mathsf{P}_Q^2(y)\,dy < cJ,$$

wo

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}\right| \cdot \left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}}\right|}{|s \cdot s'|\left(\frac{1}{x} + |t - t'|\right)}\,dt\,dt'.$$

Um also eine O-Abschätzung für $\int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\,dy$ zu beweisen, genügt es, die selbe Abschätzung für J nachzuweisen; oder es genügt auch, dieselbe Ab

[12]) Im folgenden sei stets $s = \frac{1}{x} + ti$, $s' = \frac{1}{x} + t'i$ (t, t' reell).

chätzung für die folgenden Integrale K, L, M zu beweisen:

$$= \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \dots dt'; \quad L = \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} dt \int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \dots dt' = \int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} dt \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \dots dt'; \quad M = \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} dt \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \dots dt'$$

(der Integrand ist derselbe wie in J).

Wir werden nun folgenden Hilfssatz brauchen:

Hilfssatz[13]). *Es sei* $0 < C < D$, $a > 0$, r *ganz*, $r > 1$. *Dann ibt es im Würfel* W:

$$C \leqq \gamma_j \leqq D \qquad (j = 1, 2, \dots, r)$$

es r*-dimensionalen Raumes der Punkte* $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$ *eine Punktmenge* (C, D, a) *vom Lebesgueschen Maß Null und von folgender Beschaffenheit*:

Zu jedem Punkt $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$ *von* $W - N(C, D, a)$ *gibt es eine ositive Zahl*

$$\varrho_0 = \varrho_0(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r, a),$$

daß für jedes System von nichtnegativen ganzen Zahlen

$$l; \quad m_1, m_2, \dots, m_r; \quad n_2, n_3, \dots, n_r; \quad \varrho$$

it $\varrho > \varrho_0$ *die Ungleichungen*

$$\left| \frac{h_1}{k_1} \gamma_1 - \frac{h_j}{k_j} \gamma_j \right| < \frac{a}{2^{n_j} k_j 2^{\varrho}} \qquad (j = 2, 3, \dots, r),$$

$^l \leqq h_1 < 2^{l+1}$, $2^{m_1} \leqq k_1 < 2^{m_1+1}$, $2^{m_2} \leqq k_2 < 2^{m_2+1}, \dots, 2^{m_r} \leqq k_r < 2^{m_r+1}$

öchstens

$$\mathfrak{M} = \left((\varrho + 1)(l + 1) \prod_{j=1}^{r} (m_j + 1) \prod_{j=2}^{r} (n_j + 1) \right)^2 \frac{2^l 2^{m_1 + m_2 + \dots + m_r}}{2^{n_2 + n_3 + \dots + n_r} 2^{(r-1)\varrho}}$$

ösungen *in ganzen* h_j, k_j $(j = 1, 2, \dots, r)$ *besitzen.*

Es sei nun $i_1, i_2, \dots, i_r$ irgendeine Permutation der Ziffern $1, 2, \dots, r$; it $N_{i_1, i_2, \dots, i_r}(C, D, a)$ bezeichnen wir diejenige Punktmenge, welche der unkt $(\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_r})$ durchläuft, wenn der Punkt $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$ die enge $N(C, D, a) = N_{1, 2, \dots, r}(C, D, a)$ durchläuft. Die Vereinigungsenge dieser $r!$ Mengen $N_{i_1, i_2, \dots, i_r}(C, D, a)$ heiße $N^*(C, D, a)$. Offenbar $N^*(C, D, a)$ auch eine Nullmenge[14]).

Um den Satz 1 zu beweisen, genügt es — da die Vereinigungsmenge on abzählbar vielen Nullmengen wieder eine Nullmenge ist — zu zeigen: u jedem $\bar{C}, \bar{D}$ mit $0 < \bar{C} < \bar{D}$ gibt es im r-dimensionalen Raume der

[13]) Dies ist der Hilfssatz 5 aus der unter [9]) zitierten Abhandlung, S. 711, dessen weis dort unabhängig vom übrigen Text lesbar ist. Das dortige σ heißt jetzt r.

[14]) Statt „Menge vom Lebesgueschen Maß Null" sagen wir im folgenden auch ullmenge".

Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ eine Nullmenge $\overline{N}(\overline{C}, \overline{D})$, so daß für jeden Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ des Würfels W:

$$\overline{C} \leqq \alpha_j \leqq \overline{D} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

der nicht in $\overline{N}(\overline{C}, \overline{D})$ liegt, die Abschätzungen gelten:

$$K = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log^{3+3r} x\right), \tag{7}$$

$$L = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log^{3+3r} x\right), \tag{8}$$

$$M = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log^{3+3r} x\right). \tag{9}$$

Wir setzen nun im Hilfssatz $C = \frac{1}{\overline{D}}$, $D = \frac{1}{\overline{C}}$, $a = \frac{3}{\overline{C}}$; mit $\overline{N}(\overline{C}, \overline{D})$ bezeichnen wir die Menge, die der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ durchläuft, wenn der Punkt $\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_r}\right)$ die Menge

$$N^*(C, D, a) = N^*\left(\frac{1}{\overline{D}}, \frac{1}{\overline{C}}, \frac{3}{\overline{C}}\right)$$

durchläuft. Offenbar ist $\overline{N}(\overline{C}, \overline{D})$ eine Nullmenge [15]). Im Rest dieser Abhandlung sei nun $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ ein beliebig aber fest gewählter Punkt aus $\overline{W} - \overline{N}(\overline{C}, \overline{D})$; und wir werden für ihn die Abschätzungen (7), (8), (9) beweisen. Damit wird Satz 1 bewiesen sein.

Abschätzung von K.

Es ist

$$K = \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right| \cdot \left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}} \right|}{|s| \cdot |s'| \cdot \left(\frac{1}{x} + |t - t'|\right)} dt'.$$

Nach (3) ist für $x > c$

$$K < c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \frac{dt'}{\frac{1}{x} + |t - t'|} = 2c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} dt \int_0^{t} \frac{dt'}{\frac{1}{x} + t - t'}$$

$$= 2c x^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{\frac{2A}{\sqrt{x}}} \log(1 + xt)\, dt = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log x\right);$$

damit ist (7) bewiesen.

---

[15]) $\overline{N}(\overline{C}, \overline{D})$ hat offenbar folgende Symmetrieeigenschaft: Wenn der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ zu $\overline{N}(\overline{C}, \overline{D})$ gehört und wenn $i_1, i_2, \ldots, i_r$ irgendeine Permutation der Ziffern $1, 2, \ldots, r$ ist, so gehört auch der Punkt $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r})$ zu $\overline{N}(\overline{C}, \overline{D})$.

Abschätzung von L und M.

Es ist (man beachte, daß für $0 \leqq t' \leqq \frac{A}{\sqrt{x}}$, $t \geqq \frac{2A}{\sqrt{x}}$ gilt $\frac{1}{|s|} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}+|t-t'|} < \frac{2}{t^2}$) nach (3) für $x > c$

$$L = \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}} \right|}{|s'|} dt' \int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right|}{|s| \left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} dt$$

$$< c x^{\frac{r}{4}} \int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) \right| + \frac{1}{|s|^{\frac{r}{2}}}}{t^2} dt.$$

ur Abschätzung von M benutzen wir die für $n > 0$, $a_j \geqq 0$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ ültige Formel $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ und bekommen — enn wir noch die Symmetrie des Integranden ausnutzen —

$$M = \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}} \right| \cdot \left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s') - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_r}\, s'^{\frac{r}{2}}} \right|}{|s| \cdot |s'| \left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} dt\, dt'$$

$$< c \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s)\, \theta(\alpha_j s') \right| + \left| \prod_{j=1}^{r} \theta(\alpha_j s) \frac{1}{s'^{\frac{r}{2}}} \right| + \left| \frac{1}{s^{\frac{r}{2}} s'^{\frac{r}{2}}} \right|}{t t' \left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} dt\, dt'$$

$$< c \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left| \prod_{j=1}^{r} \theta^2(\alpha_j s) \right| + \left| \frac{1}{s^r} \right|}{t t' \left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} dt\, dt'.$$

Nun ist für $t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}}$, $x > c$

$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt'}{t' \left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)} < \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, t-\frac{1}{x}\right)} \frac{1}{t'(t-t')} dt' + x \int_{\max\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, t-\frac{1}{x}\right)}^{t+\frac{1}{x}} \frac{dt'}{t'} + \int_{t+\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{dt'}{t'(t'-t)}$$

$$< \frac{c}{t} \log(xt).$$

Die zu beweisenden Abschätzungen (8), (9) werden also bewiesen sein, wenn wir beweisen, daß

$$(10)\qquad \int_{\frac{2A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s)\right| + \frac{1}{|s^{\frac{r}{2}}|}}{t^2}\,dt = O\left(x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}\log^{3+3r}x\right),$$

$$(11)\qquad \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta^2(\alpha_j s)\right| + \frac{1}{|s^{r}|}}{t^2}\log(xt)\,dt = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\log^{3+3r}x\right).$$

Wenn nun ein $t > \frac{A}{\sqrt{x}}$ gegeben ist, so gibt es zu jedem j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ genau eine Fareyzahl $\frac{h_j}{k_j}$ $(h_j > 0)$, so daß t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j,k_j}$ liegt; wenn dazu noch $t \neq \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}$, so gibt es genau eine ganze Zahl n_j, so daß

$$(12)\qquad \frac{2\pi}{\alpha_j 2^{n_j+1} k_j \sqrt{x}} < \left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j 2^{n_j} k_j \sqrt{x}}.$$

Da nach (2) gilt

$$\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j k_j \sqrt{x}},$$

so ist $n_j \geqq 0$. Also: zu jedem $t > \frac{A}{\sqrt{x}}$, welches mit keinem der abzählbar vielen Punkte $\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}$ $(0 < k \leqq \sqrt{x},\ h > 0,\ (h,k) = 1,\ j = 1, 2, \ldots, r)$ übereinstimmt, gibt es ein System von $3r$ eindeutig bestimmten ganzen Zahlen

$$h_j,\ k_j,\ n_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r;\ h_j > 0;\ 0 < k_j \leqq \sqrt{x};\ (h_j, k_j) = 1;\ n_j \geqq 0)$$

so daß t im Durchschnitt der r Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j,k_j}$ liegt und den r Ungleichungen (12) genügt.

Umgekehrt, wenn ein System von $3r$ ganzen Zahlen

$$h_j,\ k_j,\ n_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r;\ h_j > 0;\ 0 < k_j \leqq \sqrt{x};\ (h_j, k_j) = 1;\ n_j \geqq 0)$$

gegeben ist, so sei

$$S(h_1, h_2, \ldots, h_r;\ k_1, k_2, \ldots, k_r;\ n_1, n_2, \ldots, n_r) = S(h; k; n)$$

die Menge derjenigen t, die im Durchschnitt der r Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j,k_j}$ liegen und den Ungleichungen (12) genügen[16]). Die Vereinigungsmenge aller

[16]) $S(h; k; n)$ kann freilich auch leer sein.

Mengen $S(h;k;n)$ überdeckt offenbar, mit Ausnahme von abzählbar vielen Punkten, das Intervall $\frac{A}{\sqrt{x}} < t < +\infty$. Es genügt also vollständig, wenn wir statt (10), (11) die Gleichungen

$$(13)\quad L^* = \sum_{\substack{h_1,\dots,h_r\\ k_1,\dots,k_r\\ n_1,\dots,n_r}} \int_{S(h;k;n)} \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta(\alpha_j s)\right| + \frac{1}{|s^{\frac{r}{2}}|}}{t^2}\,dt = O\left(x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}\log^{3+3r}x\right),$$

$$(14)\quad M^* = \sum_{\substack{h_1,\dots,h_r\\ k_1,\dots,k_r\\ n_1,\dots,n_r}} \int_{S(h;k;n)} \frac{\left|\prod_{j=1}^{r}\theta^2(\alpha_j s)\right| + \frac{1}{|s^r|}}{t^2}\log(xt)\,dt = O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\log^{3+3r}x\right)$$

beweisen. Aus Symmetriegründen (man beachte die in der Fußnote [15]) hervorgehobene Symmetrieeigenschaft von $\bar{N}(\bar{C},\bar{D})$) dürfen und wollen wir uns bei der Summation in (13) und (14) auf diejenigen $S(h;k;n)$ beschränken, für welche

$$(15)\qquad 2^{n_1}k_1 \geqq 2^{n_2}k_2 \geqq \dots \geqq 2^{n_r}k_r$$

gilt.

Es sei nun $l;\ m_1, m_2, \dots, m_r;\ n_1, n_2, \dots, n_r$ ein System von nichtnegativen ganzen Zahlen; wir wollen sagen, daß eine Menge

$$S(h;k;n) = S(h_1,\dots,h_r;\ k_1,\dots,k_r;\ n_1,\dots,n_r)$$

zur Klasse

$$[l;m;n] = [l;\ m_1, m_2, \dots, m_r;\ n_1, n_2, \dots, n_r]$$

gehört, wenn erstens (15) gilt und wenn zweitens

$$(16)\quad 2^l \leqq h_1 < 2^{l+1};\ 2^{m_1} \leqq k_1 < 2^{m_1+1},\ 2^{m_2} \leqq k_2 < 2^{m_2+1}, \dots, 2^{m_r} \leqq k_r < 2^{m_r+1}.$$ [17])

Jede von unseren Mengen $S(h;k;n)$ gehört also genau einer Klasse $[l;m;n]$ an; wenn eine Menge $S(h;k;n)$ der Klasse $[l;m;n]$ nicht leer sein soll, muß nach (12) und (15), da $\frac{1}{\alpha_j} \leqq \frac{1}{\bar{C}}$,

$$\left|\frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1} - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_1 2^{n_1}k_1\sqrt{x}} + \frac{2\pi}{\alpha_j 2^{n_j}k_j\sqrt{x}} < 2\pi\frac{3}{\bar{C}}\frac{1}{2^{n_j}k_j\sqrt{x}},$$

also muß

$$(17)\qquad \left|\frac{1}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1} - \frac{1}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right| < \frac{3}{\bar{C}}\frac{1}{2^{n_j}k_j 2^{\varrho}} \qquad (j = 2, 3, \dots, r),$$

wenn die ganze Zahl ϱ durch $2^{\varrho} \leqq \sqrt{x} < 2^{\varrho+1}$ definiert ist.

---

[17]) Wenn die Klasse $[l;m;n]$ gegeben ist, so sind also für die zugehörigen $S(h;k;n)$ die n_j bereits bestimmt, während die h_j, k_j noch einen gewissen Spielraum haben.

Der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ liegt in $\overline{W} - \overline{N}(\overline{C}, \overline{D})$, also liegt der Punkt $\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_r}\right)$ im Würfel $\frac{1}{\overline{D}} \leqq \frac{1}{\alpha_j} \leqq \frac{1}{\overline{C}}$ und außerhalb der Menge $N^*\left(\frac{1}{\overline{D}}, \frac{1}{\overline{C}}, \frac{3}{\overline{C}}\right)$, also um so mehr außerhalb der Menge $N\left(\frac{1}{\overline{D}}, \frac{1}{\overline{C}}, \frac{3}{\overline{C}}\right)$. Also gibt es nach dem Hilfssatz eine positive Zahl

$$\varrho_0 = \varrho_0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \overline{C}),$$

so daß für $\varrho > \varrho_0$, also um so mehr für $x \geqq 2^{2^{\varrho_0+2}}$, das System der $2r$ Ungleichungen (16), (17) höchstens

$$\mathfrak{M} = \left((\varrho+1)(l+1)\prod_{j=1}^{r}(m_j+1)\prod_{j=2}^{r}(n_i+1)\right)^2 \frac{2^l 2^{m_1+m_2+\ldots+m_r}}{2^{n_2+n_3+\ldots+n_r}\, 2^{(r-1)\varrho}}$$

Lösungen in ganzen h_j, k_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ besitzt. Mit anderen Worten: Für $x \geqq 2^{2^{\varrho_0+2}}$ ist die Anzahl der nichtleeren Mengen $S(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ höchstens gleich $\mathfrak{M}$.

Für $x > c$ ist $\varrho + 1 < \log x$, $\frac{1}{2^{(r-1)\varrho}} < \frac{c}{x^{\frac{r-1}{2}}}$. Es sei nun stets $x > c$, $x \geqq 2^{2^{\varrho_0+2}}$; dann ist also

$$\mathfrak{M} < c\,\overline{\mathfrak{M}},$$

wo[18])

$$(18) \qquad \overline{\mathfrak{M}} = \frac{\log^2 x}{x^{\frac{r-1}{2}}}(l+1)^2 \prod_{j=1}^{r}(m_j+1)^2(n_j+1)^2 \frac{2^l 2^{m_1+m_2+\ldots+m_r}}{2^{n_2+n_3+\ldots+n_r}}.$$

Für ein $S(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ ist erstens nach (4) — da $S(h; k; n)$ in $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1, k_1}$ liegt —

$$(19) \qquad t > c\frac{h_1}{k_1} > c\,2^{l-m_1};$$

zweitens ist nach (5), (6)

$$(20) \qquad |\theta(\alpha_j s)| < c\,x^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{m_j}{2}}, \qquad \left|\frac{1}{\sqrt{s}}\right| < c\,x^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{m_j}{2}};$$

weiter ist das Maß von $S(h; k; n)$ nach (12) kleiner als

$$(21) \qquad \frac{c}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}};$$

endlich ist die Anzahl der nichtleeren Mengen $S(h; k; n)$, die zur Klasse $[l; m; n]$ gehören, kleiner als $c\,\overline{\mathfrak{M}}$. Also ist der Beitrag, den die Klasse $[l; m; n]$ zu L^* bzw. zu M^* liefert, wegen (13), (14), (18), (19), (20), (21) kleiner als (man beachte $\log(xt) < c\log(2^l x)$, $2^{m_1} \leqq \sqrt{x}$)

---

[18]) Wir fügen noch den überflüssigen Faktor $(n_1+1)^2$ hinzu.

$$\frac{c}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}}\,\frac{2^{2m_1}}{2^{2l}}\prod_{j=1}^{r}x^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{m_j}{2}}\cdot\overline{\mathfrak{M}}$$

$$<c\,\frac{\log^2 x}{x^{\frac{r-1}{2}}}\,\frac{(l+1)^2}{2^l}\prod_{j=1}^{r}(m_j+1)^2(n_j+1)^2x^{\frac{1}{2}}2^{\frac{m_j}{2}-n_j},$$

bzw. kleiner als

$$\frac{c}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}}\,\frac{2^{2m_1}}{2^{2l}}\log(2^l x)\prod_{j=1}^{r}x\,2^{-m_j}\cdot\overline{\mathfrak{M}}$$

$$<c\,\frac{\log^2 x}{x^{\frac{r-1}{2}}}\,\frac{(\log x+l)\,(l+1)^2}{2^l}\prod_{j=1}^{r}(m_j+1)^2(n_j+1)^2x\,2^{-n_j}.$$

Um also L^* bzw. M^* nach oben abzuschätzen, genügt es, die eben erhaltenen Ausdrücke über l, m_j, n_j zu summieren, wo die nichtnegativen ganzen Zahlen l, m_j, n_j durch die Bedingung $2^{m_j}\leqq\sqrt{x}$ beschränkt sind.

Eine Abschätzung von L^* ergibt sich also, wenn wir das Produkt der folgenden $r+1$ Ausdrücke abschätzen:

$$\frac{\log^2 x}{x^{\frac{r-1}{2}}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+1)^2}{2^l}=O\left(x^{\frac{-r+1}{2}}\log^2 x\right),$$

$$x^{\frac{1}{2}}\sum_{2^{m_j}\leqq\sqrt{x}}\sum_{n_j=0}^{\infty}(m_j+1)^2\,2^{\frac{m_j}{2}}(n_j+1)^2\,2^{-n_j}=O\left(x^{\frac{3}{4}}\log^2 x\right)\qquad(j=1,2,\ldots,r).$$

Daraus folgt also

$$L^*=O\left(x^{\frac{-r+1}{2}}\cdot\log^2 x\cdot x^{\frac{3}{4}r}\log^{2r}x\right)=O\left(x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}\log^{2+2r}x\right),$$

womit (13) bewiesen ist.

Ebenso ergibt sich eine Abschätzung von M^*, wenn wir das Produkt der folgenden $r+1$ Ausdrücke abschätzen:

$$\frac{\log^2 x}{x^{\frac{r-1}{2}}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\log x+l)\,(l+1)^2}{2^l}=O\left(x^{\frac{-r+1}{2}}\log^3 x\right),$$

$$x\sum_{2^{m_j}\leqq\sqrt{x}}\sum_{n_j=0}^{\infty}(m_j+1)^2(n_j+1)^2\,2^{-n_j}=O\left(x\log^3 x\right)\qquad(j=1,2,\ldots,r).$$

Daraus folgt also

$$M^*=O\left(x^{\frac{-r+1}{2}}\log^3 x\cdot x^{r}\cdot\log^{3r}x\right)=O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\log^{3+3r}x\right),$$

womit auch (14) bewiesen ist.

Prag, den 23. Februar 1930.

(Eingegangen am 28. Februar 1930.)

Wachstumsordnung, Koeffizientenwachstum und Nullstellendichte bei Potenzreihen mit endlichem Konvergenzkreis*).

Von

Friedrich Beuermann in Kiel.

Die Theorie der Wachstumsordnung einer ganzen Funktion und des Wachstums der Koeffizienten bei der zugehörigen, also überall konvergenten Potenzreihe ist bisher nur in beschränktem Umfang auf Potenzreihen mit endlichem Konvergenzkreis übertragen worden. Die vorhandenen Untersuchungen[1]) betreffen im wesentlichen Funktionen „endlicher" Wachstumsordnung — $M(r) < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\varkappa}$ — und statuieren in der Hauptsache Zusammenhänge zwischen dieser Wachstumsordnung und dem asymptotischen Verhalten der Beträge der Potenzreihenkoeffizienten.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nicht mit Funktionen „endlicher" Wachstumsordnung, sondern mit solchen „unendlicher" Wachstumsordnung, sie legt als Vergleichsfunktion nicht $\left(\frac{1}{1-z}\right)^{\varkappa}$, sondern die transzendente Funktion $e^{\left(\frac{1}{1-z}\right)^{\varkappa}}$, also eine Wachstumsordnung weit gröberer Art zugrunde und liefert eine eindeutige Beziehung zwischen dem Wachstum der Funktion und dem der Koeffizienten (§ 1).

Die Theorie der Nullstellenverteilung ist durch R. Nevanlinna[2]) auch für Funktionen, die nur in einem endlichen Gebiet eindeutig und regulär sind, zu einem gewissen Abschluß gebracht. Die in § 2 der vorliegenden Arbeit nachgewiesene Beziehung zwischen Nullstellendichte und Wachstum

*) Diese Untersuchung wurde von Herrn O. Toeplitz angeregt und von ihm und Herrn R. Schmidt durch wertvolle Ratschläge gefördert.

[1]) J. Hadamard, Thèse. Journal de math. 8 (1892), S. 154–156; E. Fabry. Acta math. **36** (1913), S. 69–104; O. Toeplitz, Math. Zeitschrift **12** (1922), S. 189–200.

[2]) Acta math. **46**, S. 1–99, bes. 4. Kapitel.

der Funktion ist daher auch in den Nevanlinnaschen Ergebnissen enthalten; das dort behandelte Beispiel dürfte jedoch eine Ergänzung zur Nevanlinnaschen Arbeit bedeuten[3]).

Die genannten Begriffe der Wachstumsordnung μ der Funktion, der Wachstumsordnung γ der Koeffizienten und der Nullstellendichte ω finden ihre präzise Formulierung in den nachfolgenden Definitionen. Dabei wird $f(z)$ im Innern des Einheitskreises als regulär vorausgesetzt, und es bedeuten, wie üblich, $M(r)$ das Maximum von $|f(z)|$ auf dem Kreise $|z| = r < 1$ und $n(r, 0) = n(r)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ im Kreise $|z| \leqq r < 1$. — Die Funktion $f(z) \equiv 0$ bleibt hier und im folgenden stets außer Betracht.

1. *Wachstumsordnung μ der Funktion*: Wegen $f(z) \not\equiv 0$ und der Monotonie von $M(r)$ ist

$$\text{(I)} \qquad \lim_{r \to 1} \frac{M(r)}{e^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}}} = 0$$

für kein $\sigma < 0$ erfüllt. Falls (I) auch für kein $\sigma \geqq 0$ zutrifft, werde $\mu = \infty$ gesetzt. Liegt dieser Fall nicht vor, so gibt es genau eine Zahl μ derart, daß (I) für jedes $\sigma > \mu$, aber für kein $\sigma < \mu$ erfüllt ist; diese Zahl μ soll dann als Wachstumsordnung der Funktion $f(z)$ bezeichnet werden. — Es ist also stets $\mu \geqq 0$[4]).

2. *Wachstumsordnung γ der Koeffizienten c_n*. Falls $|c_n| \to 0$ strebt, soll $\gamma = 0$ gesetzt werden. Andernfalls ist

$$\text{(II)} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{|c_n|}{e^{n^{\sigma}}} = 0$$

für kein $\sigma > 0$ erfüllt. Dagegen trifft (II) für jedes $\sigma > 1$ zu, weil sonst $\sum c_n z^n$ nirgends konvergent wäre. Demnach gibt es in diesem Falle genau eine Zahl γ derart, daß (II) für jedes $\sigma > \gamma$, aber für kein $\sigma < \gamma$ erfüllt wird. Diese Zahl γ soll dann als Wachstumsordnung der Koeffizienten bezeichnet werden. Es ist also $0 \leqq \gamma \leqq 1$.

---

[3]) Definiert man die Wachstumsordnung τ der von Nevanlinna eingeführten Funktion $T(r)$ in ähnlicher Weise wie in dieser Arbeit die Nullstellendichte ω, so ist nach Nevanlinna die Wachstumsordnung der Funktion $\mu \geqq \tau$, andererseits $\tau + 1 \geqq \omega$, also $\mu + 1 \geqq \tau + 1 \geqq \omega$. Nevanlinna gibt ein Beispiel an, bei dem $\tau + 1 = \mu$ ist; das Beispiel in § 2 dieser Arbeit zeigt, daß $\mu = \tau$ sein kann. Den Hinweis auf diese Zusammenhänge verdanke ich Herrn E. Ullrich in Jena.

[4]) Die Definitionen $\mu = \overline{\lim_{r \to 1}} \frac{\lg \lg M(r)}{\lg \frac{1}{1-r}}$, $\gamma = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\lg \lg |c_n|}{\lg n}$, $\omega = \overline{\lim_{r \to 1}} \frac{\lg n(r)}{\lg \frac{1}{1-r}}$ sind im allgemeinen den hier gegebenen Schnittdefinitionen äquivalent, verlieren aber z. B. für $|c_n| < 1$, $M(r) < 1$ ihren Sinn.

3. *Nullstellendichte* ω. Falls $f(z)$ im Innern des Einheitskreises keine Nullstelle besitzt, soll $\omega = 0$ gesetzt werden. Ist $f(z)$ nicht nullstellenfrei, dann ist

$$\lim_{r \to 1} \frac{n(r)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}} = 0 \tag{III}$$

für kein $\sigma \leqq 0$ erfüllt. Falls (III) auch für kein $\sigma > 0$ zutrifft, werde $\omega = \infty$ gesetzt. Liegen diese beiden Fälle nicht vor, so gibt es genau eine Zahl ω derart, daß (III) für jedes $\sigma > \omega$, aber für kein $\sigma < \omega$ zutrifft; diese Zahl ω soll dann als Nullstellendichte bezeichnet werden. — Es ist also stets $\omega \geqq 0$.

Zwischen diesen Größen μ, γ und ω werden unter Benutzung Lindelöfscher Ansätze[5]) und der Jensenschen Ungleichung[6]) folgende Beziehungen nachgewiesen:

$$\mu = \frac{\gamma}{1-\gamma}, \tag{§ 1}$$

$$\omega \leqq \mu + 1. \tag{§ 2}$$

Bei jedem μ kann $\omega = 0$ sein, wie die Funktion $e^{\left(\frac{1}{1-z}\right)^t}$ für $t > 0$, also $\mu > 0$, und $\frac{1}{1-z}$ für $\mu = 0$ lehrt. Andererseits wird in § 2 gezeigt, daß bei jedem μ die Gleichheit von ω mit seiner oberen Schranke $\mu + 1$ eintreten kann.

Die Ergebnisse sind hier also ähnlich wie bei den ganzen Funktionen: Zwischen Wachstumsordnung der Koeffizienten und Wachstumsordnung der Funktion eine Gleichung, zwischen Nullstellendichte und Wachstumsordnung der Funktion eine Ungleichung.

Bei diesem Sachverhalt liegt es nahe, wie bei den ganzen transzendenten Funktionen auch das Verhalten *primitiver* Funktionen, die nur im Innern des Einheitskreises regulär sind, zu untersuchen. Das Ergebnis ist

$$\mu \leqq \omega \leqq \mu + 1. \tag{§ 3}$$

Unter „primitiven" Funktionen sollen dabei die unendlichen Produkte

$$f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)\, e^{u_n + \frac{1}{2} u_n^2 + \ldots + \frac{1}{k_n} u_n^{k_n}}$$

verstanden werden; dabei soll nicht wie bei den ganzen Funktionen $u_n = \frac{z}{w_n}$ sein, vielmehr soll

$$u_n = \frac{z}{w_n} \cdot \frac{e^{i\varphi_n} - w_n}{e^{i\varphi_n} - z}$$

und

$$|w_n| < 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[5]) J. L. W. V. Jensen, Acta math. 22 (1889), S. 359–364.
[6]) E. Lindelöf, Acta Soc. Fennicae **31** (1902).

sein, die Nullstellen $w_k = \varrho_k e^{i\varphi_k}$ sind dabei nach der Größe ihrer Beträge geordnet.

Die Elementarfaktoren $1 - u_n$ haben ihren Pol nicht wie die entsprechenden ganzen Funktionen bei $z = \infty$, sondern auf dem Einheitskreis bei $z = e^{i\varphi_n}$, d. h. an derjenigen Stelle des Einheitskreises, an der der Strahl von 0 nach w_n diesen durchstößt. Außerhalb und innerhalb des Einheitskreises sind die primitiven Funktionen frei von Singularitäten.

Der Faktor $\frac{z}{w_n}$ bewirkt die Normierung auf $f(0) = 1$. Man übersieht aber leicht, daß die Aussagen in § 3 erhalten bleiben, wenn man den Normierungsfaktor fortläßt.

Der Grad k_n der Exponenten in den konvergenzerzeugenden Faktoren ist so zu wählen, daß $\sum_1^\infty |u_n|^{k_n+1}$ konvergiert; die Wahl soll jedoch dahin eingeschränkt werden, daß $k_n = s$ ist, wenn s die kleinste ganze Zahl ist, für die $\sum |u_n|^{s+1}$ konvergiert. In diesem Fall ist $f_0(z)$ eine Funktion endlichen Geschlechts, und s ist das Geschlecht von $f_0(z)$. In § 3 wird gezeigt werden, daß im allgemeinen $s = [\omega]$ ist; nur wenn bei ganzzahliger Nullstellendichte ω die Reihe $\sum |u_n|^\omega$ divergiert, ist $s = \omega + 1$.

§ 1.

Wachstumsordnung der Koeffizienten und Wachstumsordnung der Funktion.

Satz 1. *Ist μ die Wachstumsordnung der im Innern des Einheitskreises regulären Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ und γ die Wachstumsordnung ihrer Koeffizienten, so ist*

$$\mu = \frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

Die Behauptung wird durch zwei Abschätzungen — $\mu \leqq \frac{\gamma}{1-\gamma}$ und $\mu \geqq \frac{\gamma}{1-\gamma}$ — bewiesen.

1. $\mu \leqq \frac{\gamma}{1-\gamma}$. Für $\gamma = 1$ ist hier nichts zu beweisen; es werde also $\gamma < 1$ angenommen. Nach der Definition von γ ist für jedes $\sigma > \gamma$, insbesondere für jedes σ aus $\gamma < \sigma < 1$ — nur solche σ sollen betrachtet werden —

$$|c_n| \leqq A(\sigma) \cdot e^{n^\sigma}, \tag{1}$$

daher

$$M(r) \leqq |c_0| + A(\sigma) \sum_1^\infty e^{n^\sigma} \cdot r^n. \tag{2}$$

In dieser Majorante von $M(r)$ sei $e^{m\sigma} r^m$ das Maximalglied. Da die Funktion $h(x) = e^{x\sigma} r^x$ an der Stelle

$$x = \left(\frac{\sigma}{\lg \frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

ihr Maximum hat, so ist wegen $\lg \frac{1}{r} > 1 - r$ und $\sigma < 1$

$$x < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

und daher

$$e^{m\sigma} r^m < e^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}. \tag{3}$$

Zur weiteren Abschätzung von $M(r)$ werde die Reihe (2) zerlegt in

$$\sum_1^\infty e^{n\sigma} r^n = \sum_1^{l-1} e^{n\sigma} r^n + \sum_l^\infty e^{n\sigma} r^n \tag{4}$$

und dabei der Index l so bestimmt, daß

$$l - 1 \leqq \left(\frac{2}{\lg \frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} < l \tag{5}$$

ausfällt. Dann zeigt sich, daß der erste Teil von (4) von der Ordnung des Maximalgliedes, der Rest nur von der Ordnung $\frac{1}{1-\sqrt{r}}$ ist.

Ersetzt man nämlich die ersten $l-1$ Glieder in (4) durch das Maximalglied und beachtet man, daß $\lg \frac{1}{r} > 1 - r$ ist, so ist

$$\sum_1^{l-1} e^{n\sigma} r^n \leqq \left(\frac{2}{1-r}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \cdot e^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}. \tag{6}$$

Da in dem Rest von (4) die Exponenten $n \geqq l$ sind, so ist hier wegen $\sigma < 1$ auch

$$e^{n\sigma - 1} \leqq e^{l\sigma - 1},$$

und unter Berücksichtigung von (5) ist sogar:

$$e^{n\sigma - 1} < r^{-\frac{1}{2}} \qquad (n \geqq l).$$

Daraus folgt dann aber sofort

$$\sum_l^\infty e^{n\sigma} r^n = \sum_l^\infty (e^{n\sigma - 1} r)^n \leqq \sum_0^\infty (r^{\frac{1}{2}})^n. \tag{7}$$

Also ist die Majorante von $M(r)$ nach (6) und (7)

$$\sum_1^\infty e^{n^\sigma} r^n < \left(\frac{2}{1-r}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \cdot e^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}} + \frac{1}{1-\sqrt{r}}.$$

Man übersieht nun leicht, daß für jedes $\varkappa > \frac{\sigma}{1-\sigma}$

$$\lim_{r\to 1} \frac{M(r)}{e^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\varkappa}}} = 0 \tag{8}$$

und weil σ im Intervall $\gamma < \sigma < 1$ beliebig war, gilt (8) auch für jedes $\varkappa > \frac{\gamma}{1-\gamma}$, d. h.

$$\mu \leqq \frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

2. $\mu \geqq \frac{\gamma}{1-\gamma}$. Der Beweis ist nur für $\gamma > 0$ nötig. Nach der Definition von γ gibt es zu jedem $\sigma < \gamma$, insbesondere zu jedem σ aus $0 < \sigma < \gamma$ eine Indexfolge $n_1, n_2, n_\nu \to \infty$ derart, daß

$$|c_{n_\nu}| > e^{n_\nu^\sigma}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots$ zutrifft. Zu jedem dieser Indizes gibt es nun genau ein r_ν mit $0 < r_\nu < 1$, für das

$$n_\nu = \left(\frac{\sigma}{\lg \frac{1}{r_\nu}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{9}$$

erfüllt ist, und zwar strebt $r_\nu \to 1$. Der Index n_ν ist also der Index des Maximalgliedes in der Reihe $\sum_{n=1}^\infty e^{n^\sigma} r_\nu^n$. Für dieses Maximalglied gilt nun, sobald $r_\nu > \frac{1}{2}$ ausfällt,

$$|c_{n_\nu} r_{n_\nu}^{n_\nu}| > e^{B\left(\frac{1}{1-r_\nu}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}, \tag{10}$$

wo $B = B(\sigma)$ eine positive Konstante bedeutet.

In der Tat erhält man für $n = n_\nu$ und $r = r_\nu$ unter Benutzung von $\lg \frac{1}{r} < 2(1-r)$ für $\frac{1}{2} < r < 1$.

$$\lg |c_n r^n| > n^\sigma + n \lg r = (1-\sigma)\left(\frac{\sigma}{\lg \frac{1}{r}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} > (1-\sigma)\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \cdot \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}},$$

woraus (10) abzulesen ist.

Da für jedes n nach Cauchy $M(r) > |c_n r^n|$, so ergibt sich für alle genügend großen ν

$$M(r_\nu) > e^{B\left(\frac{1}{1-r_\nu}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}.$$

Man erhält also

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{M(r)}{e^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\varkappa}}} = \infty$$

für jedes $\varkappa < \frac{\sigma}{1-\sigma}$, und weil σ im Intervall $0 < \sigma < \gamma$ beliebig war, dasselbe für jedes $\varkappa < \frac{\gamma}{1-\gamma}$, das heißt:

$$\mu \geqq \frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

§ 2.

Wachstumsordnung der Funktion und Nullstellendichte.

Satz 2. *Hat die im Innern des Einheitskreises reguläre Funktion $f(z)$ die Wachstumsordnung μ und die Nullstellendichte ω, dann ist*

$$\omega \leqq \mu + 1.$$

Der Beweis, bei dem ohne Verlust an Allgemeinheit $f(0) = 1$ angenommen werden kann, ergibt sich fast unmittelbar aus der Jensenschen Ungleichung, die in diesem Fall lautet:

$$n(r) \leqq \frac{\lg M(R)}{\lg \frac{R}{r}} \qquad (0 < r < R < 1). \tag{11}$$

Für $R = \frac{1+r}{2}$ ist dann

$$\lg \frac{R}{r} = \lg \frac{1}{\frac{r}{R}} > 1 - \frac{r}{R} = \frac{1-R}{R} > 1 - R.$$

Die Jensensche Ungleichung liefert jetzt

$$n(r) \leqq \frac{\lg M(R)}{1-R}, \tag{12}$$

also wegen $1 - r = 2(1 - R)$

$$\frac{n(r)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma+1}} \leqq \frac{\lg M(R)}{\left(\frac{1}{1-R}\right)^{\sigma}} \cdot 2^{\sigma+1}. \tag{13}$$

Da mit $\lim\limits_{r\to 1} \frac{M(r)}{e^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}}} = 0$ auch $\lim\limits_{r\to 1} \frac{\lg M(r)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}} = 0$ ist, so folgt aus der Definition von μ und aus (13) für jedes $\sigma > \mu$

$$\lim_{r\to 1} \frac{n(r)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma+1}} = 0, \tag{14}$$

d. h. aber gemäß der Definition der Nullstellendichte

$$\omega \leqq \mu + 1. \tag{15}$$

Diese Beziehung zwischen Nullstellendichte und Wachstumsordnung kann nicht verbessert werden; in der Tat kann bei jedem μ das Gleichheitszeichen in (15) gelten. Für $\mu > 0$ wird das durch die Funktionen

$$k(z) = \prod_1^\infty (1 - e \cdot z^{k_n}),$$

$$1 \leqq k_1 \leqq k_2 \leqq \ldots, \qquad k_n \sim n^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \alpha > 0$$

belegt, wo k_n die durch $n^{\frac{1}{\alpha}} \leqq k_n < n^{\frac{1}{\alpha}} + 1$ bestimmte ganze Zahl ist. Man sieht leicht, daß der Einheitskreis natürliche Grenze der Funktion $k(z)$ ist, da auf jeden Kreis mit dem Radius $r_n = e^{-\frac{1}{k_n}}$ genau k_n Nullstellen gleichmäßig verteilt sind, jeder Punkt des Einheitskreises also Häufungspunkt von Nullstellen ist.

Wachstumsordnung von $k(z)$. Es ist

$$\lg \operatorname{Max} |k(z)| \leqq \sum_1^\infty \lg (1 + e\, r^{k_n}) < e \sum_1^\infty r^{k_n}. \tag{16}$$

Setzt man

$$\sum_{n=1}^\infty r^{k_n} = \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu r^\nu, \qquad s_n = a_0 + \ldots + a_n, \tag{17}$$

dann ist s_n die Anzahl aller $k_n \leqq n$; also ist

$$k_n \leqq n < k_{s_n+1}.$$

In Verbindung mit der Definition von k_n folgt daraus

$$s_n \cong n^\alpha.$$

Daher ist für $r \to 1$

$$\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu r^\nu \cong \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \left(\frac{1}{1-r}\right)^\alpha. \tag{18}$$

Aus (16) und (18) folgt

$$\frac{\lg \operatorname{Max}_{|z|=r} |k(z)|}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^\sigma} \to 0$$

für jedes $\sigma > \alpha$, d. h. aber

$$\mu \leqq \alpha. \tag{19}$$

Nullstellendichte von $k(z)$. Da auf dem Kreise $r = e^{-\frac{1}{k_n}}$ genau k_n Nullstellen liegen, so ist die Gesamtzahl der Nullstellen innerhalb dieses Kreises

$$n(r, 0) = k_1 + k_2 + \ldots + k_n \cong \frac{\alpha}{\alpha+1} n^{\frac{1}{\alpha}+1}. \tag{20}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{1-r_n} = \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{k_n}}} \cong k_n$$

und daher

$$\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\sigma} \cong n^{\frac{\sigma}{\alpha}} \tag{21}$$

für jedes reelle σ.

Aus (20) und (21) folgt leicht für jedes $\sigma < \alpha + 1$

$$\frac{n(r,0)}{\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\sigma}} \to \infty .$$

Dann aber ist nach der Definition der Nullstellendichte

$$\omega \geqq \alpha + 1. \tag{22}$$

Berücksichtigt man $\omega \leqq \mu + 1$, so folgt aus (19) und (22) für die Funktion $k(z)$

$$\mu = \alpha, \qquad \omega = \alpha + 1,$$

d. h. zu jeder Wachstumsordnung $\mu > 0$ läßt sich eine Funktion angeben, für die $\omega = \mu + 1$ ist.

§ 3.

Die primitiven Funktionen.

Am Schluß der Einleitung wurde behauptet, daß bei den primitiven Funktionen

$$f_0(z) = \prod_1^{\infty} (1-u_n)\, e^{u_n + \frac{1}{2}u_n^2 + \cdots + \frac{1}{s}u_n^s}$$

im allgemeinen das Geschlecht der Funktion $s = [\omega]$ ist, nur wenn ω selbst ganz ist und $\sum_1^{\infty} |u_n|^{\omega}$ divergiert, ist $s = \omega + 1$. Diese Tatsache folgt sofort aus nachstehendem Hilfssatz:

Hilfssatz[7]): Hat $f_0(z)$ die Nullstellendichte ω und sind $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ die Beträge der Nullstellen, so konvergiert die Reihe $\sum_1^{\infty} (1-\varrho_n)^{\sigma}$ für jedes $\sigma > \omega$ und divergiert für jedes $\sigma < \omega$. Für $\sigma = \omega$ kann Konvergenz oder Divergenz statthaben.

Beweis. Sind die Nullstellen nach der Größe ihrer Beträge geordnet — $\varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq \varrho_3 \leqq \ldots \to 1$ —, so ist stets die Nullstellenzahl $n(\varrho_n) \geqq n$ und für eine Teilfolge ϱ_{n_ν} ist $n(\varrho_{n_\nu}) = n_\nu$. Nach der Definition der Nullstellendichte ω gilt

$$\lim_{n_\nu \to \infty} n_\nu (1-\varrho_{n_\nu})^{\sigma} = 0 \tag{23}$$

[7]) Dieser Hilfssatz findet sich auch bei R. Nevanlinna, Acta Math. **46**, S. 81.

ir jedes $\sigma > \omega$, dagegen für kein $\sigma < \omega$. Dann ist aber auch

24) $$\lim_{n\to\infty} n(1-\varrho_n)^\sigma = 0$$

egen $n(\varrho_n) \geqq n$ für jedes $\sigma > \omega$, und wegen (23) für kein $\sigma < \omega$ erfüllt.

Mit (24) gilt für jedes τ aus $\omega < \tau < \sigma$ ebenfalls

25) $$\lim_{n\to\infty} n(1-\varrho_n)^\tau = 0$$

nd daher für genügend große n

$$(1-\varrho_n)^\tau < \frac{1}{n}$$

der

$$(1-\varrho_n)^\tau < \frac{1}{n^{\frac{\sigma}{\tau}}},$$

h. aber: $\sum(1-\varrho_n)^\sigma$ konvergiert für jedes $\sigma > \omega$. Entsprechend folgt, aß $\sum(1-\varrho_n)^\sigma$ divergiert für jedes $\sigma < \omega$. Wegen

26) $$\frac{r(1-\varrho_n)}{1+r} \leqq |u_n| \leqq \frac{1-\varrho_n}{\varrho_1(1-r)}$$

gibt sich daraus die Konvergenz bzw. Divergenz von $\sum|u_n|^\sigma$ und daraus für das Geschlecht der primitiven Funktion $s = [\omega]$ bzw. $s = \omega + 1$, alls ω ganz ist und $\sum|u_n|^\omega$ divergiert.

Satz 3. *Ist $f_0(z)$ eine primitive Funktion, die im Innern des Einheitskreises regulär ist, die Nullstellendichte ω und die Wachstumsordnung μ hat, so ist*

$$\mu \leqq \omega.$$

er Beweis braucht nur für Funktionen mit endlicher Nullstellendichte geführt zu werden. In diesem Falle ist das Geschlecht s endlich, und die unktion hat die Form

$$f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} P_s(u_n),$$

$$P_s(u_n) = (1-u_n(z))\, e^{u_n + \frac{1}{2}u_n^2 + \ldots + \frac{1}{s}u_n^s}.$$

ach einer bekannten Abschätzung des Faktors $P_s(u_n)$ ist für jedes σ aus $< \sigma \leqq s+1$

27) $$|P_s(u_n)| < e^{B|u_n|^\sigma},$$

o B eine nur von s und σ abhängige, aber von $|u_n|$ unabhängige Konante bedeutet.

Berücksichtigt man den vorangeschickten Hilfssatz und (26), so ist aher für jedes σ aus $\omega < \sigma \leqq s+1$

28) $$|f_0(z)| \leqq e^{C\left(\frac{1}{1-r}\right)^\sigma \sum_1^\infty (1-\varrho_n)^\sigma}.$$

Ist $\omega = s+1$, dann gibt es zwar kein $\sigma \leqq s+1$, aber $\sum_1^\infty (1-\varrho_n)^\omega$ kon
vergiert, und in (28) tritt ω an die Stelle von σ. Daher ist für jede
$\sigma > \omega$

$$M_0(r) < e^{D\left(\frac{1}{1-r}\right)^\sigma}, \tag{29}$$

wo D eine nur von σ abhängige Konstante bedeutet. Aus (29) folgt sofor

$$\lim \frac{M_0(r)}{e^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^\sigma}} \to 0$$

für jedes $\sigma > \omega$, d. h. nach der Definition von μ

$$\mu \leqq \omega .$$

In Verbindung mit dem Ergebnis von § 2 folgt daraus für primitive Funktionen

$$\mu \leqq \omega \leqq \mu + 1.$$

(Eingegangen am 4. März 1930.)

Mathematisches zur Strahlungsgleichgewichtstheorie der Fixsternatmosphären.

Von

Eberhard Hopf in Berlin-Dahlem.

Einleitung.

Die modernen Anschauungen über den physikalischen Aufbau der äußeren Schichten der Fixsterne, insbesondere der Sonne, sind wesentlich durch grundlegende Untersuchungen von K. Schwarzschild (Schwarzschild 1, 2) beeinflußt. Man verdankt ihnen die wichtige Erkenntnis, daß von den gewöhnlichen Mechanismen der Energieübertragung durch Wärmeleitung, Wärmekonvektion oder durch Wärmestrahlung gerade der letztere für die in den Sternatmosphären herrschenden Verhältnisse ausschlaggebend ist. Betrachtet man die Atmosphäre als ruhendes materielles Medium und das in ihr herrschende Strahlungsfeld als stationär, so hat man jenen Zustand vor sich, der gemeinhin als Strahlungsgleichgewicht bezeichnet wird. Die astrophysikalisch wichtigste Konsequenz aus dieser Annahme besteht in der Möglichkeit, die Temperaturverteilung in den äußeren Schichten zu bestimmen. Die vorliegende Arbeit ist den hierbei auftretenden mathematischen Aufgaben gewidmet. Allgemein ist die Aufgabe die folgende: Bestimmung des Strahlungszustandes in einem absorbierenden und reemittierenden Medium, das an seinen Grenzen in vorgeschriebener Weise bestrahlt wird. Ich halte mich bei der Behandlung dieser Aufgabe im wesentlichen an die heute in der Astrophysik gebräuchlichen Vorstellungen und Grundgesetze des Strahlungsgleichgewichts. In dieser Richtung ist besonders eine Arbeit von Herrn G. Jaffé zu erwähnen, in der die obige Aufgabe mehr vom physikalischen Standpunkte und unter Verzicht auf mathematische Strenge diskutiert wird (Jaffé 1, 2). Die wichtigen, sehr allgemeinen Untersuchungen von Herrn Levi-Civita[1]) beruhen auf teilweise anderen Grundannahmen.

[1]) Vgl. Rend. della R. Accad. dei Lincei **23** (1914), S. 12–21, 371–379, 453–464. Vgl. auch die Bemerkungen von Herrn Jaffé (Jaffé 1, S. 630–632).

In § 1 werden im Anschluß an Herrn Jaffé die Grundgleichungen des Strahlungsgleichgewichts aufgestellt. Unter der Voraussetzung endlichen „optischen Durchmessers" des Mediums wird in § 2 die obige Aufgabe behandelt. Es bedeutet eine mathematisch nicht wesentliche Einschränkung, wenn wir von vornherein die in der Astrophysik gebräuchlichen Modelle der Behandlung zugrunde legen. Die Aufgabe ist mit der Diskussion einer linearen Integralgleichung äquivalent, die im Prinzip mit der von Herrn Hilbert seiner Behandlung des isothermen Falles (Hilbert 1) zugrunde gelegten Integralgleichung übereinstimmt. Die Lösung wird durch die Neumannsche Reihe geliefert, deren Konvergenz leicht nachweisbar ist. Eine wesentliche Rolle spielt dabei wie überhaupt in der vorliegenden Untersuchung die Positivität des Kernes. § 3 enthält eine kurze Bemerkung über den speziellen Fall einer kugelsymmetrisch geschichteten Atmosphäre, die sich ins Unendliche erstreckt. Der wegen seiner Einfachheit astrophysikalisch besonders wichtige, bereits von Schwarzschild vollständig behandelte ebene Fall wird in § 4 mehr referierend gestreift.

Wenn der „optische Durchmesser" des Modells unendlich groß ist, treten im allgemeinen schwierigere Probleme in den Vordergrund (§ 5). Die einfachen Überlegungen von § 2 verlieren hier ihren Sinn. Ein genaueres Studium widmen wir in § 6 nur dem einfachsten in der Richtung von § 5 liegenden Falle, dem Schwarzschild-Milneschen Modell einer ebenen Atmosphäre von unendlicher optischer Dicke. Dieses von Parametern vollständig freie Modell ist eine der eigentlichen Grundlagen der heutigen, durch die Untersuchungen von Herrn E. A. Milne besonders geförderten Anschauungen vom Aufbau der Sonnenatmosphäre (Milne 1, 2). Die Integralgleichung des Problems artet hier in eine singuläre aus. Dieser Umstand hat eine Zeitlang zu mancherlei Irrtümern über die Widerspruchsfreiheit des Milneschen Modells Anlaß gegeben. Unter wesentlicher Heranziehung der Positivität des Kernes läßt sich jedoch auch hier der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für die Lösung des Problems führen. Gegenüber diesen allgemeingehaltenen mathematischen Ausführungen konnte im folgenden naturgemäß auf astrophysikalisch wichtige Einzelfragen nicht eingegangen werden.

Inhaltsübersicht.

Seite

§ 1. Die Grundgleichungen 111
§ 2. Bestimmung des Strahlungszustandes bei endlichem „optischem Durchmesser" 113
§ 3. Bemerkung zum Sonderfall des kugelsymmetrischen Modells 117
§ 4. Der ebene Fall (Schwarzschildsches Modell) 119
§ 5. Singuläre Probleme. Unendlicher „optischer Durchmesser" 121
§ 6. Zur Theorie des Milneschen Modells 123

§ 1.

Die Grundgleichungen.

Wir denken uns ein ruhendes isotropes Medium als Träger eines Strahlungsfeldes. Der Energieaustausch innerhalb des Mediums soll allein durch Wärmestrahlung vermittelt werden. Von der Diffusion und Brechung des Lichtes sei im Einklang mit modernen Anschauungen über den Aufbau der Sonnenphotosphäre abgesehen. Wir beschränken uns außerdem von vornherein auf die Gesamtstrahlung aller Frequenzen. Der Strahlungszustand sei stationär, das Medium befinde sich also in thermodynamischem Gleichgewicht. Mathematisch läßt sich dann die Bedingung des Strahlungsgleichgewichts durch zwei Fundamentalgleichungen ausdrücken, von denen die eine besagt, daß der gesamte resultierende Strahlungsfluß durch ein Volumteilchen des betrachteten Mediums verschwindet, während die andere aussagt, daß die Änderung der Strahlungsintensität längs irgendeines Strahls allein durch Absorption und Wiederemission bedingt wird.

Es bedeute $J\left(P, \vec{s}\right)$ die Strahlungsintensität als Funktion des Ortes P und der Richtung $\vec{s}$. Ist $d\sigma$ ein in P befindliches, auf $\vec{s}$ senkrechtes Flächenelement, so bedeutet demnach

$$J\left(P, \vec{s}\right) d\sigma\, d\Omega$$

die in der Zeiteinheit normal durch $d\sigma$ hindurchgestrahlte und im infinitesimalen Öffnungswinkel $d\Omega$ sich ausbreitende Energie. Des weiteren sei mit $\varepsilon(P)$ der Emissionskoeffizient als Funktion des Ortes bezeichnet, so daß

$$\varepsilon(P) dv\, d\Omega$$

die in der Zeiteinheit vom Volumenelement dv in den Öffnungswinkel $d\Omega$ hinein emittierte Wärmestrahlung bedeutet[2]). Endlich bezeichnen wir mit $\alpha(P)$ den linearen Absorptionskoeffizienten, der ebenfalls als Funktion des Ortes allein vorausgesetzt werde.

$$\alpha(P) J\left(P, \vec{s}\right) ds$$

ist dann der Bruchteil, um welchen die Strahlungsintensität längs eines in die Strahlungsrichtung $\vec{s}$ fallenden Wegelementes ds geschwächt wird.

Die erste Konsequenz aus den obigen Voraussetzungen ergibt sich, wenn man sich überlegt, wie sich die Strahlungsintensität in der Strahlrichtung durch Absorption und Reemission ändert. Die vollständige Energie-

[2]) Von etwaiger Emission nichtthermodynamischen Ursprungs (subatomare Energiequellen kommen nur im tiefen Sterninnern in Frage) sei hier abgesehen.

bilanz ergibt dann (vgl. etwa Jaffé 1) die fundamentale, von Herrn Eddington herrührende „Bewegungsgleichung“ der Strahlung

$$\text{(I)} \qquad \frac{dJ\left(P, \vec{s}\right)}{ds} = \varepsilon(P) - \alpha(P) J\left(P, \vec{s}\right).$$

Die Ableitung ist hierbei in der Strahlungsrichtung $\vec{s}$ genommen, also gleich $\alpha \frac{\partial J}{\partial x} + \beta \frac{\partial J}{\partial y} + \gamma \frac{\partial J}{\partial y}$, wenn x, y, z die Koordinaten von P und α, β, γ die Richtungscosinus von $\vec{s}$ bedeuten.

Aus der Strahlungsintensität läßt sich ein wichtiger Vektor, der „Nettostrom“ $\mathfrak{N}$ bestimmen. $d\sigma$ sei ein im Punkte P befindliches orientiertes Flächenelement, n die positive Normalenrichtung. Die pro Zeiteinheit in irgendeiner Richtung $\vec{s}$ durch $d\sigma$ hindurchgestrahlte, im Öffnungswinkel $d\Omega$ sich ausbreitende Energie ist gleich

$$J(P, r) \cos\left(n, \vec{s}\right) d\sigma\, d\Omega.$$

Die Integration über alle Richtungen $\vec{s}$ ergibt

$$\mathfrak{N}_n\, d\sigma = d\sigma \int J\left(P, \vec{s}\right) \cos\left(n, \vec{s}\right) d\Omega,$$

die pro Zeiteinheit erfolgte „Nettostrahlung“ durch das Flächenelement $d\sigma$. Es ist leicht zu sehen, daß $\mathfrak{N}_n$ die in die Richtung n fallende Komponente eines Vektors $\mathfrak{N}$ darstellt. Diese wichtige, vom Orte P abhängige Vektorgröße heißt schlechthin der „Nettostrom“.

Die Bedingung des Strahlungsgleichgewichts besagt dann einfach, daß das durch $\mathfrak{N}(P)$ definierte Vektorfeld frei von Quellen und Senken ist, d. h. daß die Nettostrahlung $\int_S \mathfrak{N}_n\, d\sigma$ durch jede geschlossene, mit ihrem Innern ganz im betrachteten Medium gelegene Fläche S verschwindet, unter n die Richtung etwa der Außennormalen von S verstanden. In bekannter Weise ergibt sich daraus die Fundamentalgleichung des Strahlungsgleichgewichts

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{N} = 0,$$

von Herrn Jaffé in Analogie zur Hydrodynamik auch „Kontinuitätsgleichung“ der Strahlung genannt.

Eine erste Folgerung aus den Grundgleichungen erhält man durch Integration der Identität $\frac{dJ}{ds} = \cos\left(x, \vec{s}\right) \frac{\partial J}{\partial x} + \cos\left(y, \vec{s}\right) \frac{\partial J}{\partial y} + \cos\left(z, \vec{s}\right) \frac{\partial J}{\partial z}$ über alle Richtungen $\vec{s}$. Mit Rücksicht auf die Definition von $\mathfrak{N}$ ergibt sich leicht

$$\int \frac{dJ}{ds}\, d\Omega = \operatorname{div} \mathfrak{N} = 0,$$

lso wegen (I)

III) $$\frac{\varepsilon(P)}{\alpha(P)} = \frac{1}{4\pi}\int J\left(P, \vec{s}\right) d\Omega = \Phi(P);$$

ie Bezeichnung $\Phi(P)$ für die „mittlere Strahlungsintensität" an der telle P behalten wir im folgenden bei. Im isothermen Falle, wo also die trahlung von der Richtung unabhängig ist, geht (III) in die bekannte eziehung $\varepsilon = \alpha J$ über. Übrigens ist es leicht zu sehen, daß auch umekehrt (II) eine Konsequenz von (I) und (III) ist.

Zwischen $\Phi(P)$ und der Energiedichte $u(P)$ der Strahlung im unkte P besteht nach einer von Max Planck herrührenden Überlegung Wärmestrahlung, § 22) die Beziehung

1) $$u(P) = \frac{4\pi}{q}\Phi(P),$$

obei q die (unter den obigen Annahmen konstante) Fortpflanzungsschwindigkeit der Strahlung bedeutet.

Die Temperatur T hängt bekanntlich im isothermen Falle mit der trahlungsdichte u durch das Stefan-Boltzmannsche Gesetz (σ = Stefansche onstante, n = Brechungsindex des Mediums)

$$u = n^2 \sigma T^4$$

usammen. Wir postulieren seine Gültigkeit mit Herrn Jaffé und im Einlang mit der modernen Theorie vom Aufbau der Sonnenatmosphäre auch nter den obigen allgemeinen Voraussetzungen. Zur Bestimmung der Temeraturverteilung innerhalb des betrachteten Mediums genügt dann die enntnis der mittleren Strahlungsintensität $\Phi(P)$ als Funktion des Ortes nd der Fortpflanzungsgeschwindigkeit q. In den äußeren Schichten der terne genügt die Kenntnis von Φ allein, da in diesem Falle praktisch $= 1$ und für q die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c im Vakuum gesetzt erden kann.

§ 2.

Bestimmung des Strahlungszustandes bei endlichem „optischem Durchmesser" des Mediums.

Die Grundgleichungen (I) und (III) können noch in der einfachen Gestalt

Ia) $$\frac{dJ}{ds} = \alpha(\Phi - J),$$

IIa) $$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int J d\Omega$$

eschrieben werden.

Das Medium, das als Träger des Strahlungsfeldes fungiert, erfülle ein von zwei getrennten analytischen Flächen begrenztes Gebiet T. Die Randpunkte von T seien allgemein mit P_S bezeichnet, und insbesondere seien die Punkte der inneren Grenzfläche S_i mit P_i, die der äußeren S_a mit P_a bezeichnet. Wir lassen auch den Fall zu, daß T sich ins Unendliche erstreckt, verlangen dann aber für jeden Punkt P von T, daß die von ihm ausgehenden und innerhalb T ins Unendliche laufenden (geradlinigen) Strahlen auf der „Richtungskugel" höchstens endlich viele analytische Kurvenstücke bilden.

Im folgenden sei der Absorptionskoeffizient $\alpha(P)$ als vorgegebene stetige Ortsfunktion betrachtet. Das Medium werde nun an der Begrenzung in vorgeschriebener Weise bestrahlt, etwa so — wir beschränken uns auf den einfachsten Fall —, daß durch S_a von außen nach innen keine Strahlung eintritt, während durch S_i Strahlung von vorgegebener konstanter Intensität J_0 in das Medium eindringt. Der unter diesen Bedingungen sich einstellende Gleichgewichtszustand der Strahlung im Sinne von § 1 ist dann zu bestimmen. Die Aufgabe lautet also:

$\Phi(P)$ und $J\left(P, \vec{s}\right)$ sind als Lösungen von (Ia) und (IIIa) so zu bestimmen, daß die Randbedingungen

$$J\left(P_a, \vec{s}\right) = 0, \quad J\left(P_i, \vec{s}\right) = J_0 \tag{2}$$

für alle vom jeweiligen Randpunkt in das Gebiet T hineinweisenden Richtungen $\vec{s}$ erfüllt werden.

Wir beweisen, daß unter noch zu präzisierenden normalen Verhältnissen diese Aufgabe immer genau eine Lösung besitzt. Wenn der Absorptionskoeffizient nicht von vornherein gegeben ist, so ergibt sich wenigstens $\Phi(P)$ als eindeutiges „Funktional" von $\alpha(P)$.

Wir integrieren zunächst die Differentialgleichung (Ia) für J unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen (2) längs irgendeines (geradlinigen) Strahles. Dann ergibt sich einmal

$$J\left(P, \vec{s}\right) = \int_{P_a}^{P} \Phi(\Pi) \left| d e^{-\int_{\Pi}^{P} \alpha \, ds} \right| \tag{3}$$

für jede Richtung $\vec{s} = \overrightarrow{P_a P}$, d. h. für alle von der Außenfläche S_a aus innerhalb T nach P laufenden Strahlen, und andererseits für alle Richtungen $\vec{s} = \overrightarrow{P_i P}$

$$J\left(P, \vec{s}\right) = \int_{P_i}^{P} \Phi(\Pi) \left| d e^{-\int_{\Pi}^{P} \alpha \, ds} \right| + J_0 e^{-\int_{P_i}^{P} \alpha \, ds}; \tag{3a}$$

Π bedeutet dabei den bei der Integration auf dem Strahl in der Strahlrichtung laufenden Punkt. Die rechte Seite von (3) und den ersten Summanden rechts in (3a) kann man allgemein in der Form

$$\int_{P_S}^{P} \Phi(\Pi) \left| d e^{-\int_{\Pi}^{P} \alpha\, ds} \right|$$

schreiben. Setzt man nunmehr (3) und (3a) in (IIIa) ein und bezeichnet man mit Ω_i den räumlichen Öffnungswinkel, unter welchem vom Punkte P aus der von P „sichtbare" Teil des Innenrandes S_i „erscheint", so erhält man die lineare Integralgleichung

$$\Phi(P) = L(\Phi)_P + J_0 \cdot F(P) \tag{4}$$

mit den Abkürzungen

$$F(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_i} e^{-\int_{P_i}^{P} \alpha\, ds}\, d\Omega, \tag{4a}$$

$$L(\Phi)_P = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_{P_S}^{P} \Phi(\Pi)\, d e^{-\int_{\Pi}^{P} \alpha\, ds} \tag{4b}$$

für den linearen Integraloperator L; die Richtungsintegration ist hier so zu verstehen, daß P_S (P_i in (4a)) immer den im infinitesimalen Öffnungskegel $d\Omega$ „sichtbaren" Randpunkt von T bedeutet. In (4b) ist das Integral über die volle Richtungskugel zu erstrecken; dieses Integral ist mit Rücksicht auf die am Anfang des Paragraphen vorausgeschickte Bemerkung gewiß sinnvoll. Im übrigen geht der Integraloperator L in den Hilbertschen Operator über, wenn man das Integral auf die Form eines gewöhnlichen Raumintegrals bringt. Aus Durchsichtigkeitsgründen behalten wir jedoch im folgenden die Form (4b) bei. Der Operator besitzt eine besondere Eigenschaft, von der bereits Herr Hilbert in seiner Arbeit über den isothermen Fall wesentlichen Gebrauch gemacht hat, und die auch in der vorliegenden Untersuchung eine Hauptrolle spielt. Er besitzt die leicht ersichtliche

Positivitätseigenschaft. In T sei $\alpha(P) > 0$. Ist in T ständig $f(P) \geqq 0$, so ist auch an allen Stellen P in T $L(f)_P \geqq 0$; hierbei kann an einer Stelle P nur dann das Gleichheitszeichen stehen, wenn im ganzen von P aus „übersehbaren" Teil von T die (als stetig vorausgesetzte) Funktion $f(P)$ verschwindet.

Die Integralgleichung (4) zur Bestimmung von Φ läßt sich äußerst einfach diskutieren. Vorerst seien noch einige Bemerkungen über die Funktion

$$1 - L(1)_P = \frac{1}{4\pi} \int e^{-\int_{P_S}^{P} \alpha\, ds}\, d\Omega \tag{5}$$

vorausgeschickt. Die untere Grenze dieser Funktion ist gewiß $\geqq 0$ und $\leqq 1$ und sei mit $e^{-\frac{1}{2}D}$ bezeichnet; die nichtnegative Zahl D heiße der *optische Durchmesser* des Mediums. Er liefert ein Maß für die durchschnittliche Absorption der Strahlung längs der in T' verlaufenden Strahlen. Die Benennung ist dadurch motiviert, daß die Funktion $-\log(1-L(1)_P)$, deren obere Grenze ja $\frac{D}{2}$ ist, zwischen den Grenzen

$$\operatorname{Min} \int_{P_S}^{P} \alpha \, ds \leqq \log \frac{1}{1-L(1)_P} \leqq \operatorname{Max} \int_{P_S}^{P} \alpha \, ds,$$

d. h. zwischen der größten und kleinsten optischen Entfernung des Punktes P von dem von P aus sichtbaren Teile des Randes von T gelegen ist. Wir erinnern dabei an die oft verwandte Bezeichnung „optische Entfernung" zweier (in T geradlinig verbindbarer) Punkte P_1, P_2 für das Integral $\int_{P_1}^{P_2} \alpha \, ds$. Aus der Definition von D folgt die Ungleichung

$$L(1)_P \leqq 1 - e^{-\frac{1}{2}D}. \tag{6}$$

Die Konvergenz der Neumannschen Reihe für die Lösung von (4)

$$\Phi(P) = J_0 \cdot \{F(P) + L(F)_P + L_2(F)_P + L_3(F)_P + \cdots\}, \tag{7}$$

unter L_n den n-mal wiederholten Operator verstanden, ist nun eine fast unmittelbare Folge aus (6) und aus der Positivität des Operators L. Es ist nämlich

$$L_n(F) \leqq (1 - e^{-\frac{1}{2}D})^n;$$

für $n = 1$ folgt dies aus $F \leqq 1$ (vgl. (4a)) und aus (6), und durch Schluß von n auf $n+1$ ergibt sich dies allgemein wegen

$$L_{n+1}(F) = L(L_n(F)) \leqq (1 - e^{-\frac{1}{2}D})^n \cdot L(1).$$

Somit ist (7) die (natürlich einzige) Lösung der Integralgleichung (4). Hat man so $\Phi(P)$ als positive und stetige Ortsfunktion gefunden, so ergibt sich die Strahlungsintensität aus (3) bzw. (3a). $J\left(P, \vec{s}\right)$ ergibt sich dabei im allgemeinen als nur abteilungsweise stetige Funktion der Richtung $\vec{s}$, indem nämlich alle Richtungen $\vec{s}$, in deren unmittelbarer Nachbarschaft sowohl Punkte von S_a als auch von S_i sichtbar sind, im allgemeinen Sprungstellen der Funktion J darstellen. Um diesen physikalisch plausiblen Umstand, daß man von P aus die innere Grenzfläche S_i scharf berandet sieht, auch mathematisch zu beleuchten, sei zunächst bemerkt, daß in T

$$\Phi(P) < J_0 \tag{8}$$

sein muß; dies folgt unmittelbar daraus, daß $J' = J_0 - J$ und $\Phi' = J_0 - \Phi$ die Intensität und die mittlere Intensität für denjenigen Strahlungszustand

darstellen, welcher den (vertauschten) Grenzbedingungen

$$J' = 0 \text{ auf } S_i, \quad J' = J_0 \text{ auf } S_a$$

für alle in das Gebiet T hineinweisenden Richtungen genügt. Wir denken uns nun einen Strahl, der von einem Punkte P_a der Außengrenze kommend vor der Ankunft im Punkte P noch einen Punkt P_i der Innengrenze trifft. Für den Intensitätssprung $J_i - J_a$ ergibt sich dann aus (3) und (3a) und mit Rücksicht auf (8) die untere Grenze

$$J_i - J_a = J_0 e^{-\int_{P_i}^{P} \alpha\, ds} - \int_{P_a}^{P_i} \Phi(\Pi) \left| d e^{-\int_{\Pi}^{P} \alpha\, ds} \right| \geqq J_0 e^{-\int_{P_a}^{P} \alpha\, ds}.$$

Dieser Sprung zeigt sich insbesondere auch bei dem in § 3 gestreiften Spezialfalle (scharfer Sonnenrand), während die Beispiele von § 4 und § 6 eine Ausnahmestellung einnehmen. Dort ist auch die in der unteren Grenze auftretende optische Länge $\int_{P_a}^{P} \alpha\, ds$ unendlich groß. In allen von den eben behandelten verschiedenen Richtungen ist indessen die Strahlungsintensität eine stetige Funktion des Ortes und der Richtung.

Durch die obigen Betrachtungen ist die eingangs gestellte Randwertaufgabe gelöst. Die Neumannsche Reihe konvergiert bei großem optischem Durchmesser im allgemeinen langsam. Zur quantitativen Erfassung der Verhältnisse sind hier andere Darstellungen von $\Phi(P)$ geeigneter (vgl. Jaffé 1. Es handelt sich dabei um die Eddingtonsche Reihenentwicklung der Strahlungsintensität nach Kugelfunktionen). Auf die exakte Behandlung hierher gehöriger Fragen hoffe ich bei anderer Gelegenheit zurückzukommen. In Grenzfällen, wo D unendlich groß ist (vgl. z. B. § 5), müssen andere Randwertaufgaben gestellt werden.

§ 3.

Bemerkung zum Sonderfall des kugelsymmetrischen Modells.

Das Gebiet T sei das Äußere einer Kugel mit dem Radius $r = r_0$, und das in T eingebettete Medium sei entsprechend kugelsymmetrisch geschichtet, so daß der Absorptionskoeffizient α nur von r abhängt. Wir setzen voraus, daß die „optische Tiefe“

$$\tau_0 = \int_{r_0}^{\infty} \alpha(r)\, dr$$

des Mediums endlich ist. Als äußere Randfläche fassen wir im folgenden die unendlich ferne Kugel $r = \infty$ auf. Die Randbedingungen seien die gleichen wie in § 2. Die äußere Grenzbedingung ist hier so aufzufassen,

daß die Strahlungsintensität $J\left(P, \vec{s}\right)$ nach Null konvergiert, wenn man P auf irgendeinem aus dem Unendlichen kommenden Strahl der Richtung $\vec{s}$ rückwärts ins Unendliche laufen läßt.

Die Überlegungen von § 2 bleiben hier unverändert bestehen, sobald die Endlichkeit des optischen Durchmessers D nachgewiesen wird. Das Strahlungsfeld wird dann natürlich kugelsymmetrisch. Φ ist hier also eine Funktion von r allein; sie wird wiederum durch die Neumannsche Reihe dargestellt. Die Intensität hängt nur von r und dem Winkel ϑ zwischen Radiusvektor $\vec{r}$ und Strahlungsrichtung ab.

Von einer genaueren Untersuchung dieses Sonderfalles sei hier abgesehen. Von Wichtigkeit wäre die Prüfung gewisser Näherungsmethoden, insbesondere der im ebenen Falle (§ 4) so viel angewandten „Zweistrom-Näherung“ (vgl. Schwarzschild 2).

Wir begnügen uns hier mit dem Nachweis, daß bei endlicher optischer Tiefe τ_0 auch der optische Durchmesser D endlich sein muß. Zunächst ist

$$\frac{1}{4\pi}\int e^{-\int_{P_S}^{P}\alpha\,ds}\,d\Omega = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{-\int_{P_S}^{P}\alpha\,ds}\sin\vartheta\,d\vartheta,$$

unter $\overrightarrow{P_S P}$ bei der Integration immer einen solchen Strahl verstanden, der mit dem zum Punkte P hinweisenden Radiusvektor den Winkel ϑ bildet, also

$$\frac{1}{4\pi}\int e^{-\int_{P_S}^{P}\alpha\,ds}\,d\Omega > \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\int_{P_S}^{P}\alpha\,ds}\sin\vartheta\,d\vartheta. \tag{9}$$

Für alle Strahlrichtungen ϑ mit $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ liegt nun P_S im Unendlichen und man hat

$$\int_{P_S}^{P}\alpha\,ds = \int_r^{\infty}\alpha(\varrho)\,\frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - r^2\sin^2\vartheta}} < |\sec\vartheta|\cdot\int_r^{\infty}\alpha\,d\varrho \leqq \tau_0\,|\sec\vartheta|.$$

Also ist die rechte Seite von (9) größer als

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\tau_0|\sec\vartheta|}\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\tau_0 s}}{s^2}\,ds,$$

und somit $e^{-\frac{1}{2}D}$, nach Definition die untere Grenze der linken Seite von (9), nicht kleiner als $\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\tau_0 s}}{s^2}\,ds$, womit für den optischen Durchmesser D eine (grobe) nur von τ_0 abhängige obere Schranke gewonnen ist.

§ 4.

Der ebene Fall (Schwarzschildsches Modell).

Das einfachste in den Aufgabenkreis von § 2 gehörige Beispiel ist der Fall eines planparallel geschichteten Mediums (Vernachlässigung der Oberflächenkrümmung in der Sternatmosphäre), das von zwei Ebenen (innere und äußere Atmosphärengrenze) begrenzt wird. Der Absorptionskoeffizient hängt nur vom Abstande x von der äußeren Grenze ab.

$$\tau = \int_0^x \alpha(x)\, dx$$

sei die „optische Tiefe" unter der Oberfläche. Ihr Höchstbetrag τ_0 wird wie in § 3 die optische Tiefe des Mediums genannt. Bei endlichem τ_0 ist natürlich auch hier der optische Durchmesser D endlich, so daß alle Überlegungen von § 2 anwendbar sind. Φ wird dann nur von τ, und J nur von τ und dem Winkel ϑ zwischen Strahlungsrichtung und der von innen nach außen weisenden Schichtnormalen $\overrightarrow{-x}$ abhängen.

Für jede Richtung $\overrightarrow{ds}$ ist offenbar

$$ds = -\,dx \sec\vartheta, \qquad \alpha\, ds = -\,d\tau \sec\vartheta,$$

und die Grundgleichungen (Ia) und (IIIa) gehen in

$$\cos\vartheta \cdot \frac{\partial J(\tau,\vartheta)}{\partial \tau} = J(\tau,\vartheta) - \Phi(\tau), \tag{10}$$

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\pi J(\tau,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta \tag{11}$$

über. Der Nettostromvektor $\mathfrak{N}$ hat die Richtung der Schichtnormalen, und es ist ($N = -\,\mathfrak{N}_x$)

$$N = 2\pi\int_0^\pi J(\tau,\vartheta)\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta = \text{konst.} \tag{12}$$

Die Randbedingungen des Problems lauten

$$J(0,\vartheta) = 0,\ \frac{\pi}{2} < \vartheta \leqq \pi;\ J(\tau_0,\vartheta) = J_0,\ 0 \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Dem hierdurch eindeutig bestimmten Strahlungzustande entspricht nach (3) und (3a) die Intensität

$$J(\tau,\vartheta) = |\sec\vartheta| \cdot \int_0^\tau \Phi(t)\, e^{(t-\tau)\,|\sec\vartheta|}\, dt, \qquad \frac{\pi}{2} < \vartheta \leqq \pi, \tag{13}$$

$$J(\tau,\vartheta) = \sec\vartheta \cdot \int_\tau^{\tau_0} \Phi(t)\, e^{(\tau-t)\sec\vartheta}\, dt + J_0\, e^{-(\tau_0-\tau)\sec\vartheta}, \qquad 0 \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}. \tag{13a}$$

Für den Integraloperator $L_P = L_\tau$ ergibt sich nach Einführung der Integrallogarithmen

$$Ei_n(\tau) = \int_1^\infty \frac{e^{-\tau s}}{s^n}\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tau \sec\vartheta} \sec^{2-n}\vartheta \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

$$Ei_1(\tau) = Ei(\tau),$$

$$L(\Phi)_\tau = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_0} \Phi(t)\, Ei(|\tau - t|)\, dt, \tag{14}$$

und die Integralgleichung (4) geht in die Schwarzschildsche über

$$\Phi(\tau) = L(\Phi)_\tau + \frac{1}{2} J_0 \cdot Ei_2(\tau_0 - \tau). \tag{15}$$

Wir wissen bereits, daß $\Phi(\tau)$ durch die Neumannsche Reihe dargestellt wird. Die Intensität J ergibt sich als stetige Funktion von ϑ, wenigstens für $\tau \neq 0, \tau_0$. Die Stetigkeit bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ hängt eng mit der Bemerkung am Schluß von § 2 zusammen. Man beachte, daß hier alle Strahlen, die in einer Schichtebene verlaufen, für $\alpha > 0$ optisch unendlich lang sind. Durch leichte Überlegung ergibt sich auch direkt aus (13) und (13a), daß $J\left(\tau, \frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \Phi(\tau)$ für $0 < \tau < \tau_0$ ist, während für $\tau = 0$ (an der Oberfläche) $J\left(0, \frac{\pi}{2} - 0\right) = \Phi(0)$, $J\left(0, \frac{\pi}{2} + 0\right) = 0$ und analoges für $\tau = \tau_0$ gilt.

Schwarzschild hat die Lösung $\Phi(\tau)$ von (15) unter Heranziehung der Positivität des Operators L näher untersucht und gefunden, daß sie den Ungleichungen

$$J_0 \frac{\tau}{\tau_0 + 1} < \Phi(\tau) < J_0 \frac{\tau + 1}{\tau_0 + 1}$$

genügt. Ferner bewies Schwarzschild den fundamentalen Satz, daß der Strahlungszustand im ebenen Modell für $\tau_0 \to \infty$ einem Grenzzustande zustrebt (vgl. Schwarzschild 2), und zwar in folgendem Sinne. Setzt man (13) und (13a) in (12) ein, so ergibt sich die Nettokonstante N als proportional zu J_0; der Proportionalitätsfaktor ist dabei eine ganz bestimmte Funktion des Parameters τ_0. Hält man nun N[3]) fest, so strebt die noch von τ_0 abhängige Lösung $\Phi(\tau)$ von (15) für $\tau_0 \to \infty$ gegen eine stetige Grenzfunktion. Dieser Satz ist von grundlegender Bedeutung für die Theorie der Sternatmosphären. Man sieht leicht ein, daß diese Grenzfunktion der

[3]) Bei der Sonne ist die Nettostromkonstante N beobachtungsgemäß (Solarkonstante) bekannt.

homogenen Integralgleichung

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi(t)\, Ei(|\tau - t|)\, dt \tag{16}$$

genügen muß (Kostitzin 1, E. Hopf 1).

Es sei noch bemerkt, daß dieser wichtige Grenzfall, das ebene Modell von unendlicher optischer Tiefe, unabhängig von seiner Bedeutung als Limes des Schwarzschildschen Modells durch eine selbständige Problemstellung gewonnen werden kann. Wir kommen darauf im folgenden zu sprechen.

§ 5.

Singuläre Probleme. Unendlich großer optischer Durchmesser.

Wir gehen wieder auf die allgemeinen Voraussetzungen von § 2 zurück, insbesondere legen wir wieder ein räumliches, von zwei Flächen S_i und S_a begrenztes Gebiet T zugrunde. Bezüglich des Absorptionskoeffizienten $\alpha(P)$ machen wir diesmal die Annahme, daß α bei der Annäherung an die Innengrenze S_i so stark unendlich wird, daß die optische Länge jedes auf S_i mündenden Strahles unendlich groß ist. Dies ist, physikalisch gedeutet, der Fall, wenn die Fläche S_i schwarz ist, und das in T eingebettete Medium stetig in die schwarze Innenfläche übergeht (vgl. die Definition bei Hilbert 1). Auf S_a soll dagegen $\alpha(P)$ stetig bleiben. Unter diesen Umständen ist der optische Durchmesser D unendlich groß.

Wir stellen nun für die Lösungen der Grundgleichungen (Ia) und (IIIa) die Grenzbedingungen

$$J\left(P_a, \vec{s}\right) = 0 \tag{17}$$

für alle von P_a nach innen weisende Richtungen $\vec{s}$, und

$$\lim_{P \to P_i} \frac{J\left(P, \overrightarrow{P_i P}\right)}{\Phi(P)} = 1 \tag{17a}$$

bei beliebiger Annäherung an irgendeinen Punkt P_i von S_i. (17a) bedeutet, daß die von der Innenfläche S_i kommende Strahlung nahe bei S_i nahezu isotrop ist. Die hiermit gestellte Randwertaufgabe ist *homogen*.

Es kann nun leicht gezeigt werden, daß für jeden diesen Bedingungen genügenden Strahlungszustand die mittlere Intensität $\Phi(P)$ der homogenen Integralgleichung

$$\Phi(P) = L(\Phi)_P \tag{18}$$

genügen muß, unter L den in § 2 definierten Integraloperator verstanden. Für die von der Außengrenze S_a kommende Strahlung gilt jedenfalls unverändert (3) für die Intensität. Sie muß jedoch unter den obigen Be-

dingungen auch für die von S_i ausgehende Strahlung erfüllt sein. Um dies einzusehen, betrachte man einen von irgendeinem Punkte P_i von S_i ausgehenden und in einem Punkte P_a von S_a endenden Strahl. Die optische Entfernung des auf diesem Strahl laufenden Punktes von dem auf der Außengrenze gelegenen Endpunkte P_a sei mit τ bezeichnet. Es ist dann $d\tau = -\alpha\, ds$, und (Ia) lautet längs jenes Strahles

$$\frac{dJ}{d\tau} = J - \Phi, \quad J = J(\tau), \quad \Phi = \Phi(\tau). \tag{19}$$

Die Grenzbedingung (17a) lautet

$$\lim_{\tau=\infty} \frac{J(\tau)}{\Phi(\tau)} = 1. \tag{20}$$

Die Integration von (19) ergibt nun

$$e^{-\tau} J(\tau) = e^{-\tau^*} J(\tau^*) - \int_{\tau^*}^{\tau} \Phi(t)\, e^{-t}\, dt$$

und, da wir nur nichtnegative Funktionen J, Φ betrachten,

$$\int_{\tau^*}^{\tau} \Phi\, e^{-t}\, dt \leqq e^{-\tau^*} \cdot J(\tau^*).$$

Also konvergiert jedenfalls das Integral $\int_0^{\infty} \Phi(t)\, e^{-t}\, dt$. Die allgemeine Lösung von (19) mit $J \geqq 0$ lautet demnach

$$e^{-\tau} J(\tau) = c + \int_{\tau}^{\infty} \Phi\, e^{-t}\, dt \qquad (c \geqq 0), \tag{21}$$

und (20) verlangt die Limesbeziehung

$$\lim_{\tau=\infty} \frac{c + \int_{\tau}^{\infty} \Phi(t)\, e^{-t}\, dt}{\Phi(\tau)\, e^{-\tau}} = 1.$$

Für die Konstante folgt hieraus $c = 0$, da der Nenner als Integrand eines konvergierenden Integrals für $\tau \to \infty$ beliebig kleiner Werte fähig ist. Also gilt allgemein für die von der Innenfläche S_i ausgehende Strahlung

$$J\left(P, \overrightarrow{P_i P}\right) = \int_{P_i}^{P} \Phi(\Pi) \left| d e^{-\int_{\Pi}^{P} \alpha\, ds} \right|.$$

Setzt man dies nebst (3) in (IIIa) ein, so folgt, daß $\Phi(P)$ der homogenen Integralgleichung (18) genügen muß.

Eine befriedigende Behandlung von (18) ist mir im allgemeinen Falle nicht gelungen. Doch erscheint es mir wahrscheinlich, daß (18) bis auf

einen konstanten Faktor eine einzige positive Lösung[4]) besitzt, wenigstens unter der Voraussetzung, daß die Niveauflächen der Funktion $\alpha(P)$ zusammen mit der Innenfläche S_i eine analytische Schar analytischer Flächen bilden. Der freibleibende Faktor kann etwa durch Vorgabe der gesamten in der Zeiteinheit aus S_a austretenden Strahlung

$$\int_{S_a} \mathfrak{N}_n \, d\sigma$$

(n = Richtung der Außennormalen von S_a) festgelegt werden. Wir begnügen uns im folgenden mit der vollständigen Lösung des Problems für den ebenen Fall.

§ 6.

Zur Theorie des Milneschen Modells.

Das einfachste in der Richtung von § 5 liegende Modell liegt bei einem planparallel geschichteten Medium von unendlicher optischer Tiefe vor ($0 \leqq \tau < \infty$). Der Strahlungszustand genügt wieder den Fundamentalgleichungen (10) und (11), und die Grenzbedingungen (17) und (17a) lauten hier

$$(22) \quad J(0, \vartheta) = 0, \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta \leqq \pi; \quad \lim_{\tau = \infty} \frac{J(\tau, \vartheta)}{\Phi(\tau)} = 1, \quad 0 \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Die homogene lineare Integralgleichung (18) geht hier nach § 4 in die Milnesche Integralgleichung (16)

$$(23) \qquad \Phi(\tau) = L(\Phi)_\tau \equiv \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi(t) \, Ei(|\tau - t|) \, dt$$

über (vgl. E. A. Milne 1). Sie ist übrigens singulär. Ersetzt man den Faktor $\frac{1}{2}$ vor dem Integralzeichen durch λ, so ist, wie eine nähere Untersuchung zeigt (vgl. E. Hopf 3), jedes λ mit $0 < \lambda \leqq \frac{1}{2}$ ein Eigenwert der Integralgleichung. Für den Nettostrom durch die Flächeneinheit jeder Schicht gilt natürlich wieder (12),

$$(24) \qquad N = 2\pi \int_0^\pi J(\tau, \vartheta) \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \text{konst.}$$

In § 4 wurde bereits bemerkt, daß die Existenz einer positiven Lösung von (23) aus den Schwarzschildschen Sätzen hergeleitet werden kann. Wegen der neuen Problemstellung, um die es sich hier handelt, wollen wir jedoch einen neuen kurzen Beweis hierfür geben. Vorher sei noch bemerkt,

[4]) Hierbei ist nach dem Muster des in § 6 behandelten Falles zu erwarten, daß $\Phi(P)$ für $P \to S_i$ über alle Grenzen wächst.

daß sich für die Strahlungsintensität in unserem Falle nach den Ausführungen von § 5

$$J(\tau,\vartheta)=\frac{1}{\cos\vartheta}\cdot\int_{\tau}^{\infty}\Phi(t)\,e^{\frac{\tau-t}{\cos\vartheta}}\,dt,\qquad 0\leqq\vartheta<\frac{\pi}{2}, \tag{25}$$

$$J(\tau,\vartheta)=\frac{1}{|\cos\vartheta|}\cdot\int_{0}^{\tau}\Phi(t)\,e^{\frac{t-\tau}{|\cos\vartheta|}}\,dt,\qquad \frac{\pi}{2}<\vartheta\leqq\pi \tag{25a}$$

ergibt. Multipliziert man übrigens (10) mit $\cos\vartheta\sin\vartheta$ und integriert man über $0<\vartheta<\pi$, so erhält man (vgl. Eddington 1, § 225) wegen (24) die Gleichung

$$\int_{0}^{\pi}J(\tau,\vartheta)\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta=\frac{N}{2\pi}\tau+\text{konst.}^{5}). \tag{26}$$

Existenzbeweis (vgl. E. Hopf 1). Da das ganze Problem ein lineares und homogenes ist, bleibt noch eine willkürliche Konstante frei. Es ist angemessen, die Nettostromkonstante N [6]) diese Rolle übernehmen zu lassen. Wir beweisen, daß eine Lösung des Problems existiert,

$$\Phi(\tau)=\frac{3}{4\pi}N\cdot\varphi(\tau), \tag{27}$$

wobei die Funktion $\varphi(\tau)$ zwischen den Grenzen

$$\tau+\frac{1}{2}<\varphi(\tau)<\tau+1 \tag{27a}$$

gelegen ist.

Zu diesem Zweck ist vor allem zu zeigen, daß es eine den Bedingungen (27a) genügende Lösung $\varphi(\tau)$ der Milneschen Integralgleichung $\varphi(\tau)=L(\varphi)_{\tau}$ gibt. Durch leichte Rechnungen (partielle Integrationen u. dgl.) ergibt sich, daß die rechte und die linke Seite in (27a) den Integralgleichungen

$$\tau+\frac{1}{2}=L\left(t+\frac{1}{2}\right)_{\tau}+\underline{\frac{1}{4}Ei_2(\tau)-\frac{1}{2}Ei_3(\tau)}, \tag{28}$$

$$\tau+1=L(t+1)_{\tau}+\underline{\frac{1}{2}Ei_2(\tau)-\frac{1}{2}Ei_3(\tau)} \tag{28a}$$

genügen. Mit Rücksicht auf die leicht zu beweisende Ungleichung

$$Ei_3(\tau)<Ei_2(\tau)<2\,Ei_3(\tau)\qquad(\tau>0$$

---

[5]) Die bei der Ableitung dieser Formel stillschweigend vorgenommene Vertauschung in der Reihenfolge der Differentiation und Integration ist leicht als erlaubt nachzuweisen.

[6]) Vgl. Fußnote [5]).

olgt, daß das unterstrichene Glied in (28) dauernd negativ, in (28a) auernd positiv ist (für $\tau > 0$), d. h. es bestehen die Integralungleichungen

$$\tau + \tfrac{1}{2} < L\left(t + \tfrac{1}{2}\right)_\tau, \qquad \tau + 1 > L(t+1)_\tau \quad \text{für} \quad \tau > 0.$$

Durch fortgesetzte Anwendung der Operation L auf diese Ungleichungen rhält man wegen der Positivität des Operators L die Ungleichungen

$$L_n\left(t + \tfrac{1}{2}\right)_\tau < L_{n+1}\left(t + \tfrac{1}{2}\right)_\tau, \qquad L_n(t+1)_\tau > L_{n+1}(t+1)_\tau \quad \text{für} \quad \tau > 0,$$

d. h. die Funktionen $L_n(t + \frac{1}{2})_\tau$ bilden eine monoton aufsteigende, die $L_n(t+1)$ eine monoton absteigende Folge von Funktionen. Dabei liegt wegen $L_n(\frac{1}{2})_\tau > 0$ jede Funktion der ersten Folge ganz unterhalb jeder Funktion der zweiten Folge. Also existiert gewiß die Grenzfunktion

$$\varphi(\tau) = \lim_{n=\infty} L_n(\tau + 1)_\tau,$$

von der leicht einzusehen ist, daß sie stetig und eine Lösung der Integralgleichung $\varphi(\tau) = L(\varphi)_\tau$ ist (vgl. Genaueres bei E. Hopf 1). Aus der Art des Konstruktionsverfahrens folgt natürlich, daß $\varphi(\tau)$ den Ungleichungen (27a) genügt. Übrigens wäre es denkbar, daß die andere von den beiden Funktionenfolgen zu einer von $\varphi(\tau)$ verschiedenen Grenzfunktion und damit zu einer von ihr wesentlich verschiedenen Lösung der Milneschen Integralgleichung führt. Aus dem weiter unten bewiesenen Eindeutigkeitssatze folgt jedoch, daß dieses in Wirklichkeit nicht stattfindet. Das homogene Problem ist damit als gelöst zu betrachten.

Um den Strahlungszustand bei gegebener Nettostromkonstante N zu bestimmen, setzen wir

$$\Phi(\tau) = \gamma\,\varphi(\tau) \tag{29}$$

für die mittlere Strahlungsintensität $\Phi(\tau)$ und bestimmen den Zusammenhang zwischen den Konstanten γ und N.

Setzt man (29) in (25) und (25a) ein, so erhält man wegen (27a) nach leichten Abschätzungen

$$\gamma(\tau - 2) < J(\tau, \vartheta) < \gamma(\tau + 2), \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi,$$

voraus speziell

$$\lim_{\tau=\infty} \frac{J(\tau, \vartheta)}{\tau} = \gamma, \qquad \lim \frac{J(\tau, \vartheta)}{\Phi(\tau)} = 1$$

gleichmäßig für $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ folgt. Insbesondere ist also die zweite Grenzbedingung (22) wirklich erfüllt. Mit Rücksicht auf die Relation (26) erhält man somit den gewünschten Zusammenhang $\gamma = \frac{3}{4\pi} N$, d. h. (27) als Lösung des Problems.

Wir ergänzen die obigen einfachen Betrachtungen durch den etwas versteckter gelegenen

Eindeutigkeitsbeweis (vgl. E. Hopf 2). Wir zeigen, daß das obige Problem im physikalischen Sinne nur eine einzige Lösung zuläßt, d. h. wir beweisen, daß jede positive Lösung $\Phi(\tau)$ der Milneschen Integralgleichung (23) notwendig gleich konst. $\varphi(\tau)$ sein muß, unter $\varphi(\tau)$ die Lösung verstanden, deren Existenz oben bewiesen wurde[7]). Diese letztere hat wegen (27a) die Eigenschaft

$$\lim_{\tau=\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} = 1. \tag{30}$$

Wir benutzen beim Beweise das folgende

Lemma 1. Jede stetige Lösung $f(\tau)$ der Integralgleichung $f(\tau) = L(f)_\tau$, welche die untere Grenze ihres Wertevorrates wirklich annimmt, ist nichtnegativ für $\tau \geqq 0$.

Beweis. $f(\tau)$ möge sein Minimum an der Stelle $\tau = \tau_0$ annehmen, so daß also ständig $f(\tau) \geqq f(\tau_0)$ ist. Dann ist wegen der Positivität des Operators L

$$f_0 = f(\tau_0) = L(f)_{\tau_0} \geqq L(f_0)_{\tau_0} = f_0 \cdot L(1)_{\tau_0},$$

d. h.

$$f_0 (1 - L(1)_{\tau_0}) \geqq 0.$$

Der zweite Faktor ist, wie allgemein aus (5) oder aus der hier stattfindenden Spezialisierung $1 - L(1)_\tau = \frac{1}{2} Ei_2(\tau)$ von (5) zu entnehmen ist, positiv. Somit ist $f_0 \geqq 0$, w. z. b. w.

Aus diesem Hilfssatz folgt leicht das

Lemma 2. Jede stetige Lösung $g(\tau)$ von $g(\tau) = L(g)_\tau$, welche für alle genügend großen τ nichtnegativ ist, muß für alle τ nichtnegativ sein.

Beweis. Nach der Voraussetzung über $g(\tau)$ müßte, wenn $g(\tau)$ irgendwo negativ wäre, diese Funktion ihre untere Grenze wirklich annehmen. Da sich dann ein Widerspruch mit Lemma 1 ergäbe, muß also ständig $g \geqq 0$ sein.

Beweis des Eindeutigkeitssatzes. Es sei nun $\Phi(\tau)$ eine beliebige stetige und *positive* Lösung von (23). Unter Einführung der Bezeichnungen

$$\lambda = \liminf_{\tau=\infty} \frac{\Phi(\tau)}{\varphi(\tau)}, \qquad \Phi^*(\tau) = \Phi(\tau) - \lambda \varphi(\tau), \tag{31}$$

wo $\varphi(\tau)$ die oben konstruierte Lösung der Milneschen Integralgleichung bedeutet, haben wir zu zeigen, daß $\Phi^*(\tau) = 0$ sein muß.

---

[7]) Ob es überhaupt keine von konst. $\varphi(\tau)$ verschiedenen Lösungen von (23) gibt, konnte ich nicht entscheiden.

Wir vergewissern uns zunächst, daß $\lambda < +\infty$ ist. Im gegenteiligen Falle hätte man nämlich $\lim_{\tau=\infty} \frac{\Phi(\tau)}{\varphi(\tau)} = \infty$, und die Funktion $\Phi(\tau) - \mu\varphi(\tau) = g(\tau)$ müßte bei beliebigem $\mu > 0$ für alle hinreichend großen τ positiv, nach Lemma 2 also für alle τ nichtnegativ ausfallen, was unmöglich ist. Die in (31) definierte Lösung $\Phi^*(\tau)$ der Integralgleichung $\Phi^*(\tau) = L(\Phi^*)_\tau$ ist also sinnvoll.

Wir zeigen dann, daß $\Phi^*(\tau) \geqq 0$ für $\tau \geqq 0$ sein muß. Nach (31) und wegen (27a) ist

$$\liminf_{\tau=\infty} \frac{\Phi^*(\tau)}{\varphi(\tau)} = \liminf_{\tau=\infty} \frac{\Phi^*(\tau)}{\tau} = 0. \tag{32}$$

$\varepsilon > 0$ sei beliebig. Die Funktion $\Phi^*(\tau) + \varepsilon\varphi(\tau)$ genügt der Milneschen Integralgleichung und ist wegen (32) für alle hinreichend großen τ positiv. Somit ist nach Lemma 2 ständig $\Phi^*(\tau) + \varepsilon\varphi(\tau) \geqq 0$, also, da ε beliebig war, $\Phi^*(\tau) \geqq 0$ für $\tau \geqq 0$.

Damit haben wir eine nichtnegative, der Bedingung (32) genügende Lösung $\Phi^*(\tau)$ der Milneschen Integralgleichung gewonnen. Folgendermaßen läßt sich nun ihr identisches Verschwinden beweisen. Wegen ihrer Nichtnegativität kann die Funktion $\Phi^*(\tau)$ als mittlere Intensität eines neuen Strahlungszustandes innerhalb des Mediums aufgefaßt werden. Die betreffende Strahlungsintensität $J^*(\tau, \vartheta)$ $(J^* \geqq 0)$ bestimmt sich aus (25) und (25a) und der betreffende Nettostrom $N^* \geqq 0$ aus (24). Nach (26) ist dann

$$\int_0^\pi J^*(\tau, \vartheta) \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{N^*}{2\pi}\tau + \text{konst.}$$

Die linke Seite ist hier gewiß nicht größer als die doppelte rechte Seite in (11) — man versehe dort Φ und J mit dem Sternchen —, d. h. es ist

$$2\Phi^*(\tau) \geqq \frac{N^*}{2\pi}\tau + \text{konst.}$$

Wegen (32) folgt aber daraus $N^* = 0$. Aus (24) ergibt sich dann mit Rücksicht auf die Grenzbedingung $J^*(0, \vartheta) = 0$, $\frac{\pi}{2} < \vartheta \leqq \pi$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^*(0, \vartheta) \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = 0,$$

somit $J^*(0, \vartheta) = 0$ für $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ und wegen (25) endlich $\Phi^*(\tau) \equiv 0$, w. z. b. w.

Auf Einzelfragen bezüglich des Milneschen Modells sei hier nicht weiter eingegangen (vgl. E. Hopf 4).

Literaturverzeichnis.

A. S. Eddington. 1. Der innere Aufbau der Sterne. Übers. v. E. v. d. Pahle Berlin 1928.

D. Hilbert. 1. Begründung der elementaren Strahlungstheorie, Phys. Zeitschr. 1 (1912), S. 1056.

E. Hopf. 1. Zum Problem des Strahlungsgleichgewichts in den äußeren Schichte der Sterne, Zeitschr. f. Phys. 46 (1928), S. 374. — 2. Über Strahlungsgleichgewicht i den äußeren Schichten der Sterne, Zeitschr. f. Phys. 49 (1928), S. 155. — 3. Übe lineare Integralgleichungen mit positivem Kern, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1928. XVIII. — 4. Remarks on the Schwarzschild-Milne model of the outer layers of a star, Monthl Not. of the R. Astr. Soc. 90 (1930), S. 287.

G. Jaffé. 1. Grundriß einer Theorie des anisotropen Strahlungsfeldes, Ann. d Phys. 68 (1922), S. 583. — 2. Idem, Ann. d. Phys. 70 (1922), S. 457.

E. A. Milne. 1. Radiative equilibrium in the outer layers of a star, Monthl Not. of the R. Astr. Soc. 81 (1921), S. 361. — 2. The structure and opacity of stellar atmosphere, Phil. Trans. of the R. Soc. of London A, 288 (1929), S. 421.

K. Schwarzschild. 1. Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre, Gött. Nachr 1906, S. 1. — 2. Über Diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre, Sitzungsber d. Berl. Akad. 1914, S. 1183.

V. Kostitzin. 1. Sur quelques équations integrales de la physique moleculaire Moskau 1926.

(Eingegangen am 5. März 1930.)

Über unendliche kommutative Gruppen.

Von

Alfred Haar in Szeged.

Einleitung.

1. Die Lehre der endlichen Abelschen Gruppen verdankt man in erster Reihe den grundlegenden Arbeiten von Frobenius, Stickelberger und Weber; die Gruppencharaktere spielen in dieser Theorie eine ausgezeichnete und überaus wichtige Rolle. Man gelangt zu diesem Begriff, indem man ein System von komplexen Zahlen zu bestimmen sucht, das mit einer vorgelegten kommutativen Gruppe n-ter Ordnung isomorph ist, wenn man als Verknüpfungsregel die Multiplikation ansieht. Ein Gruppencharakter besteht daher aus n Größen, deren jede eine n-te Einheitswurzel ist, und man zeigt, daß die Anzahl der verschiedenen Charaktere ebenfalls gleich n ist, ferner, daß die so erhaltene quadratische Matrix — wenn man sie noch mit $\sqrt{n}$ dividiert — eine unitäre ist. Das wesentlichste Hilfsmittel, vermöge deren man diese Sätze beweist, ist die sogenannte Basis der Gruppe; die Schwierigkeit besteht eben in dem Beweise der Existenz einer Basis.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Theorie der Gruppencharaktere auf solche kommutative Gruppen zu übertragen, welche aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehen; solche Gruppen kommen in den verschiedensten Zweigen der Algebra und der Zahlentheorie häufig vor. Die erste Schwierigkeit, die dabei auftritt, rührt davon her, daß bei solchen unendlichen Gruppen im allgemeinen das Analogon der Basis fehlt. Betrachtet man etwa die Gesamtheit der reellen (positiven und negativen) rationalen Zahlen, so bilden diese eine kommutative Gruppe, wenn man die *Addition* als Verknüpfungsregel ansieht (das Einheitselement ist dabei die Null); man zeigt aber unschwer, daß diese Gruppe keine Basis besitzt. Mit anderen Worten, es ist nicht möglich, eine solche Teilmenge $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ der rationalen Zahlen zu finden, daß vermöge dieser jede rationale Zahl r in *eindeutiger Weise* in der Form $r = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 + \ldots$ darstell-

bar sei, wobei $m_1, m_2, m_3, \ldots$ endlich viele (positive oder negative) ganze Zahlen bedeuten[1]).

Andererseits liefert aber die *unendliche zyklische Gruppe*, die aus den positiven und negativen Potenzen eines Elementes A besteht:

$$\ldots A^{-2}, A^{-1}, A^0 = E, A^1, A^2, \ldots$$

ein Beispiel, wo man das Analogon der Gruppencharaktere unmittelbar angeben kann. Ordnet man dem Element $A^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ die Funktion

$$e^{2i\pi ns} \qquad (0 \leqq s \leqq 1)$$

zu, so sind bei jedem Wert von s den Gruppenelementen solche Größen zugeordnet, welche offenbar mit der vorgelegten Gruppe isomorph sind, wenn man die Multiplikation als Verknüpfungsregel ansieht. Das obige unitär-orthogonale Funktionensystem spielt daher in diesem Falle eine ähnliche Rolle, wie die durch die Gruppencharaktere definierte unitäre Matrix bei den endlichen Abelschen Gruppen. Die Anzahl der „Darstellungen" der obigen unendlichen Gruppe ist daher nicht abzählbar unendlich groß, wie man es auf Grund der Analogie mit den endlichen Gruppen erwarten könnte; ja es werden sogar die isomorphen Darstellungen durch die obigen Funktionen nicht einmal erschöpft; darin besteht eben der große Unterschied zwischen der Theorie der endlichen und unendlichen kommutativen Gruppen.

2. Durch das obige Beispiel der unendlichen zyklischen Gruppe wird der Gedanke nahegelegt, die Frage zu stellen, *ob nicht zu jeder aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehenden kommutativen Gruppe ein isomorphes unitär-orthogonales Funktionensystem existiert*? Bekanntlich bezeichnet man ein (etwa im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ definiertes) Funktionensystem

$$\mathsf{X}_1(s), \mathsf{X}_2(s), \mathsf{X}_3(s), \ldots, \mathsf{X}_n(s), \ldots$$

als ein unitär-orthogonales System, falls die Beziehungen

$$\int_0^1 \mathsf{X}_p(s)\, \overline{\mathsf{X}}_q(s)\, ds = \delta_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{für } p = q, \\ 0, & \text{für } p \gtrless q \end{cases}$$

statthaben, wobei $\overline{\mathsf{X}}_q(s)$ die zu $\mathsf{X}_q(s)$ konjugiert komplexe Funktion bezeichnet. In gleicher Weise sagen wir, daß die für $0 \leqq s \leqq 1$ definierten Funktionen

$$\chi_1(s), \chi_2(s), \chi_3(s), \ldots, \chi_n(s), \ldots$$

---

[1]) In der Tat, es sei n eine beliebige ganze Zahl und $\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \mu_3 \alpha_3 + \ldots$ die Darstellung von $\frac{r}{n}$; wegen der angenommenen Eindeutigkeit der Darstellung durch die obige Basis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ würde daraus, falls $r = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots$ die Darstellung von r ist, folgen, daß $m_1 = n \mu_1$, d. h. daß m_1 durch jede ganze Zahl teilbar ist.

in unitär-orthogonales System in bezug auf die reelle nichtabnehmende Funktion $\sigma(s)$ (definiert im selben Intervall) bilden, falls

$$\int_0^1 \chi_p(s)\,\bar{\chi}_q(s)\,d\sigma(s) = \delta_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist.

Die oben gestellte Frage steht im engen Zusammenhange mit einem Problem, das ich — allerdings für reelle orthogonale Funktionensysteme — in meiner kürzlich erschienenen Arbeit „Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme" behandelt habe[2]). Ähnliche Betrachtungen, wie die daselbst entwickelten, führen mich in der vorliegenden Arbeit zu den beiden folgenden Sätzen, die für die hier behandelten unendlichen Gruppen ein volles Analogon dessen liefern, was in der Theorie der endlichen Abelschen Gruppen durch die Gruppencharaktere geleistet wird.

Satz I. *Es seien*

$$E, A, B, C, \ldots$$

die Elemente einer aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehenden kommutativen Gruppe; E sei das Einheitselement. Es existiert ein System von Funktionen

$$\chi_E(s) = 1,\ \chi_A(s),\ \chi_B(s),\ \chi_C(s), \ldots,$$

definiert im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$, ferner eine im selben Intervall definierte reelle nicht abnehmende Funktion $\sigma(s)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. *jede dieser Funktionen ist im betrachteten Intervall überall stetig mit etwaiger Ausnahme einer abzählbaren Punktmenge, wo sie einen endlichen Sprung besitzen können; ferner ist für alle Stellen des Intervalls*

$$|\chi_A(s)| = |\chi_B(s)| = |\chi_C(s)| = \ldots = 1,$$

2. *es gilt für jedes Paar von Gruppenelementen A, B und für alle s die Beziehung*

$$\chi_A(s)\,\chi_B(s) = \chi_{AB}(s),$$

d. h. die obigen Funktionen sind mit der vorgelegten Gruppe isomorph; insbesondere ist daher $\chi_{A^{-1}}(s) = \bar{\chi}_A(s)$;

3. *es gelten die Integralrelationen*

$$\int_0^1 \chi_A(s)\,\bar{\chi}_B(s)\,d\sigma(s) = \delta_{A,B} = \begin{cases} 1 & \text{für } A = B, \\ 0 & \text{für } A \neq B, \end{cases}$$

d. h. die Funktionen $\chi_A(s)$ bilden ein unitär-orthogonales System in bezug auf $\sigma(s)$;

[2]) Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 769—798.

4. *es gilt endlich die sogenannte Vollständigkeitsrelation*

$$\int_0^1 u(s)\,v(s)\,d\sigma(s) = \sum_{(A)} \int_0^1 u(s)\,\chi_A(s)\,d\sigma(s) \int_0^1 v(s)\,\bar{\chi}_A(s)\,d\sigma(s)$$

für jedes Paar von stetigen Funktionen $u(s)$, $u(s)$, wobei die Summation auf alle Gruppenelemente A zu erstrecken ist.

ɔ. Eine unendliche Gruppe, bei der jedes Element so beschaffen ist, daß eine endliche Potenz dieses Elementes (diese Potenz muß natürlich nicht für alle Elemente dieselbe sein) gleich dem Einheitselement ist, bezeichne ich als *uneigentlich unendliche Gruppe*. Eine *eigentlich unendliche Gruppe* besitzt daher mindestens ein Element, dessen sämtliche Potenzen voneinander verschieden sind. Für eine aus *abzählbar vielen Elementen bestehende eigentlich unendliche kommutative Gruppe $E, A, B, C, \ldots$ gilt der folgende*

Satz II. *Es existiert ein System von Funktionen*

$$\mathsf{X}_E(s) = 1,\ \mathsf{X}_A(s),\ \mathsf{X}_B(s),\ \mathsf{X}_C(s), \ldots$$

definiert im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. *jede dieser Funktionen ist mit etwaiger Ausnahme einer höchstens abzählbar unendlichen Punktmenge, wo sie eventuell einen endlichen Sprung erleidet, überall stetig, und es ist für alle s*

$$|\mathsf{X}_A(s)| = |\mathsf{X}_B(s)| = |\mathsf{X}_C(s)| = \ldots = 1;$$

2. *es gilt für jedes Paar von Gruppenelementen A, B und für alle s die Beziehung*

$$\mathsf{X}_A(s)\,\mathsf{X}_B(s) = \mathsf{X}_{AB}(s);$$

3. *es gelten die Orthogonalitätsrelationen*

$$\int_0^1 \mathsf{X}_A(s)\,\overline{\mathsf{X}}_B(s)\,ds = \delta_{A,B};$$

ferner

4. *die Vollständigkeitsrelation*

$$\int_0^1 u(s)\,v(s)\,ds = \sum_{(A)} \int_0^1 u(s)\,\mathsf{X}_A(s)\,ds \int_0^1 v(s)\,\overline{\mathsf{X}}_B(s)\,ds$$

für jedes Paar von stetigen Funktionen $u(s)$, $v(s)$.

Die Funktionen $\mathsf{X}_A(s)$ werden als *Gruppencharaktere der vorgelegten eigentlich unendlichen kommutativen Gruppe* bezeichnet[3]).

[3]) Betreffend des entsprechenden Satzes bei uneigentlichen Gruppen vgl. die Schlußbemerkungen in § 3.

4. Der soeben ausgesprochene Satz ist in doppelter Hinsicht von Interesse. Einerseits liefert er eine treue Darstellung jeder eigentlich unendlichen kommutativen Gruppe durch ein unitär-orthogonales Funktionensystem; *andererseits gelangt man vermöge dieses Satzes zu neuen, bisher nicht aufgedeckten Orthogonalsystemen*, die durch algebraische Eigenschaften charakterisiert sind und von diesem Gesichtspunkte aus mit dem Fourierschen System $e^{2i\pi ns}$ nahe verwandt sind. Es handelt sich nun darum, die Eigenschaften dieser Funktionensysteme zu untersuchen; man gelangt dabei zu solchen Eigenschaften, die — abgesehen natürlich vom Fourierschen System — kein anderes bisher bekanntes Orthogonalsystem besitzt. Im letzten Paragraphen der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit solchen Untersuchungen. Für das Fouriersche System gilt z. B. die bemerkenswerte Tatsache, daß jede Funktion dieses Systems der Funktionalgleichung

$$f(s)f(t) = f(s+t)$$

genügt. Analoges gilt für die soeben erhaltenen Gruppencharaktere; es gilt nämlich der folgende[4])

Satz III. *Es seien* $\chi_A(s), \chi_B(s), \chi_C(s), \ldots$ *die im Satze* II *angegebenen Gruppencharaktere einer eigentlich unendlichen kommutativen Gruppe. Es existieren zwei feste, nur von der Gruppe abhängige, für* $0 \leqq s, t \leqq 1$ *definierte Funktionen*

$$u(s,t) \quad \text{und} \quad v(s,t),$$

so daß für jedes Gruppenelement A die Beziehungen

$$\chi_A(s)\chi_A(t) = \chi_A(u(s,t))$$

fast überall richtig sind; mit anderen Worten, die Gruppencharaktere besitzen ein gemeinsames Multiplikationstheorem. Analog gilt fast überall (für jedes A)

$$\chi_A(s)\bar{\chi}_A(t) = \chi_A(v(s,t)).$$

5. Wie bereits bemerkt, ist die Methode, mit der diese Sätze bewiesen werden, dieselbe, die ich in meiner oben angeführten Arbeit angewendet habe, nämlich die von Hilbert begründete Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. In § 1 wird die vorgelegte Gruppe durch ein System von unendlichen Matrizen dargestellt; dies ist nichts anderes, als die bei endlichen Gruppen wohlbekannte Darstellung durch eine Substitutionsgruppe. § 2 bringt die Konstruktion der Gruppencharaktere. Die Sätze I und II werden im § 3 bewiesen; § 4 enthält den Beweis des Satzes III, ferner einige weitere Eigenschaften der in diesem Satz mit $u(s,t)$ und $v(s,t)$ bezeichneten Funktionen.

[4]) Dies entspricht bei endlichen Abelschen Gruppen der bekannten Tatsache, daß das Produkt zweier Gruppencharaktere wiederum ein Gruppencharakter ist.

§ 1.

Über die reguläre Darstellung unendlicher Gruppen.

1. Wir legen unseren Untersuchungen eine kommutative Gruppe zugrunde, die aus abzählbar unendlich vielen Elementen besteht; wir wenden zur Bezeichnung der Elemente der Gruppe große lateinische Buchstaben $E, A, B, \ldots, P, Q, \ldots$ an, das Einheitselement sei stets E. Unseren Ausgangspunkt bildet die in der Gruppentheorie vielfach angewandte einfachste Darstellung einer Gruppe als Substitutionsgruppe oder — was damit gleichbedeutend ist — die Darstellung durch die zugehörigen (in unserem Falle natürlich unendlichen) Matrizen. Die fragliche Darstellung ist bekanntlich die folgende:

Man ordnet jedem Element der Gruppe eine Unbestimmte zu (wir bezeichnen diese bzw. mit $x_A, x_B, x_C, \ldots$) und betrachten die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_A, x_B, x_C, \ldots \\ x_{AP}, x_{BP}, x_{CP}, \ldots \end{pmatrix},$$

wobei P irgendein Element der Gruppe ist; man zeigt leicht, daß die Gesamtheit dieser Substitutionen eine mit der vorgelegten Gruppe isomorphe Gruppe bildet. Man gelangt aus dieser Darstellung durch Einführung eines neuen Systems von Unbestimmten $x'_A, x'_B, x'_C, \ldots$ zu einer Darstellung der Gruppe durch lineare Transformationen, indem man dem Gruppenelement P die Transformation

$$x'_A = x_{AP}, \qquad x'_B = x_{BP}, \qquad x'_C = x_{CP}, \ldots$$

zuordnet; daher bilden auch die Matrizen dieser Transformationen eine Gruppe, welche zu der vorgelegten holoedrisch isomorph ist. Wir bezeichnen diese Matrizen in herkömmlicher Weise mit $(A), (B), (C), \ldots$. Man kann übrigens das allgemeine Element dieser Matrizen leicht angeben; setzen wir

$$(A) = (c^{(A)}_{P,Q}), \qquad (B) = (c^{(B)}_{P,Q}), \qquad (C) = (c^{(C)}_{P,Q}), \ldots,$$

wobei P und Q alle Gruppenelemente durchlaufen, so finden wir unmittelbar

$$c^{(A)}_{P,PA} = 1, \qquad c^{(A)}_{P,Q} = 0 \quad \text{für} \quad Q \neq PA$$

oder — indem man das Symbol $\delta_{P,Q}$ einführt ($\delta_{P,P} = 1$, $\delta_{P,Q} = 0$ für $P \neq Q$)

$$c^{(A)}_{P,Q} = \delta_{PA,Q}. \tag{1}$$

Man erkennt daraus unmittelbar, daß dem Einheitselement der Gruppe die Einheitsmatrix zugeordnet ist, ferner — was für das Folgende von Wichtigkeit sein wird — daß, falls A vom Einheitselement verschieden ist, alle *Diagonalelemente* $c^{(A)}_{P,P}$ *der entsprechenden Matrix* (A) *verschwinden*. Die Matrizen (A) sind *unendliche orthogonale*, also *beschränkte* Matrizen und man kann auch ohne Mühe durch Anwendung der Hilbertschen

altungssätze durch einfache Rechnung verifizieren (was übrigens aus dem orangehenden bereits folgt), daß die Komposition dieser Matrizen mit er vorgelegten Gruppe isomorph ist, d. h. es gilt

$$(A)(B) = (AB),$$

ür $B = A^{-1}$ erhält man insbesondere

$$(A^{-1}) = (A)^{-1}.$$

2. Ist die vorgelegte Gruppe kommutativ, so sind die soeben konruierten Matrizen vertauschbar; es gilt ferner die Tatsache, daß jede eschränkte Matrix $U = (u_{P,Q})$ (mit reellen oder komplexen Elementen), die it jeder der obigen Matrizen $A, B, C, \ldots$ vertauschbar ist, in der Form

$$(U) = \sum_{(A)} \gamma_A (A) \tag{2}$$

arstellbar ist, wobei die Quadratsumme der Beträge der Koeffizienten γ_A onvergiert [5]).

In der Tat [6]), es folgt aus der Beziehung $(A)(U) = (U)(A)$, mit ücksicht auf (1), unmittelbar für jedes P, Q

$$\sum_{(K)} c^{(A)}_{P,K}\, u_{K,Q} = \sum_{(K)} u_{P,K}\, c^{(A)}_{K,Q}, \quad \text{d. h.} \quad u_{PA,Q} = u_{P,QA^{-1}},$$

lso auch (für $P = E$) $u_{A,Q} = u_{E,QA^{-1}}$. Setzt man daher zur Abkürzung $_A = u_{E,A}$, so folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{(A)} |\gamma_A|^2$ aus der angeommenen Beschränktheit der Matrix (U); ferner ist

$$\sum_{(A)} \gamma_A\, c^{(A)}_{P,Q} = \sum_{(A)} \gamma_A\, \delta_{PA,Q} = \gamma_{P^{-1}Q} = u_{E,P^{-1}Q} = u_{P,Q},$$

nd dies ist unsere Behauptung (2).

Insbesondere folgt hieraus $u_{PP} = \gamma_E$, d. h. *sämtliche Diagonalelemente iner mit allen* (A) *vertauschbaren beschränkten Matrix* (U) *haben denelben Wert.*

3. Die Diskussion der Spektra der Matrizen (A) ist leicht durchzuühren. Aus der Orthogonalität dieser Matrizen folgt zunächst, daß das pektrum nur aus solchen Werten bestehen kann, deren absoluter Betrag leich 1 ist. Ist A ein Gruppenelement von unendlicher Ordnung (d. h. eine Potenz von A ist gleich dem Einheitselement), so kann man zeigen, aß jeder Wert λ, dessen Betrag gleich 1 ist, dem Spektrum von (A) an-

[5]) Vgl. auch J. v. Neumann: „Zur Algebra der Funktionaloperationen", Math. nnalen **102** (1930), S. 419.

[6]) Es bedeuten — in üblicher Weise — die Bezeichnungen $\sum_{(A)}$ bzw. $\sum_{(P,Q)}$ usw., aß die Summation auf alle Elemente bzw. Elementenpaare der Gruppe zu errecken ist.

gehört. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde die Matrix $(A)-\lambda(E)$ eine beschränkte Reziproke besitzen; d. h. es würde eine beschränkte Matrix $(U)=(u_{P,Q})$ existieren, so daß (für alle P, Q)

$$(3) \qquad \sum_{(K)} (c^{(A)}_{P,K} - \lambda \delta_{P,K}) u_{K,Q} = u_{PA,Q} - \lambda u_{P,Q} = \delta_{P,Q}$$

ausfällt. Daraus ergibt sich aber ein Widerspruch folgendermaßen: Aus der obigen Relation entspringen, wenn man darin für P sukzessive die Elemente $Q, QA, QA^2, \ldots, QA^{n-1} \neq Q, \ldots$ einsetzt, die Beziehungen

$$u_{QA,Q} = 1 + \lambda u_{Q,Q},\ u_{QA^2,Q} = \lambda u_{QA,Q}, \ldots, u_{QA^n,Q} = \lambda u_{QA^{n-1},Q},$$

d. h.

$$u_{QA^n,Q} = \lambda^{n-1}(1 + \lambda u_{Q,Q}).$$

Da ferner wegen der Beschränktheit von (U) die Quadratsumme $\sum_{(K)} |u_{K,Q}|^2$ konvergiert — also um so mehr auch die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} |u_{QA^n,Q}|^2$ —, so muß, da $|\lambda| = 1$ ist, $u_{Q,Q} = -\frac{1}{\lambda}$ sein, d. h. alle Diagonalelemente von (U) haben denselben Wert $= -\frac{1}{\lambda}$.

Durch Induktion folgt hieraus für jedes Gruppenelement P und für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ die Richtigkeit der Gleichung

$$u_{P,PA^n} = -\frac{1}{\lambda^{n+1}}.$$

Nimmt man nämlich die Richtigkeit dieser Relation für den Exponenten n an und setzt in (3) PA^{n+1} an Stelle von Q, so ergibt sich

$$-\frac{1}{\lambda^{n+1}} = u_{PA,PA^{n+1}} = \lambda u_{P,PA^{n+1}}, \text{ d. h. } u_{P,PA^{n+1}} = -\frac{1}{\lambda^{n+2}}.$$

Es wäre daher für jedes ganzzahlige n

$$|u_{P,PA^n}| = 1,$$

was wegen der Beschränktheit von (U) unmöglich ist.

4. Ist aber (A) ein Gruppenelement von der endlichen Ordnung n, so besteht das Spektrum von (A) aus den n-ten Einheitswurzeln. In der Tat, sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die fraglichen Einheitswurzeln, so folgt aus der Identität

$$(\mu(A) - (E))(\mu(A) - \lambda_2(E)) \ldots (\mu(A) - \lambda_n(E)) = (\mu^n - 1)(E)$$

unmittelbar, daß, falls $\mu^n \neq 1$ ist, die Matrix $\mu(A) - (E)$ eine beschränkte Reziproke besitzt, d. h. daß das Spektrum von (A) nur aus den n-ten Einheitswurzeln bestehen kann. Daß umgekehrt jede n-te Einheitswurzel λ dem Spektrum von (A) angehört, erkennt man am einfachsten, indem man das zugehörige homogene Gleichungssystem betrachtet. Dieses lautet:

$$(4) \qquad \lambda x_P = x_{PA},$$

wobei P alle Elemente der Gruppe durchläuft. Setzt man

$$x_E = 1, \quad x_A = \lambda, \quad x_{A^2} = \lambda^2, \ldots, \quad x_{A^{n-1}} = \lambda^{n-1}$$

und für alle übrigen Variablen $x_Q = 0$ $(Q \neq E, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$, so ist das obige Gleichungssystem (mit Rücksicht auf $\lambda^n = 1$, $A^n = E$) offenbar erfüllt, woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Für das Folgende ist die Tatsache von Wichtigkeit, daß, falls A wiederum ein Gruppenelement von unendlicher Ordnung bedeutet, das homogene Gleichungssystem (4) bei keinem λ eine Lösung besitzen kann, d. h. die Matrix (A) besitzt kein Punktspektrum. (Ein Wertsystem x_P wird — wie stets in dieser Theorie — nur dann als Lösung betrachtet, falls die Quadratsumme $\sum_{(P)} |x_P|^2$ konvergent ist.) Im entgegengesetzten Falle erhielte man nämlich durch Quadrierung der Beträge der Gleichungen (4) und Addition: $|\lambda| = 1$, was ja bereits aus dem Umstande folgt, daß das Spektrum von (A) aus diesen Werten besteht. Würde es eine nichttriviale Lösung von (4) geben und etwa $x_Q \neq 0$ sein, so wäre

$$x_{AQ} = \lambda x_Q, \quad x_{A^2Q} = \lambda^2 x_Q, \ldots, \quad x_{A^nQ} = \lambda^n x_Q, \ldots .$$

Da alle Elemente $A^n Q$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ voneinander verschieden sind, so müßte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{A^nQ}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n|^2 |x_Q|^2$$

als Teilreihe der konvergenten Reihe $\sum_{(P)} |x_P|^2$ ebenfalls konvergent sein, was wegen $|\lambda| = 1$ nicht der Fall ist.

Wir können diese Tatsachen, wie folgt, zusammenfassen:

Ist (A) ein Gruppenelement von unendlicher Ordnung, so besteht das Spektrum der zugehörigen Matrix (A) aus allen Werten vom Betrage 1, *und das zugehörige homogene Gleichungssystem* (4) *ist stets unlösbar; ist aber A ein Gruppenelement von der endlichen Ordnung n, so besteht das Spektrum von (A) aus allen n-ten Einheitswurzeln, und es besitzt das Gleichungssystem* (4) *bei solchen Werten von λ eine nichttriviale Lösung.*

§ 2.

Konstruktion der Gruppencharaktere.

1. Es ist bequem, an Stelle der orthogonalen Matrix (A) die zugehörige unendliche Bilinearform zu betrachten; d. h. wir setzen — indem wir zwei Variablenreihen x_P und y_Q einführen —

$$A(x, y) = \sum_{(P,Q)} c_{P,Q}^{(A)} x_P y_Q .$$

Auf diese Formen wenden wir einen Satz an, der gleichzeitig von den Herren J. v. Neumann und A. Wintner gefunden wurde[7]); die fragliche liche Tatsache ist ein genaues Analogon der Hilbertschen Spektraldarstellung der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen für orthogonale (bzw. unitäre) Formen und lautet folgendermaßen:

Zu jeder reellen orthogonalen (bzw. unitären) Form von unendlich vielen Veränderlichen $U(x, y)$ gehört eine Schar von vertauschbaren beschränkten Hermiteschen Einzelformen

$$\sigma(\mu; x, y) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\mu)\, x_P\, y_Q \qquad (0 \leqq \mu \leqq 1)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

α) es gelten für $0 \leqq \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq 1$ die Matrizengleichungen:

$$(\sigma_{P,Q}(\mu_1))\,(\sigma_{P,Q}(\mu_2)) = (\sigma_{P,Q}(\mu_2))\,(\sigma_{P,Q}(\mu_1)) = (\sigma_{P,Q}(\mu_1));$$

β) bezeichnet $\bar{x}_P$ den konjugierten Wert von x_P, so stellen die Hermiteschen Formen

$$\sigma(\mu; x, \bar{x}) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\mu)\, x_P\, \bar{x}_Q \qquad (\overline{\sigma_{P,Q}(\mu)} = \sigma_{Q,P}(\mu)),$$

bei jedem festen zulässigen Wert der Unbestimmten x_P eine nicht abnehmende, an jeder inneren Stelle des Intervalls $0 \leqq \mu \leqq 1$ von links stetige Funktion von μ dar, welche außerdem den Gleichungen

$$\sigma(0; x, \bar{x}) = 0, \qquad \sigma(1; x, \bar{x}) = \sum_{(P)} |x_P|^2$$

---

[7]) A. Wintner, „Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen", Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 228—282; insbesondere S. 269. J. v. Neumann, „Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren", Math. Annalen 102 (1929), S. 49—132; insbesondere S. 111.

Anmerkung während der Korrektur. Man kann die Anwendung des fraglichen Satzes übrigens leicht vermeiden und die folgenden Schlüsse direkt auf die Hilbertsche Spektraldarstellung der Hermiteschen Formen gründen. Aus der Orthogonalität unserer Matrizen (P) folgt nämlich in wohlbekannter Weise, daß

$$P_1 = \frac{(P) + (P^{-1})}{2} \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{(P) - (P^{-1})}{2i}$$

vertauschbare Hermitesche Matrizen sind, und es ist $(P) = P_1 + i P_2$. Wendet man daher den in § 2 meiner angeführten Arbeit bewiesenen Satz auf die unendlich vielen vertauschbaren Matrizen $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, \ldots$ an, so gelangt man auf Grund der simultanen Spektraldarstellung dieser Formen direkt zu der Formel (9) der vorliegenden Arbeit.

Den soeben skizzierten Weg werde ich bei einer anderen Gelegenheit, bei der Behandlung der Multiplikationstabelle der allgemeinen unitär-orthogonalen Funktionensysteme (vgl. die Schußbemerkung der vorliegenden Arbeit), einschlagen; ich habe es vorgezogen, zum Zwecke des hier vorliegenden Spezialfalls den fraglichen Hilfssatz heranzuziehen.

genügt. Mit Hilfe dieser Formenschar läßt sich die vorgelegte orthogonale Form durch das Stieltjessche Integral

$$U(x, y) = \int_0^1 e^{2i\pi\mu}\, d\sigma(\mu; x, y)$$

darstellen.

Man erkennt leicht, wie man aus der vorgelegten orthogonalen Form $U(x, y)$ unmittelbar zu der zugehörigen Hermiteschen Form

$$\mathfrak{U}(x, y) = \int_0^1 \mu\, d\sigma(\mu; x, y)$$

gelangen kann. Die beschränkte Form

$$(5)\quad \mathfrak{U}_n(x, y) = \frac{1}{2i}\left\{(U - U^{-1}) - \frac{1}{2}(U^2 - U^{-2}) + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(U^n - U^{-n})\right\}$$
$$= \int_0^1 \left\{\sin 2\pi\mu - \frac{1}{2}\sin 4\pi\mu + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin 2n\pi\mu\right\} d\sigma(\mu; x, y)$$

ist offenbar eine Hermitesche, da wegen der Orthogonalität (und Realität) von U (also auch von $U^2, U^3, \ldots, U^n$) Inverse und Transponierte übereinstimmen. Nach einem wohlbekannten Satz der Theorie der Fourierschen Reihen bleiben die Teilsummen der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin 2n\pi\mu \qquad (0 \leqq \mu \leqq 1)$$

dem Betrage nach unterhalb einer festen (auch von μ unabhängigen) Schranke M. Daher ist auch für jedes n die Hermitesche Form

$$|\mathfrak{U}_n(x, \bar{x})| \leqq M \sum_{(P)} |x_P|^2,$$

und es gilt in der Terminologie von Herrn F. Riesz[8]) die Limesgleichung

$$\mathfrak{U}_n \to \mathfrak{U}.$$

Wendet man diese Betrachtungen auf alle Elemente $A, B, C, \ldots$ der vorgelegten kommutativen Gruppe an, so erhält man für die entsprechenden orthogonalen Bilinearformen eine Darstellung der obigen Art

$$(6)\qquad A(x, y) = \int_0^1 e^{2i\pi\mu}\, d\sigma^{(A)}(\mu; x, y).$$

Die zugehörigen Hermiteschen Formen

$$\mathfrak{A}(x, y) = \int_0^1 \mu\, d\sigma^{(A)}(\mu; x, y)$$

---

[8]) F. Riesz, „Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues", Paris 1913, S. 107.

(wobei A alle Gruppenelemente durchläuft) sind alsdann ebenfalls vertauschbar. Denn aus der Vertauschbarkeit der Matrizen (A) und (B) folgt offenbar dieselbe Eigenschaft für die wie oben in (5) konstruierten Matrizen $(\mathfrak{A}_n)$, $(\mathfrak{B}_n)$, und daraus für deren Limites und $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$.

2. Auf die so erhaltenen Hermiteschen Formen bzw. auf die zugehörigen Scharen von Einzelformen

$$\sigma^{(A)}(\mu; x, y), \quad \sigma^{(B)}(\mu; x, y), \quad \sigma^{(C)}(\mu; x, y), \ldots$$

wende ich nun die im § 2 meiner in der Einleitung angeführten Arbeit im Anschluß an Untersuchungen von J. v. Neumann gewonnenen Resultate an, die — wie daselbst ausdrücklich bemerkt — nicht nur für reelle symmetrische, sondern auch für Hermitesche Formen gültig sind. Aus der Vertauschbarkeit der Formen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ folgt vorab, daß sämtliche obigen Einzelformen (bei jedem Wert von μ) vertauschbar sind. Wir greifen sodann eine abzählbare, im Intervall $0 \leqq \mu \leqq 1$ überall dichte Punktmenge $\mathfrak{M}$ heraus, die aus den Größen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \ldots$ besteht, und betrachten die Formen

$$\sigma^{(A)}(\mu^{(k)}; x, y), \quad \sigma^{(B)}(\mu^{(k)}; x, y), \ldots \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

nach dem Vorgange von Herrn J. v. Neumann [9]) konstruieren wir dazu (wörtlich wie in 2., § 2 a. a. O. [2])) eine Schar von Einzelformen

$$\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\lambda)\, x_P\, y_Q \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

welche die obigen Eigenschaften $\alpha)$ und $\beta)$ besitzt, mit deren Hilfe man die Formen (7) durch ein Stieltjessches Integral

$$\begin{aligned} \sigma^{(A)}(\mu^{(k)}; x, y) &= \int_0^1 f_A(\lambda, \mu^{(k)})\, d\sigma(\lambda; x, y), \\ \sigma^{(B)}(\mu^{(k)}; x, y) &= \int_0^1 f_B(\lambda, \mu^{(k)})\, d\sigma(\lambda; x, y), \text{ usf.} \end{aligned} \tag{8}$$

darstellen kann. Die Haupteigenschaften der für $0 \leqq \lambda \leqq 1$, $0 \leqq \mu \leqq 1$ definierten Funktionen $f_A(\lambda, \mu)$, $f_B(\lambda, \mu)$, $f_C(\lambda, \mu), \ldots$ sind die folgenden (vgl. 3. und 4., § 2 a. a. O. [2])):

1. jede dieser Funktionen nimmt nur die Werte 0 und 1 an;

2. gehört $\mu^{(k)}$ der obigen Menge $\mathfrak{M}$ an, so ist $f_A(\lambda, \mu^{(k)})$, $f_B(\lambda, \mu^{(k)})$, $f_C(\lambda, \mu^{(k)}), \ldots$, als Funktion von λ aufgefaßt, in endlich vielen abgeschlossenen Intervallen gleich 1;

3. für jedes feste λ ist jede dieser Funktionen, als Funktion von μ aufgefaßt, eine für $\mu = 0$ verschwindende, nicht abnehmende Funktion.

---

[9]) A. a. O. [5]), S. 401.

Wir definieren endlich die Funktionen

$$\omega_A(\lambda),\ \omega_B(\lambda),\ \omega_C(\lambda), \ldots$$

vermöge der folgenden Vorschrift: Es sei

$$f_A(\lambda, \mu) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \mu < \omega_A(\lambda),$$
$$f_A(\lambda, \mu) = 1 \quad \text{für} \quad \omega_A(\lambda) < \mu \leqq 1.$$

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionen sind in 5., § 2 meiner genannten Arbeit bewiesen. Bezeichnet man als Konstanzintervall von $\sigma(\lambda; x, y)$ ein offenes Teilintervall von $0 \leqq \lambda \leqq 1$, falls für zwei beliebige Punkte λ' und λ'' dieses Teilintervalls die Gleichung $\sigma(\lambda'; x, y) = \sigma(\lambda''; x, y)$ bei allen zulässigen Werten der Unbestimmten x_P, y_Q statthat und falls dieses Intervall nicht echter Teil eines größeren Intervalls derselben Art ist, so lautet der fragliche Satz folgendermaßen:

Die im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ definierten Funktionen $\omega_A(\lambda)$ sind an solchen Stellen, welche von den Mittelpunkten der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x, y)$ verschieden sind, stetig; sie besitzen an den letztgenannten Mittelpunkten — falls sie daselbst nicht ebenfalls stetig sind — eine Diskontinuität erster Art, d. h. es existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte $\omega_A(\lambda - 0)$ und $\omega_A(\lambda + 0)$; die Anzahl derjenigen Unstetigkeitsstellen, wo der Sprung von $\omega_A(\lambda)$ eine gegebene positive Größe übersteigt, ist endlich.

3. Auf Grund dieser Tatsachen kann man die Richtigkeit der Relationen

$$A(x, y) = \int_0^1 e^{2i\pi\omega_A(\lambda)}\, d\sigma(\lambda; x, y)$$

in ähnlicher Weise beweisen wie die entsprechenden Beziehungen (27) im § 3 meiner erwähnten Arbeit. In der Tat, es folgt zunächst die Existenz des rechts stehenden Stieltjesschen Integrals aus der letzten Eigenschaft der Funktionen $\omega_A(\lambda)$, die sich unmittelbar auf die Funktion $e^{2i\pi\omega_A(\lambda)}$ überträgt. Ferner folgt aus der Formel (6), daß $A(x, y)$ gleich dem Grenzwert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi\mu_k}[\sigma^{(A)}(\mu_k; x, y) - \sigma^{(A)}(\mu_{k-1}; x, y)]$$

ist, wenn die Anzahl der Teilungspunkte μ_k unbegrenzt derartig wächst, daß das Maximum von $\mu_k - \mu_{k-1}$ gegen Null konvergiert. Wir können annehmen, daß diese Teilungspunkte

$$\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n$$

der obigen in $[0, 1]$ überall dichten Punktmenge $\mathfrak{M}$ angehören, und es sei δ der größte Wert der Differenzen $\mu_k - \mu_{k-1}$. Für die obige endliche

Summe ergibt sich — mit Rücksicht auf (8) — die Darstellung

$$S_\varepsilon = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi\mu_k}[f_A(\lambda, \mu_k) - f_A(\lambda, \mu_{k-1})]\, d\sigma(\lambda; x, y).$$

Die im Integranden stehende endliche Summe ist auf Grund der Eigenschaften der Funktionen $f_A(\lambda, \mu)$ bzw. auf Grund der Definition von $\omega_A(\lambda)$ leicht abzuschätzen. Denn es sind bei jedem λ offenbar alle Differenzen

$$f_A(\lambda, \mu_k) - f_A(\lambda, \mu_{k-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

bis auf eine gleich Null; diese nichtverschwindende Differenz (ihr Wert ist gleich 1) ist, falls $\omega_A(\lambda)$ von den Größen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ verschieden ist, diejenige, für die $\mu_{k-1} < \omega_A(\lambda) < \mu_k$; ist aber $\omega_A(\lambda) = \mu_{k-1}$, so ist die fragliche Differenz entweder diejenige, für die $\mu_{k-1} = \omega_A(\lambda) < \mu_k$, oder diejenige, für die $\mu_{k-2} < \omega_A(\lambda) = \mu_{k-1}$ ist, je nachdem $f_A(\lambda, \omega_A(\lambda)) = 0$ oder $= 1$ ist. In allen Fällen hat der Integrand von S_ε die Form

$$e^{2i\pi[\omega_A(\lambda) + \nu_A(\lambda)]} d\sigma(\lambda; x, y),$$

wobei $|\nu_A(\lambda)| < \varepsilon$ ist, da das fragliche μ_{k-1} bzw. μ_k jedenfalls zwischen den Grenzen $\omega_A(\lambda) - \varepsilon$ und $\omega_A(\lambda) + \varepsilon$ liegt. Folglich ist die Differenz

$$\int_0^1 e^{2i\pi\omega_A(\lambda)} d\sigma(\lambda; x, y) - S_\varepsilon = \int_0^1 e^{2i\pi\omega_A(\lambda)}(1 - e^{2i\pi\nu_A(\lambda)})\, d\sigma(\lambda; x, y)$$

dem Betrage nach kleiner als

$$\int_0^1 |1 - e^{2i\pi\nu_A(\lambda)}|\, |d\sigma(\lambda; x, y)| \leqq \int_0^1 4\pi^2 |\nu_A(\lambda)|^2\, |d\sigma(\lambda; x, y)|$$
$$\leqq 4\pi^2\varepsilon^2 \int_0^1 |d\sigma(\lambda; x, y)|,$$

d. h. es ist, da jeder Koeffizient $\sigma_{P,Q}(\lambda)$ von $\sigma(\lambda; x, y)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist,

$$A(x, y) = \lim_{\varepsilon = 0} S_\varepsilon = \int_0^1 e^{2i\pi\omega_A(\lambda)} d\sigma(\lambda; x, y). \tag{9}$$

4. Das wesentliche in der soeben abgeleiteten Formel ist die Tatsache, daß man für die zu den verschiedenen Elementen A, B, C, ... der vorgelegten Gruppe gehörenden Bilinearformen eine *simultane* Spektraldarstellung gewinnt in dem Sinne, daß die in den Darstellungen dieser Formen $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, ... auftretende Schar von Spektralformen $\sigma(\lambda; x, y)$ dieselbe ist. Die einzelnen Elemente der Gruppe werden durch die daneben stehenden Faktoren

$$e^{2i\pi\omega_A(\lambda)},\ e^{2i\pi\omega_B(\lambda)},\ e^{2i\pi\omega_C(\lambda)},\ \ldots$$

charakterisiert. Jede dieser Funktionen ist — wie oben für die Exponenten $\omega_A(\lambda)$, $\omega_B(\lambda)$, $\omega_C(\lambda)$, ... festgestellt — an jeder Stelle mit etwaiger Ausnahme der Mittelpunkte der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x, y)$ stetig. Innerhalb dieser Konstanzintervalle kann man aber den Wertevorrat dieser Funktionen beliebig abändern, da dadurch der Wert des Integrals (9) nicht beeinflußt wird. Ist etwa $\alpha < \lambda < \beta$ ein solches Konstanzintervall (an den Stellen α, β sind die Funktionen $\omega_A(\lambda)$ stetig), so wollen wir daselbst der Einfachheit halber die Funktionen $\omega_A(\lambda)$ durch die folgende Vorschrift festsetzen: Es sei

$$\omega_A(\lambda) = \omega_A(\alpha), \quad \text{für} \quad \alpha \leqq \lambda \leqq \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\omega_A(\lambda) = \omega_A(\beta), \quad \text{für} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} < \lambda \leqq \beta,$$

d. h. wir setzen fest, daß $\omega_A(\lambda)$ an den Sprungstellen von links stetig sei.

Die zugehörigen Funktionen

$$\chi_A(\lambda) = e^{2i\pi\omega_A(\lambda)} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1),$$

wobei A alle Elemente der vorgelegten Gruppe durchläuft, bezeichnen wir als die *zum Element A gehörenden Gruppencharaktere.*

Diese Funktionen, deren Betrag überall gleich 1 *ist, sind mit Ausnahme einer höchsten abzählbaren Punktmenge stetig. Jede (etwaige) Unstetigkeitsstelle ist Mittelpunkt eines solchen Intervalls, in dessen rechter und linker Hälfte diese Funktionen konstant sind; an den Unstetigkeitsstellen selbst sind diese Funktionen von links stetig.*

5. Auf eine Eigenschaft der Spektralform

$$\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\lambda)\, x_P\, y_Q$$

sei noch besonders hingewiesen. Die Darstellung (9) lehrt, daß diese Form bei jedem Wert von λ mit allen Bilinearformen $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, ... vertauschbar ist. Man erkennt dies unmittelbar aus der bekannten Tatsache, daß aus der Eigenschaft α) (vgl. 1. dieses Paragraphen) die sogenannte Hilbertsche Vollständigkeitsrelation

$$(10) \qquad \int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda) = \sum_{(K)} \int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma_{P,K}(\lambda) \int_0^1 v(\lambda)\, d\sigma_{K,Q}(\lambda)$$

folgt, wobei $u(\lambda)$ und $v(\lambda)$ solche Funktionen bedeuten, die man durch Treppenfunktionen beliebig genau gleichmäßig approximieren kann. Aus dieser Vertauschbarkeit ergibt sich auf Grund der in 2., § 1 gemachten Bemerkung, daß alle Diagonalelemente der Spektralform bei jedem Wert von λ übereinstimmen, d. h. es gelten die Beziehungen

$$\sigma_{A,A}(\lambda) = \sigma_{B,B}(\lambda) = \sigma_{C,C}(\lambda) = \ldots.$$

6. Eng verknüpft mit den Darstellungsformeln (9) ist die Theorie des im vorigen Paragraphen betrachteten linearen Gleichungssystems (4). Mit Rücksicht auf die aus (9) entspringenden Formeln

$$(9') \qquad c_{P,Q}^{(A)} = \delta_{PA,Q} = \int_0^1 \chi_A(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda)$$

kann man die Gleichungen (4) in der folgenden Form schreiben:

$$\lambda x_P = \sum_{(K)} x_K \int_0^1 \chi_A(\lambda)\, d\sigma_{P,K}(\lambda),$$

wobei P alle Elemente der Gruppe durchläuft.

Man zeigt nun in derselben Weise wie in der Hilbertschen Theorie der symmetrischen quadratischen Formen, daß, falls irgendeine der Funktionen $\sigma_{P,Q}(\lambda)$ an einer Stelle $\lambda = \lambda_0$ unstetig wird (die Unstetigkeit kann nur eine Diskontinuität erster Art sein), so besitzt das obige Gleichungssystem für $\lambda = \lambda_0$ eine nicht identisch verschwindende Lösung. In der Tat setzt man für alle Elemente K der Gruppe (bei hinreichend kleinem positiven h)

$$x_K(h) = \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{K,Q}(\lambda) = \sigma_{K,Q}(\lambda_0+h) - \sigma_{K,Q}(\lambda_0-h),$$

so wird mit Rücksicht auf die Hilbertsche Vollständigkeitsrelation (10)

$$(11) \qquad \sum_{(K)} x_K(h) \int_0^1 \chi_A(\lambda)\, d\sigma_{P,K}(\lambda) = \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} \chi_A(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda).$$

Nun ist aber wegen des Hermiteschen Charakters der Spektralform

$$\sum_{(K)} |x_K(h)|^2 = \sum_{(K)} \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{K,Q}(\lambda) \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\bar{\sigma}_{K,Q}(\lambda) = \sum_{(K)} \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{K,Q}(\lambda) \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{Q,K}(\lambda)$$
$$= \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{Q,Q}(\lambda) = \sigma_{Q,Q}(\lambda_0+h) - \sigma_{Q,Q}(\lambda_0-h) \leqq 1.$$

Geht man daher in den Gleichungen (11) zur Grenze $h = 0$ über, so werden die linken Seiten — wenn man zur Abkürzung

$$(12) \qquad x_K = \lim_{h=0} x_K(h) = \sigma_{K,Q}(\lambda_0+0) - \sigma_{K,Q}(\lambda_0-0) \qquad (x_P \neq 0)$$

einführt —

$$\sum_{(K)} c_{P,K}^{(A)} x_K.$$

Da ferner an der Stelle λ_0 die Funktion $\chi_A(\lambda)$ stetig ist (die Unstetigkeitsstellen liegen ja in den Mittelpunkten der Konstanzintervalle aller $\sigma_{P,Q}(\lambda)$), so ist der Grenzwert der rechten Seiten der Gleichungen (11)

$$\chi_A(\lambda_0)[\sigma_{P,Q}(\lambda_0+0) - \sigma_{P,Q}(\lambda_0-0)] = \chi_A(\lambda_0) x_P,$$

h. das durch (12) definierte, nicht identisch verschwindende Größen-stem x_K ist in der Tat eine Lösung der Gleichungen (4) für $\lambda = \chi_A(\lambda_0)$.

Ist aber A ein Element von unendlicher Ordnung, so kann — wie i vorigen Paragraphen bewiesen wurde — das Gleichungssystem (4) bei inem Wert von λ lösbar sein. *Eine unendliche Gruppe, welche mindestens n Element von unendlicher Ordnung besitzt, bezeichnen wir als eigentlich nendliche Gruppe.* Bei einer eigentlich unendlichen Gruppe sind daher der simultanen Spektraldarstellung (9) der zu den Gruppenelementen hörenden Bilinearformen alle Koeffizienten $\sigma_{P,Q}(\lambda)$ der Spektralform überall etige Funktionen von λ.

§ 3.

Gruppeneigenschaft, Orthogonalität und Vollständigkeit der Gruppencharaktere.

1. Die *Gruppeneigenschaft* der Funktionen $\chi_A(\lambda)$ ergibt sich aus der lgenden Bemerkung:

Ist $u(\lambda)$ eine beliebige (komplexwertige) Funktion, welche mit etwaiger usnahme der Mittelpunkte der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x, y)$ überall etig ist und welche bei jedem Wertsystem der Unbestimmten x_P, y_P e Beziehung

$$\int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = 0,$$

h. die unendlich vielen Gleichungen

$$\int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda) = 0$$

füllt, so ist an jeder Stelle außerhalb der Konstanzintervalle $u(\lambda) = 0$.

In der Tat, es folgen zunächst mit Rücksicht auf den Hermiteschen aarakter der Spektralform $\sigma(\lambda; x, y)$ (für alle Gruppenelemente P, Q) die eichungen

$$\int_0^1 \bar{u}(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda) = 0,$$

— wie stets — $\bar{u}(\lambda)$ den zu $u(\lambda)$ konjugiert komplexen Wert be-ichnet. Auf Grund der Hilbertschen Vollständigkeitsrelation (10) schließt an daraus, daß

$$\int_0^1 u(\lambda)\, \bar{u}(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda) = \sum_{(K)} \int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma_{P,K}(\lambda) \int_0^1 \bar{u}(\lambda)\, d\sigma_{K,Q}(\lambda) = 0$$

, d. h. es ist für alle x_P

$$\int_0^1 |u(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda; x, \bar{x}) = 0. \tag{3}$$

Ist nun λ_0 eine beliebige Stelle, die nicht jenen Konstanzintervalle angehört, d. h. eine Stelle von der Eigenschaft, daß es ein zugehörige Wertsystem $x_P^{(0)}$ gibt derart, daß die (reelle) nichtabnehmende Funktio $\sigma(\lambda; x^{(\cdot)}, \bar{x}^{(0)})$ von λ in jeder noch so kleinen Umgebung von λ nich konstant ist, so kann die Funktion $u(\lambda)$ an dieser Stelle nicht von Nu verschieden sein. Wäre dies nämlich der Fall, so könnte man wegen de angenommenen Stetigkeit von $u(\lambda)$ an dieser Stelle eine Umgebung $(\lambda_0 - \delta$ $\lambda_0 + \delta)$ abgrenzen, in der $|u(\lambda)| \geqq \varepsilon > 0$ ausfällt; folglich wäre

$$\int_0^1 |u(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda; x^{(0)}, \bar{x}^{(0)}) \geqq \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} |u(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda; x, y)$$

$$\geqq \varepsilon^2 [\sigma(\lambda_0 + \delta; x^{(0)}, \bar{x}^0) - \sigma(\lambda_0 - \delta, x^0, \bar{x}^0)] > 0$$

in Widerspruch mit (13).

Es seien A, B zwei beliebige Elemente der vorgelegten Gruppe (A), (B) bzw. $A(x, y)$, $B(x, y)$ die zugehörigen unendlichen Matrize bzw. Bilinearformen. Aus den Relationen (9)

$$A(x, y) = \int_0^1 \chi_A(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y), \qquad B(x, y) = \int_0^1 \chi_B(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y)$$

folgt unmittelbar (wiederum durch Anwendung der Vollständigkeitsrelation (10) daß die Matrix der Bilinearform

$$\int_0^1 \chi_A(\lambda)\, \chi_B(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y)$$

gleich dem Produkt $(A)(B)$ ist. Da aber nach der Konstruktion diese Matrizen $(A)(B) = (AB)$ ist, so folgt, daß die obige Bilinearform mit de zu dem Element AB zugeordneten Form

$$\int_0^1 \chi_{AB}(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y)$$

identisch ist. Daraus schließen wir, auf Grund der soeben vorausgeschickte Bemerkung, daß an jeder Stelle λ, die nicht innerhalb eines der Konstanz intervalle von $\sigma(\lambda; x, y)$ liegt,

$$\chi_A(\lambda)\, \chi_B(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda) \tag{14}$$

sein muß.

Man erkennt auch unschwer, daß diese Beziehungen auch dann richti bleiben, wenn λ *innerhalb* eines Konstanzintervalls liegt. Denn an irgend einer Stelle dieses Konstanzintervalls ist der Wert aller auftretenden Funk tionen gleich dem Werte dieser Funktionen an dem einen Endpunkt diese Intervalls, für den die obige Beziehung bereits bewiesen ist.

Aus der Gruppeneigenschaft (14) der Funktionen $\chi_A(\lambda)$ folgt unmittel bar, wenn man darin B mit dem Einheitselement E zusammenfallen läßt, da

$\chi_E(\lambda) = 1$ sein muß. Sind ferner A und B inverse Elemente, d. h. $AB = E$, so ergibt sich daraus $\chi_A(\lambda)\chi_{A^{-1}}(\lambda) = 1$, oder, da der absolute Betrag von $\chi_A(\lambda)$ für jedes λ gleich 1 ist,

$$\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \overline{\chi_A(\lambda)}. \tag{14'}$$

2. Die *Orthogonalität* der Gruppencharaktere ist eine Folge der Tatsache, daß, falls C nicht das Einheitselement der Gruppe ist, alle Diagonalelemente der zugehörigen Matrix (C) verschwinden (vgl. 1., § 1). Mit Rücksicht auf (9') erhält man daraus die Relationen

$$\int_0^1 \chi_C(\lambda)\, d\sigma_{P,P}(\lambda) = 0, \qquad (C \neq E),$$

welche für alle Elemente P gelten. Die so erhaltenen Gleichungen sind aber nicht verschieden, da — wie in 5., § 2 bemerkt wurde — alle Diagonalelemente der Spektralform $\sigma(\lambda; x, y)$ bei jedem λ übereinstimmen. Setzt man daher, um dies anzudeuten, zur Abkürzung

$$\sigma_{AA}(\lambda) = \sigma_{BB}(\lambda) = \sigma_{CC}(\lambda) = \ldots = \tilde{\sigma}(\lambda),$$

so reduzieren sich die obigen Gleichungen auf die folgenden:

$$\int_0^1 \chi_C(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = 0 \qquad (C \neq E). \tag{15}$$

Man erhält die Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$, indem man in der Spektralform $\sigma(\lambda; x, \bar{x})$ eine Unbestimmte gleich Eins, alle übrigen gleich Null setzt. Daher ist $\tilde{\sigma}(\lambda)$ eine reelle, nicht abnehmende Funktion von λ, die im Falle eigentlich unendlicher Gruppen sogar überall stetig ist (vgl. 6., § 2).

Es seien nun A und B zwei verschiedene Elemente der vorgelegten Gruppe. Durch Kombination der Beziehungen (14), (14'), (15) erhält man unmittelbar

$$\int_0^1 \chi_A(\lambda)\,\bar{\chi}_B(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \int_0^1 \chi_A(\lambda)\,\chi_{B^{-1}}(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \int_0^1 \chi_{AB^{-1}}(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = 0,$$

da $AB^{-1} \neq E$ ist. Ist aber $A = B$, so wird

$$\int_0^1 \chi_A(\lambda)\,\bar{\chi}_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = 1,$$

da $\tilde{\sigma}(\lambda)$ mit der Spektralform übereinstimmt, wenn man darin die Unbestimmten wie oben spezialisiert.

Die soeben erhaltenen Eigenschaften der Gruppencharaktere, die man in die Gleichung

$$\int_0^1 \chi_A(\lambda)\,\bar{\chi}_B(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \delta_{A,B} \tag{16}$$

zusammenfassen kann, drücken die Tatsache aus, daß die *Gruppencharaktere ein unitär-orthogonales Funktionensystem bilden in bezug auf die nichtabnehmende (reelle) Funktion* $\tilde{\sigma}(\lambda)$.

3. Wir zeigen ferner, daß für jedes Paar von stetigen Funktionen $u(\lambda), v(\lambda)$ (definiert im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$) die Relation

$$(17) \qquad \int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \sum_{(A)} \int_0^1 u(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) \int_0^1 v(\lambda)\, \bar{\chi}_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda)$$

gilt, die man bekanntlich als *Vollständigkeit oder Abgeschlossenheit* bezeichnet. Wir beweisen die obige Relation wie folgt[10]):

Wegen der angenommenen Stetigkeit von $u(\lambda)$ und $v(\lambda)$ sind die beiden Bilinearformen

$$U(x, y) = \int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} u_{P,Q}\, x_P\, y_Q,$$

$$V(x, y) = \int_0^1 v(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} v_{P,Q}\, x_P\, y_Q$$

offenbar beschränkt und vertauschbar. Durch Komposition erhält man aus diesen die ebenfalls beschränkte Form

$$UV(x, y) = \int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} \Big(\sum_{(K)} u_{P,K}\, v_{K,Q} \Big)\, x_P\, y_Q.$$

In derselben Weise erhält man durch Komposition dieser Formen mit

$$A(x, y) = \int_0^1 \chi_A(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} c^{(A)}_{P,Q}\, x_P\, y_Q$$

die Bilinearform

$$UA(x, y) = \int_0^1 u(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y),$$

die man (wegen der Vertauschbarkeit von U mit A) auch in der Form

$$\sum_{(P,Q,K)} u_{P,K}\, c^{(A)}_{K,Q}\, x_P\, y_Q = \sum_{(P,Q)} u_{P,QA^{-1}}\, x_P\, y_Q$$

oder

$$\sum_{(P,Q,K)} c^{(A)}_{P,K}\, u_{K,Q}\, x_P\, y_Q = \sum_{(P,Q)} u_{PA,Q}\, x_P\, y_Q$$

schreiben kann.

In gleicher Weise ergibt sich

$$\int_0^1 v(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} v_{P,QA^{-1}}\, x_P\, y_Q = \sum_{(P,Q)} v_{PA,Q}\, x_P\, y_Q.$$

---

[10]) Vgl. den analogen Beweis auf S. 794 meiner angeführten Arbeit [2]).

etzen wir in diesen Formeln etwa $x_C = y_C = 1$, alle übrigen Unbestimmten leich 0, so erhalten wir (da dabei $\sigma(\lambda; x, y)$ in $\tilde{\sigma}(\lambda)$ übergeht)

$$\int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \sum_{(K)} u_{C,K}\, v_{K,C},$$

$$\int_0^1 u(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = u_{C,CA^{-1}}, \qquad \int_0^1 v(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = v_{CA,C}.$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich aber, wenn man A durch A^{-1} ersetzt,

$$\int_0^1 v(\lambda)\, \bar{\chi}_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = v_{CA^{-1},C}.$$

Daher ist in der Tat

$$\sum_{(A)} \int_0^1 u(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) \int_0^1 v(\lambda)\, \bar{\chi}_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \sum_{(A)} u_{C,CA}\, v_{CA^{-1},C}$$

$$= \sum_{(K)} u_{C,K}\, v_{K,C} = \int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda).$$

Damit sind alle Behauptungen des in der Einleitung ausgesprochenen rsten Satzes bewiesen.

4. Der Übergang zu gewöhnlichen Integralen[11]) geschieht in bekannter Veise auf Grund einer Bemerkung von Herrn Lebesgue. Wir wollen dies nsbesondere in dem Falle eigentlich unendlicher Gruppen durchführen, wo ie obige nichtabnehmende Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ überall stetig ist.

Es sei $f(\lambda)$ eine beliebige im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ definierte Funktion on ähnlicher Art wie die Gruppencharaktere $\chi_A(\lambda)$, d. h. es sei $f(\lambda)$ stetig nit etwaiger Ausnahme gewisser Stellen, in deren Umgebung $\tilde{\sigma}(\lambda)$ konstant nd $f(\lambda)$ nur von links stetig ist. Man ordne jeder solchen Funktion $f(\lambda)$ ine Funktion $F(s)$ (definiert im selben Intervall), wie folgt zu: Ist s ein olcher, der Ungleichung

$$0 = \tilde{\sigma}(0) \leqq s \leqq \tilde{\sigma}(1) = 1$$

enügender Wert, welcher von der stetigen, nichtabnehmenden Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ n einer einzigen Stelle λ angenommen wird, so setze man

$$F(s) = F(\sigma(\lambda)) = f(\lambda);$$

immt hingegen $\tilde{\sigma}(\lambda)$ den Wert s an mehr als einer Stelle an, also an den tellen eines abgeschlossenen Intervalls $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$, so setze man

$$F(s) = f(\lambda_1).$$

Man erkennt unmittelbar, daß es höchstens abzählbar unendlich viele Verte s der zweiten Art gibt, ferner daß die soeben konstruierte Funk-

[11]) Vgl. S. 795, a. a. O. [2]).

tion $F(s)$ nur an diesen Stellen unstetig sein kann, und endlich — da $\tilde{\sigma}(\lambda)$ nicht abnehmend ist — daß $F(s)$ an den etwaigen Unstetigkeitsstellen noch von links stetig ist. Diese Zuordnung besitzt die Eigenschaft der Distributivität und ist außerdem offenbar so beschaffen, daß dem Produkte $f_1(\lambda) f_2(\lambda)$ zweier Funktionen das Produkt $F_1(s) F_2(s)$ der entsprechenden zu $f_1(\lambda)$ bzw. $f_2(\lambda)$ zugeordneten Funktionen $F_1(s)$ bzw. $F_2(s)$ entspricht. Ist schließlich $F(s)$ eine beliebige im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ definierte stetige Funktion, so kann man dazu eine ebenfalls stetige Funktion $f(\lambda)$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ so konstruieren, daß die zu $f(\lambda)$ vermöge der obigen Vorschrift zugeordnete Funktion mit $F(s)$ übereinstimmt; diese Funktion ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt; sie wird aber eindeutig festgelegt, wenn man noch die Zusatzbedingung hinzufügt, daß sie in den Konstanzintervallen von $\tilde{\sigma}(\lambda)$ selbst konstant sei.

Bei dieser Zuordnung gilt offenbar

$$\int_0^1 f(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \int_0^1 F(s)\, ds, \tag{18}$$

wie man sich durch den Vergleich der endlichen Summen, deren Grenzwert die beiden auftretenden Integrale sind, leicht überzeugt.

5. Bezeichnet man daher die zu den Gruppencharakteren $\chi_A(\lambda)$, $\chi_B(\lambda)$, $\chi_C(\lambda), \ldots$ vermöge der obigen Konstruktion zugeordneten Funktionen bzw. mit $X_A(s), X_B(s), X_C(s), \ldots$, so sind alle so erhaltenen Funktionen, deren Betrag ebenfalls überall gleich Eins ist, mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Punktmenge stetig; jede Unstetigkeitsstelle ist ein solcher Wert, den die obige Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ an allen Stellen eines Intervalls (von positiver Länge) annimmt, und unsre Funktionen sind an den Unstetigkeitsstellen von links stetig. Die Gruppeneigenschaft

$$X_A(s) X_B(s) = X_{AB}(s)$$

ist eine unmittelbare Folge der Relation (14), da die Werte aller Funktionen $X_A(s)$ an einer Stelle s mit den Werten der entsprechenden Funktionen $\chi_A(\lambda)$ an einer zu s zugeordneten Stelle λ übereinstimmen. In gleicher Weise ergibt sich die Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_0^1 X_A(s) \overline{X}_B(s)\, ds = \delta_{A,B}$$

aus (16), mit Rücksicht auf die Relation (18).

Endlich resultiert die für irgendein Paar von stetigen Funktionen $U(s)$, $V(s)$ gültige Vollständigkeitsrelation

$$\int_0^1 U(s) V(s)\, ds = \sum_{(A)} \int_0^1 U(s) X_A(s)\, ds \int_0^1 V(s) \overline{X}_A(s)\, ds \tag{19}$$

aus der entsprechenden für die $\chi_A(\lambda)$ aufgestellten Relation (17), indem man diejenigen stetigen Funktionen $u(\lambda)$ und $v(\lambda)$ heranzieht, zu denen vermöge der obigen Konstruktion die Funktionen $U(s)$ bzw. $V(s)$ zugeordnet sind.

Die Zusammenfassung dieser Ergebnisse liefert den zweiten Satz der Einleitung. Es sei noch bemerkt, daß der Übergang zu gewöhnlichen Integralen in analoger Weise auch bei uneigentlichen unendlichen Gruppen möglich ist ($\tilde{\sigma}(\lambda)$ nicht stetig); es geht aber dabei die Vollständigkeit des resultierenden isomorphen Orthogonalsystems verloren. An Stelle dieser Eigenschaft tritt der Begriff der Abgeschlossenheit „in sich", den ich in meiner erwähnten Arbeit über die Multiplikationstabelle der Orthogonalsysteme zu einem ähnlichen Zwecke eingeführt habe.

§ 4.

Das Multiplikationstheorem der Gruppencharaktere.

1. Wir nehmen im folgenden an, daß die zugrunde gelegte kommutative Gruppe eigentlich unendlich ist (obwohl ein Teil der folgenden Untersuchungen auch für uneigentlich unendliche Gruppen richtig bleibt), und wollen einige interessante Eigenschaften des zugehörigen vollständigen Orthogonalsystems $X_A(s)$ ableiten. Man würde zunächst auf Grund der in § 1 (vgl. **3.** und **4.**) gegebenen Diskussion der Spektra der zugehörigen Matrizen (A) ohne Schwierigkeiten erkennen, daß der Wertevorrat von $X_A(s)$, falls A ein Gruppenelement von unendlicher Ordnung bezeichnet, alle Werte vom Betrage gleich Eins erschöpft mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge; ist aber A ein Element von der endlichen Ordnung n, so besteht der Wertevorrat von $X_A(s)$ nur aus den n-ten Einheitswurzeln.

Man erkennt auch unmittelbar, daß die Gruppencharaktere durch die in Satz II angegebenen Eigenschaften nicht eindeutig festgelegt sind[12]). Ist nämlich

$$s' = w(s)$$

eine im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ definierte reelle, meßbare Funktion, die eine maßtreue Abbildung zwischen s und s' vermittelt, d. h. die jede meßbare Teilmenge des obigen Intervalls in eine Punktmenge vom selben Maße überführt, so bilden die Funktionen

$$X_A(w(s)),\ X_B(w(s)),\ X_C(w(s)),\ \ldots$$

ebenfalls ein unitär orthogonales vollständiges System, das mit der vorgelegten Gruppe isomorph ist. Auf die Frage, ob man durch solche Trans-

[12]) Bei endlichen Abelschen Gruppen entspricht dies einer Vertauschung der Zeilen derjenigen (in der Einleitung erwähnten unitären) Matrix, deren Zeilen durch die einzelnen Gruppencharaktere gebildet sind.

formationen alle Gruppencharaktere einer vorgelegten Gruppe aus einem Gruppencharakter erhalten kann, komme ich in einer späteren Mitteilung zurück, in der ich die entsprechenden Probleme bei Zugrundelegung der allgemeinen Multiplikationstabelle behandeln werde. Ich bemerke nur noch, daß man im vorliegenden Falle auch in der folgenden Weise aus einem Gruppencharakter ein weiteres Funktionensystem derselben Art ableiten kann: Es sei s_0 eine feste Stelle des Intervalls $0 \leqq s \leqq 1$; ich betrachte das System

$$\chi'_A(s) = \chi_A(s_0)\chi_A(s) \qquad (A \text{ jedes Element der Gruppe}).$$

Es folgt dann unmittelbar, daß alle im Satze II angegebenen Eigenschaften des Funktionensystems $\chi_A(s)$ auch für $\chi'_A(s)$ gelten; man wird dadurch im Zusammenhang mit der soeben gemachten Bemerkung auf den Gedanken geführt, ob man nicht eine Funktion $w(s)$ der oben genannten Art finden kann, so daß für alle Elemente der Gruppe die Beziehung

$$\chi_A(s_0)\chi_A(s) = \chi_A(w(s))$$

gilt? Wir wollen zeigen, daß dies tatsächlich der Fall ist.

2. Die folgende Formel, die wir zu diesem Zweck heranziehen, ist eine einfache Anwendung des bekannten Parsevalschen Theorems. Es seien $x(s)$ und $y(s)$ zwei für $0 \leqq s \leqq 1$ definierte Funktionen, deren Betrag daselbst quadratisch integrierbar ist; wir setzen

$$x(s) \sim \sum_{(A)} x_A \chi_A(s), \qquad \text{d. h.} \quad x_A = \int_0^1 x(s)\,\bar{\chi}_A(s)\,ds,$$

$$y(s) \sim \sum_{(A)} y_A \chi_A(s), \qquad \text{d. h.} \quad y_A = \int_0^1 y(s)\,\bar{\chi}_A(s)\,ds;$$

das Produkt $x(s)\,y(s)$ ist integrierbar (natürlich nicht notwendigerweise quadratisch integrierbar), und es gilt für jedes Gruppenelement A die Formel

$$\int_0^1 x(s)\,y(s)\,\bar{\chi}_A(s)\,ds = \sum_{(K)} x_K\,y_{AK^{-1}}, \tag{20}$$

wobei die rechts stehende Summe auf alle Gruppenelemente K zu erstrecken ist. Dies ergibt sich unmittelbar durch Anwendung der Vollständigkeitsrelation (19) auf die quadratisch integrierbaren Funktionen $U(s) = y(s)\bar{\chi}_A(s)$, $V(s) = x(s)$; man erhält nämlich

$$\int_0^1 x(s)\,y(s)\,\bar{\chi}_A(s)\,ds = \sum_{(K)} \int_0^1 x(s)\,\bar{\chi}_K(s)\,ds \int_0^1 y(s)\,\bar{\chi}_A(s)\,\chi_K(s)\,ds$$

$$= \sum_{(K)} x_K\,y_{AK^{-1}}.$$

3. Wir bezeichnen die Entwicklungskoeffizienten der Funktion $f(s) = s$ mit u_A, d. h. wir setzen

$$u_A = \int_0^1 s\,\overline{\chi}_A(s)\,ds, \qquad s \sim \sum_{(A)} u_A \chi_A(s).$$

s sei ferner t_0 eine beliebige Stelle des Intervalls $[0, 1]$; wir betrachten iejenige Funktion $u(s, t_0)$, deren Entwicklungskoeffizienten die Größen $_A \chi_A(t_0)$ sind, für welche also

$$u(s, t_0) \sim \sum_{(A)} u_A \chi_A(t_0)\chi_A(s), \qquad \text{d. h.} \quad \int_0^1 u(s, t_0)\,\overline{\chi}_A(s)\,ds = u_A \chi_A(t_0)$$

t. Die Existenz dieser Funktionen folgt aus dem bekannten Riesz-ischerschen Satz; $u(s, t_0)$ ist eine *quadratisch integrierbare reelle Funktion* on s. Man erkennt dies, indem man diejenigen Glieder der obigen un-ndlichen Summe, die zu inversen Gruppenelementen A und A^{-1} gehören, usammenfaßt, und beachtet, daß wegen $u_{A^{-1}} = \bar{u}_A$

$$_A \chi_A(t_0)\chi_A(s) + u_{A^{-1}} \chi_{A^{-1}}(t_0)\chi_{A^{-1}}(s) = u_A \chi_A(t_0)\chi_A(s) + \bar{u}_A \overline{\chi}_A(t_0)\overline{\chi}_A(s)$$

ell ist, mit Rücksicht auf die bekannte Tatsache, daß die fragliche un-ndliche Summe jedenfalls im Mittel gegen $u(s, t_0)$ konvergiert. Führt an diese Konstruktion für alle Stellen t_0 des Intervalls $[0, 1]$ aus, so elangt man zu einer *reellen symmetrischen* Funktion $u(s, t)$ der beiden eränderlichen s, t, die im Quadrat $0 \leqq s, t \leqq 1$ definiert ist. Wir denken ns zunächst die Stelle t_0 fest gewählt und berechnen auf Grund der in **2.** emachten Bemerkung die Entwicklungskoeffizienten der Potenzen dieser unktion $u(s, t_0)$, d. h. die Größen

$$\int_0^1 u(s, t_0)^n\,\overline{\chi}_A(s)\,ds \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

obei A irgendein Gruppenelement bezeichnet. Für $n = 1$ erhält man definitione

$$\int_0^1 u(s, t_0)\,\overline{\chi}_A(s)\,ds = u_A \chi_A(t_0);$$

r $n = 2$ ergibt sich aus (20), wenn man darin $x(s) = y(s) = u(s, t_0)$ nsetzt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(s, t_0)^2\,\overline{\chi}_A(s)\,ds &= \sum_{(K)} u_K \chi_K(t_0)\, u_{AK^{-1}} \chi_{AK^{-1}}(t_0) \\ &= \sum_{(K)} \chi_A(t_0) \int_0^1 s\,\overline{\chi}_K(s)\,ds \int_0^1 s\,\overline{\chi}_A(s)\chi_K(s)\,ds \\ &= \chi_A(t_0) \int_0^1 s^2\,\overline{\chi}_A(s)\,ds.\end{aligned}$$

Aus der Konvergenz der Quadratsumme

$$\sum_{(A)} \left| \chi_A(t_0) \int_0^1 s^2 \overline{\chi}_A(s)\, ds \right|^2 = \int_0^1 s^4\, ds$$

folgt daher, daß das Quadrat der Funktion $u(s, t_0)^2$ integrierbar ist und die nochmalige Anwendung der Formel (20) für $x(s) = u(s, t_0)$, $y(s) = u(s, t_0)^2$ ergibt in gleicher Weise

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(s, t_0)^3 \overline{\chi}_A(s)\, ds &= \sum_{(K)} \chi_K(t_0) \int_0^1 s\, \overline{\chi}_K(s)\, ds \cdot \chi_{AK^{-1}}(t_0) \int_0^1 s^2\, \overline{\chi}_{AK^{-1}}(s)\, ds \\ &= \chi_A(t_0) \sum_{(K)} \int_0^1 s\, \overline{\chi}_K(s)\, ds \int_0^1 s^2\, \overline{\chi}_A(s)\, \chi_K(s)\, ds \\ &= \chi_A(t_0) \int_0^1 s^3\, \overline{\chi}_A(s)\, ds.\end{aligned}$$

Durch Wiederholung desselben Verfahrens erhält man für jedes ganzzahlige n

$$\int_0^1 u(s, t_0)^n\, \overline{\chi}_A(s)\, ds = \chi_A(t_0) \int_0^1 s^n\, \overline{\chi}_A(s)\, ds.$$

Ist $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ ein beliebiges Polynom, so folgt daraus

$$\int_0^1 f(u(s, t_0))\, \overline{\chi}_A(s)\, ds = \chi_A(t_0) \int_0^1 f(s)\, \overline{\chi}_A(s)\, ds, \tag{21}$$

also insbesondere für das Einheitselement E der Gruppe ($\chi_E(s) = 1$)

$$\int_0^1 f(u(s, t_0))\, ds = \int_0^1 f(s)\, ds.$$

4. Aus dieser Relation oder — was damit gleichbedeutend ist — aus den Beziehungen

$$\int_0^1 u(s, t_0)^n\, ds = \int_0^1 s^n\, ds = \frac{1}{n+1}$$

kann man eine wichtige Eigenschaft der Funktion $u(s, t_0)$ entnehmen. Nach einem Satze von C. N. Haskins[13]) besitzt nämlich diejenige Punktmenge, in der

$$\alpha \leqq u(s, t_0) \leqq \beta$$

---

[13]) Vgl. den eleganten Beweis von D. Jackson, Proof of a theorem of Haskins, Transactions of the American Mathematical Society 17 (1916), S. 178–180. — Aus der bekannten Tatsache, daß

$$\left\{ \int f(s)^n\, ds \right\}^{\frac{1}{n}}$$

mit wachsendem n gegen das wesentliche Maximum von $f(s)$ strebt, folgt die Richtigkeit der Ungleichung $|u(s, t_0)| \leqq 1$ für fast alle s.

(wobei α und β irgendwelche Größen bedeuten, die zwischen 0 und 1 gen), das Maß $\beta - \alpha$. Daraus könnte man ohne Schwierigkeit schließen, ß (bei festem t_0) die Abbildung $s' = u(s, t_0)$ eine maßtreue ist; eine onsequenz dieser Tatsache ist die Richtigkeit der Beziehung

$$\int_0^1 F(u(s, t_0))\, ds = \int_0^1 F(s)\, ds, \tag{2}$$

obei F irgendeine meßbare und beschränkte Funktion bedeutet. Im lgenden wird diese Beziehung nur für solche beschränkte Funktionen (s) verwendet, welche — wie z. B. die Gruppencharaktere — für $0 \leqq s \leqq 1$ finiert und so beschaffen sind, daß sie mit Ausnahme einer abzählbaren unktmenge überall stetig sind, an den etwaigen Unstetigkeitspunkten aber nen endlichen Sprung erleiden und von links stetig sind.

Für solche Funktionen $F(s)$ kann die obige Relation (22) direkt lgendermaßen bewiesen werden: Da $F(s)$ jedenfalls der ersten Baireschen lasse angehört, so kann man, analog wie bei dem Jacksonschen Beweise s Haskinsschen Satzes, eine solche Folge von Polynomen

$$f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$$

stimmen, welche *überall* gegen $F(s)$ strebt und so beschaffen ist, daß e $|f_n(s)|$ für jedes n unterhalb einer auch von s unabhängigen Schranke eiben. Dann ist auch für jedes s

$$\lim_{n=\infty} f_n(u(s, t_0)) = F(u(s, t_0))$$

d wegen der Beschränktheit der Folge $f_n(u(s, t))$

$$\int_0^1 F(u(s, t_0))\, ds = \lim_{n=\infty} \int_0^1 f_n(u(s, t_0))\, ds = \lim_{n=\infty} \int_0^1 f_n(s)\, ds = \int_0^1 F(s)\, ds,$$

für Polynome $f_n(s)$ die Behauptung (22) bereits als richtig erkannt ist.

5. Aus dem soeben gewonnenen Resultat gelangen wir zu dem ltiplikationstheorem der Gruppencharaktere wie folgt: Es sei $\chi_A(s)$ endeine dieser Funktionen; wir betrachten eine Folge von Polynomen (s) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, die im Mittel gegen $\chi_A(s)$ strebt, d. h. es sei

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 |\chi_A(s) - f_n(s)|^2\, ds = 0; \tag{3}$$

gilt wegen (22) auch die Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 |\chi_A(u(s, t_0)) - f_n(u(s, t_0))|^2\, ds = 0. \tag{3'}$$

Ferner folgt aus (21) für alle Gruppenelemente P

$$\int_0^1 f_n(u(s,t_0))\,\overline{\chi}_P(s)\,ds = \chi_P(t_0)\int_0^1 f_n(s)\,\overline{\chi}_P(s)\,ds;$$

der Grenzübergang $n=\infty$ liefert, mit Rücksicht auf (23) und (23′ (da $|\overline{\chi}_P(s)|$ beschränkt ist)

$$\int_0^1 \chi_A(u(s,t_0))\,\overline{\chi}_P(s)\,ds = \chi_P(t_0)\int_0^1 \chi_A(s)\,\overline{\chi}_P(s)\,ds = \begin{cases} 0, & \text{für } P \neq A \\ \chi_A(t_0) & \text{für } P = A \end{cases}$$

d. h. die Entwicklungskoeffizienten der Funktion $\chi_A(u(s,t_0))$ stimmen mi den entsprechenden Entwicklungskoeffizienten der Funktion $\chi_A(t_0)\,\chi_A(s$ überein. Es gilt daher fast überall

$$\chi_A(u(s,t_0)) = \chi_A(s)\,\chi_A(t_0), \tag{24}$$

und zwar gilt diese Beziehung für jedes Gruppenelement A und für jed Stelle t_0.

6. Zu analogen Ergebnissen führt die Funktion

$$v(s,t) \sim \sum_{(A)} u_A\,\overline{\chi}_A(t)\,\chi_A(s),$$

wobei die u_A dieselben Größen wie oben sind. Die Identität

$$u_A\,\overline{\chi}_A(t)\,\chi_A(s) + u_{A^{-1}}\,\overline{\chi}_{A^{-1}}(t)\,\chi_{A^{-1}}(s) = u_A\,\overline{\chi}_A(t)\,\chi_A(s) + \overline{u}_A\,\chi_A(t)\,\overline{\chi}_A(s$$

gewährleistet die Realität dieser quadratisch integrierbaren Funktion; di Formel

$$\int_0^1 v(s,t)^n\,\overline{\chi}_A(s)\,ds = \overline{\chi}_A(t)\int_0^1 s^n\,\overline{\chi}_A(s)\,ds \qquad (n=1,2,3,\ldots$$

beweist man in derselben Weise wie die obige Formel (21), durch Induk tion mit Hilfe der in 2. gemachten Bemerkung. Daraus folgt wiederun — wörtlich wie oben —, daß bei festem t diejenige Punktmenge, in de $0 \leqq \alpha \leqq v(s,t) \leqq \beta \leqq 1$ ist, das Maß $\beta - \alpha$ besitzt. Die Wiederholun der soeben angestellten Betrachtungen, indem man $u(s,t)$ durch $v(s,t$ ersetzt, liefert das Resultat, daß für jedes Gruppenelement A und bei ge gebenem t für fast alle Werte von s die Beziehung

$$\chi_A(v(s,t)) = \overline{\chi}_A(t)\,\chi_A(s) \tag{24′}$$

gilt.

Die Relationen (24) und (24′) enthalten das Multiplikationstheoren der Gruppencharaktere. Man kann aus ihnen verschiedene Eigenschafte der Funktionen $u(s,t)$ und $v(s,t)$ ablesen; z. B. daß diese Funktione bei festem t inverse Funktionen sind. Es genügt ferner $u(s,t)$ der Funk tionalgleichung

$$u(u(s_1,s_2),s_3) = u(s_1,u(s_2,s_3))$$

die natürlich nur fast überall gilt) und die die Aussage enthält, daß die u den verschiedenen Werten von t gehörenden Abbildungen

$$s' = u(s, t)$$

ie Gruppeneigenschaft besitzen, usw.

7. Jede der beiden reellen Funktionen $u(s, t)$ und $v(s, t)$ bestimmt ie zugrunde gelegte kommutative Gruppe vollständig. Die Gruppenharaktere $\chi_A(s)$ erfüllen ja, wie man aus der Definition von $v(s, t)$ unhittelbar erkennt, die Beziehungen

$$u_A \chi_A(s) = \int_0^1 v(s, t)\, \chi_A(t)\, dt,$$

l. h. die *Funktionen* $\chi_A(s)$ *sind die Eigenfunktionen des reellen* (*unymmetrischen*) *Kernes* $v(s, t)$. Durch die $\chi_A(s)$ ist aber die Gruppe beeits festgelegt.

Wir wollen noch die Eigenfunktionen des symmetrischen Kernes $u(s, t)$ ufstellen, um damit zu einem mit der vorgelegten Gruppe zusammenängenden *reellen* Orthogonalsystem zu gelangen. Es ist dies die naheiegende Verallgemeinerung davon, wie man bei der zyklischen Gruppe aus len Gruppencharakteren, d. h. aus den Exponentialfunktionen $e^{2i\pi ns}$ zu den rigonometrischen Funktionen des Fourierschen Orthogonalsystems gelangt.

Ist $A \neq E$, so bestimmen wir die beiden reellen Funktionen $\varphi'_A(s)$ nd $\varphi''_A(s)$ aus der Gleichung

$$\varphi'_A(s) + i\varphi''_A(s) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{u_A}{|u_A|}}\,\chi_A(s) \tag{25}$$

der, was damit gleichbedeutend ist, aus

$$\varphi'_A(s) - i\varphi''_A(s) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{u_{A^{-1}}}{|u_A|}}\,\chi_{A^{-1}}(s);$$

ür $A = E$ setzen wir $\varphi_E(s) = 1$. Es gilt dann für alle $A \neq E$

$$\varphi'_{A^{-1}}(s) = \varphi'_A(s), \qquad \varphi''_{A^{-1}}(s) = -\varphi''_A(s),$$

erner (indem man die Gleichungen (25) und (25′) multipliziert)

$$\varphi'_A(s)^2 + \varphi''_A(s)^2 = 2.$$

Man verifiziert durch eine einfache Rechnung die Identität:

$$u_A \chi_A(s)\, \chi_A(t) + \bar{u}_A \bar{\chi}_A(s)\, \bar{\chi}_A(t) = |u_A| \{\varphi'_A(s)\, \varphi'_A(t) - \varphi''_A(s)\, \varphi''_A(t)\}, \tag{26}$$

erner die Integralbeziehungen:

$$\int_0^1 \varphi'_A(s)^2\, ds = 1, \qquad \int_0^1 \varphi''_A(s)^2\, ds = 1, \qquad \int_0^1 \varphi'_A(s)\, \varphi''_A(s)\, ds = 0$$

und endlich, daß, falls B von A und A^{-1} verschieden ist,

$$\int_0^1 \varphi'_A(s)\,\varphi'_B(s)\,ds = \int_0^1 \varphi''_A(s)\,\varphi''_B(s)\,ds = 0$$

ist. Diese Relationen enthalten die Aussage, daß die unendlich viele Funktionen

$$\varphi_E = 1, \quad \varphi'_A(s), \quad \varphi''_A(s), \tag{27}$$

wobei für A aus jedem Paar von inversen Gruppenelementen nur das ein Element zu nehmen ist, ein reelles Orthogonalsystem im Intervall $0 \leqq s \leqq$ bilden. Die Relation (26) liefert aber in Verbindung mit der in **3.** ge gebenen Definition von $u(s,t)$

$$u(s,t) = \frac{1}{2} + \sum_{(A)}{}' |u_A| \{\varphi'_A(s)\,\varphi'_A(t) - \varphi''_A(s)\,\varphi''_A(t)\} \quad (A \neq E)$$

wobei der Strich neben dem Summenzeichen zur Andeutung dessen dient daß analogerweise in der Summe von den zu inversen Gruppenelementen gehörenden Gliedern die eine wegzulassen ist.

Diese Gleichung zeigt eben, daß *die Funktionen* $\varphi'_A(s)$, $\varphi''_A(s)$ *die Eigenfunktionen des reellen symmetrischen Kernes* $u(s,t)$ *sind* (die zu gehörigen Eigenwerte sind $|u_A|$ bzw. $-|u_A|$); folglich sind diese Funktionen und damit auch die aus (25) berechenbaren Funktionen $\chi_A(s)$, sowie die Gruppe selbst durch $u(s,t)$ allein bereits festgelegt.

Durch den soeben dargelegten Zusammenhang der Gruppencharakteren mit den Eigenfunktionen von $u(s,t)$ ist auch der Weg zum Studium der Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach den Gruppencharakteren angebahnt.

Das in der vorliegenden Arbeit behandelte Problem steht in engem Zusammenhang mit denjenigen Fragen, die ich in meiner in der Einleitung angeführten Arbeit beantwortet habe. Dort handelte es sich darum, die (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen anzugeben, die die so genannte Multiplikationstabelle eines vollständigen reellen Orthogonalsystems $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s), \ldots$ erfüllt, wobei die Multiplikationstabelle als die aus den Größen

$$c_{pqr} = \int_0^1 \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,\varphi_r(s)\,ds \qquad (p,q,r = 1,2,3,\ldots$$

gebildete unendliche kubische Matrix definiert ist. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um unitär-orthogonale Funktionensysteme $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_n(s), \ldots$, die also den Bedingungen

$$\int_0^1 \psi_p(s)\,\overline{\psi}_q(s)\,ds = \delta_{pq}$$

unterworfen sind, wobei $\overline{\psi}_q$ die zu ψ_q konjugiert komplexe Funktion bedeutet. Es liegt an der Hand, in diesem Falle die Multiplikationstabelle vermöge der Größen

$$c_{pqr} = \int_0^1 \psi_p(s)\, \psi_q(s)\, \overline{\psi}_r(s)\, ds$$

zu definieren. (In dem hier behandelten Falle sind die Funktionen des vorgelegten unitär-orthogonalen Systems den Gruppenelementen zugeordnet und die Multiplikationstabelle wird aus den in 1., § 1 angegebenen Größen $c_{Q,R}^{(P)} = \delta_{PQ.R}$ gebildet.) Es liegt nun nahe, die allgemeine Frage zu stellen, wie die komplexen Größen c_{pqr} beschaffen sein müssen, damit ein unitär-orthogonales Funktionensystem existiere, dessen Multiplikationstabelle durch diese Größen c_{pqr} gebildet wird. Dieses Problem gestattet eine ähnliche Behandlung wie das entsprechende für reelle Orthogonalsysteme, wobei aber an Stelle der unendlichen symmetrischen Matrizen die Theorie der sog. unendlichen Normalmatrizen heranzuziehen ist.

(Eingegangen am 26. Mai 1930.)

Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis.

Der von Herrn Domherrn Dr. Dr.-Ing. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig errichtete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften“ in Höhe von 1000 RM ist für das Jahr 1930 durch das Preisgericht Herrn Oberstudiendirektor Professor Dr. Johannes Tropfke in Berlin für die „2. Auflage der Geschichte der Elementarmathematik und die Arbeit über den Anteil des Archimedes an der Entstehung der Trigonometrie“ zuerkannt worden.

Über den kleinsten quadratischen Nichtrest.

Von

Alfred Brauer in Berlin.

Beim ersten Beweis des Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste urde Gauß auf den folgenden Satz[1]) geführt, dessen Beweis ihm erst, wie selbst angibt, nach vielen Bemühungen gelang:

Satz A. *Für jede Primzahl p der Form $8n+1$ gibt es unterhalb $\sqrt{p}+1$ mindestens eine ungerade Primzahl q, für die p quadratischer ichtrest, also $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$ ist.*

Auf Grund des Reziprozitätsgesetzes läßt sich der Satz A auch folndermaßen formulieren:

Satz B. *Für jede Primzahl p der Form $8n+1$ gibt es unterhalb $\sqrt{p}+1$ mindestens eine ungerade Primzahl q, die quadratischer Nichtst $(\mathrm{mod}\ p)$ ist, für die also $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$ ist.*

Die Frage lag nahe, ob es möglich sei, diese Sätze auch für die Primhlen der Form $8n\pm 3$ und $8n+7$ auszusprechen und die durch sie gebenen Abschätzungen zu verbessern. Herr T. Nagell[2]) zeigte, daß der tz B für alle Primzahlen $p>3$ gilt, daß es also für alle Primzahlen >3 einen ungeraden quadratischen Nichtrest unterhalb $2\sqrt{p}+1$ gibt.

Anstatt den kleinsten ungeraden Nichtrest kann man auch den kleinen Nichtrest überhaupt betrachten.

In seinen Übungen zur Zahlentheorie pflegt Herr I. Schur seit vielen hren die folgende Aufgabe zu stellen:

[1]) Disquisitiones arithmeticae, art. 125 und 129; vgl. auch Dirichlet-Dedekind, rlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl. (1894), S. 116.

[2]) Zahlentheoretische Notizen II, Videnskapsselskapets Skrifter, I. Mat.-Naturv. asse 1923, Nr. 13, S. 7–10.

Es ist zu zeigen, daß der kleinste quadratische Nichtrest $d \pmod p$

$$d < \sqrt{p}$$

ist, abgesehen von den Fällen $p = 3, 7$ *und* 23.

Herr Schur kann ferner zeigen, daß abgesehen von endlich vielen Ausnahmefällen die schärfere Ungleichung

$$d < \frac{1}{3}\sqrt{p} \tag{1}$$

gilt. Dies liefert für die Primzahlen der Form $8n \pm 1$, da hier der kleinste quadratische Nichtrest ungerade ist, eine bessere Abschätzung als der Satz B.

Für alle hinreichend großen Primzahlen p hat mit analytischen Hilfsmitteln Herr J. M. Winogradoff[3]) vor kurzem eine noch bessere Abschätzung für den kleinsten Nichtrest erhalten. Sein Resultat, das auch auf Potenzreste übertragen wird, lautet: Für alle hinreichend großen Primzahlen p ist der kleinste quadratische Nichtrest d

$$d < p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}} \log^2 p.$$

In § 1 der vorliegenden Arbeit zeige ich nun, daß man auch mit elementaren Hilfsmitteln die Abschätzung (1) für die Primzahlen p der Form $8n + 7$ verbessern kann, indem ich den folgenden Satz beweise:

Für alle Primzahlen p *der Form* $8n + 7$ *ist der kleinste quadratische Nichtrest* d

$$d < (2p)^{\frac{2}{5}} + 3(2p)^{\frac{1}{5}} + 1.$$

Diese Abschätzung ist zwar schlechter als die Winogradoffsche[4]), sie gilt aber für alle Primzahlen der Form $8n + 7$ und wird in einfachster Weise gewonnen. Im § 2 wird gezeigt, daß für die Primzahlen der Form $8n \pm 3$, für die ja 2 der kleinste quadratische Nichtrest ist, für den kleinsten ungeraden quadratischen Nichtrest u eine ähnliche Abschätzung gilt; es ist nämlich

$$u < 2\{(4p)^{\frac{2}{5}} + (4p)^{\frac{1}{5}}\} + 1.$$

Für die Primzahlen der Form $4n + 1$ sind die Gaußschen Sätze A und B auf Grund des Reziprozitätsgesetzes identisch. Anders verhält es sich für die Primzahlen der Form $4n$ 1. Im § 3 zeige ich jedoch, daß auch für diese Primzahlen der Satz A gilt, indem ich den folgenden schärferen Satz beweise:

---

[3]) On the bound of the least non-residue of n-th powers, Transactions of the American Mathematical Society 29 (1927), S. 218–226; vgl. auch Journal of the Physico-Mathematical Society of Perm 1919.

[4]) Es ist $\frac{1}{2\sqrt{e}} = 0{,}303\ldots$.

Für jede Primzahl p der Form $4n-1$ gibt es eine ungerade Primzahl q

$$q < 2^{\frac{8}{5}}(3p)^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{2}{5}}(3p)^{\frac{1}{5}} + 1,$$

die p quadratischer Nichtrest ist.

§ 1.

Satz 1. *Ist p eine Primzahl der Form $8n+7$, so ist der kleinste quadratische Nichtrest d*

$$d < (2p)^{\frac{2}{5}} + 3(2p)^{\frac{1}{5}} + 1.$$

Beweis. Es sei r eine beliebige ganze Zahl, die der Bedingung

$$1 < r < d$$

ügt und die später geeignet gewählt werden wird; dann ist r quadrahe Rest (mod p). Die Zahlen

$$p-1,\ p-2,\ \ldots,\ p-d+1$$

l, da -1 Nichtrest (mod p) ist, sämtlich Nichtreste. Die im Intervall[5]) $-d+1 \ldots p\}$ gelegenen ganzzahligen Multipla von r seien

$$kr,\ (k+1)r,\ \ldots,\ (k+l-1)r \qquad (l \geqq 1).$$

se l Zahlen sind also sämtlich Nichtreste, da wegen $r > 1$ die Zahl p ı ganzzahliges Multiplum von r ist. Daher bilden die Zahlen

$$k,\ k+1,\ \ldots,\ k+l-1$$

Sequenz von l Nichtresten; das Intervall $\{k \ldots k+l-1\}$ kann also ıe Quadratzahl enthalten. Man bestimme die positive ganze Zahl a so, daß

$$a^2 < k \leqq k+l-1 < (a+1)^2$$

Das Intervall $A = \{a^2 \ldots (a+1)^2\}$ zerlege man durch den Punkt $+1)$ in die beiden Teilintervalle $A_1 = \{(a+1)^2 \ldots a(a+1)\}$ und $= \{a(a+1) \ldots a^2\}$.

Nun sei t_1 die größte positive ganze Zahl, derart, daß

$$(a+1)^2 - t_1^2 > a(a+1)$$

Dann ist

$$a+1-t_1^2 > 0,$$

$$t_1 < \sqrt{a} + 1 \leqq t_1 + 1.$$

lich ist

$$t_1 = [\sqrt{a}].$$

[5]) Hier und im folgenden wird unter Intervall stets das abgeschlossene Intervall anden.

Die Punkte

$$(a+1)^2 - \nu^2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, t_1 \tag{7}$$

zerlegen das Intervall A_1 in Teilintervalle. Da die Entfernung zweier be nachbarter Teilpunkte

$$\{(a+1)^2 - \nu^2\} - \{(a+1)^2 - (\nu+1)^2\} = 2\nu + 1$$

ist, ist die Maximallänge s_1 dieser Teilintervalle wegen (5)

$$s_1 \leqq 2t_1 + 1.$$

Daher folgt aus (6)

$$s_1 \leqq 2[\sqrt{a}] + 1. \tag{8}$$

Ferner sei t_2 die größte nichtnegative ganze Zahl, für die

$$a(a+1) - t_2(t_2+1) > a^2 \tag{9}$$

ist; dann ist

$$t_2^2 + t_2 < a.$$

Die positive Wurzel der Gleichung

$$t_2^2 + t_2 = a$$

ist $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1+4a}{4}}$. Daher ist

$$t_2 \leqq \left[-\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1+4a}{4}}\right] \leqq \left[-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \sqrt{a}\right] = [\sqrt{a}]. \tag{10}$$

Die Punkte

$$a(a+1) - \nu(\nu+1) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, t_2 \tag{11}$$

zerlegen das Intervall A_2 in Teilintervalle. Wegen

$$\{a(a+1) - \nu(\nu+1)\} - \{a(a+1) - (\nu+1)(\nu+2)\} = 2\nu + 2$$

ist die Maximallänge s_2 dieser Teilintervalle nach (9) und (10)

$$s_2 \leqq 2t_2 + 2 \leqq 2[\sqrt{a}] + 2. \tag{12}$$

Ist s die Maximallänge der Teilintervalle, in die das ganze Intervall A durch die Punkte (7) und (11) zerlegt wird, so ist wegen (8) und (12)

$$s = \mathrm{Max}(s_1, s_2) \leqq 2[\sqrt{a}] + 2. \tag{13}$$

Angenommen es sei nun

$$d \geqq \mathrm{Max}\{a + 2 + t_1, rs\}, \tag{14}$$

dann wären die Zahlen $1, 2, \ldots, a + 1 + t_1$ sämtlich Reste, folglich wären für $\nu = 1, 2, \ldots, t_1$ die Zahlen

$$(a+1)^2 - \nu^2 = (a + 1 + \nu)(a + 1 - \nu)$$

quadratische Reste und für $\nu = 0, 1, \ldots, t_2$ die Zahlen

$$a(a+1) - \nu(\nu+1) = (a + 1 + \nu)(a - \nu)$$

benfalls Reste, da wegen (6) und (10)

$$t_2 \leqq t_1$$

t. Die Endpunkte der oben konstruierten Teilintervalle des Intervalls A ären daher sämtlich Reste. Da die Längen dieser Teilintervalle $\leqq s$ waren, nthielte daher jedes beliebige, im Intervall A gelegene Intervall von der änge s mindestens einen quadratischen Rest. Das Intervall A könnte lso keine Sequenz von s quadratischen Nichtresten enthalten.

Andererseits wäre wegen (14)

$$d \geqq rs,$$

olglich lägen im Intervall $\{p \dots p-d+1\}$ mindestens s ganzzahlige Iultipla von r. Die Anzahl dieser Multipla war aber nach (2) gerade l. lso wäre

$$l \geqq s.$$

Vegen (3) und (4) müßte daher das Intervall A eine Sequenz von min- estens s Nichtresten, nämlich $k, k+1, \dots, k+l-1$ enthalten. Dies ergibt nen Widerspruch. Daher ist die Ungleichung (14) unmöglich, und es ist

$$d < \operatorname{Max}\{a+2+t_1, rs\},$$

lso wegen (6) und (13)

$$d < \operatorname{Max}\{a+2+[\sqrt{a}],\ 2r([\sqrt{a}]+1)\},$$

olglich

$$d \leqq \operatorname{Max}\{a+1+[\sqrt{a}],\ 2r([\sqrt{a}]+1)-1\}.$$

un folgt aus (2)

$$k+l-1 < \frac{p}{r},$$

lso ist wegen (4)

$$a < \sqrt{\frac{p}{r}},$$

aher muß

5) $$d < \operatorname{Max}\left\{\sqrt{\frac{p}{r}}+1+\sqrt[4]{\frac{p}{r}},\ 2r\left(\sqrt[4]{\frac{p}{r}}+1\right)-1\right\}$$

in. Wäre nun

6) $$d \geqq (2p)^{\frac{2}{5}}+3(2p)^{\frac{1}{5}}+1,$$

könnte man für $p > 16$

$$r = \left[\left(\frac{p}{16}\right)^{\frac{1}{5}}\right]+1$$

ählen, da bisher nur

$$1 < r < d$$

rausgesetzt war. Dann wird

$$\sqrt{\frac{p}{r}} < \sqrt{\frac{p \cdot 2^{\frac{4}{5}}}{p^{\frac{1}{5}}}} = 2^{\frac{2}{5}} p^{\frac{2}{5}},$$

folglich

$$\sqrt{\frac{p}{r}}+1+\sqrt[4]{\frac{p}{r}}<2^{\frac{2}{5}}p^{\frac{2}{5}}+1+2^{\frac{1}{5}}p^{\frac{1}{5}}<(2p)^{\frac{2}{5}}+3(2p)^{\frac{1}{5}}+1$$

und

$$\begin{aligned}2r\left(\sqrt[4]{\frac{p}{r}}+1\right)-1&<\left(2p^{\frac{1}{5}}\cdot 2^{-\frac{4}{5}}+2\right)\left(2^{\frac{1}{5}}p^{\frac{1}{5}}+1\right)-1\\&=(2p)^{\frac{2}{5}}+3(2p)^{\frac{1}{5}}+1,\end{aligned}$$

also nach (15)

$$d<(2p)^{\frac{2}{5}}+3(2p)^{\frac{1}{5}}+1.$$

Dies steht im Widerspruch zu (16); daher ist die Ungleichung (16) unmöglich, und es ist

$$d<(2p)^{\frac{2}{5}}+3(2p)^{\frac{1}{5}}+1.$$

Damit ist der Satz für alle Primzahlen $p>7$ der Form $8n+7$ bewiesen; für $p=7$ folgt die Richtigkeit der Behauptung sofort aus $\left(\frac{3}{7}\right)=-1$.

§ 2.

Da 2 quadratischer Rest für die Primzahlen der Form $8n+7$ ist, liefert Satz 1 zugleich eine Abschätzung für den kleinsten ungeraden Nichtrest für diese Primzahlen. Es soll nun für die Primzahlen der Form $8n\pm 3$, für die ja 2 Nichtrest ist, der kleinste ungerade Nichtrest abgeschätzt werden.

Es soll zunächst der folgende Satz bewiesen werden, der für die Primzahlen der Form $8n+5$ schon eine bessere Abschätzung als Satz B liefert.

Satz 2. *Ist p eine Primzahl der Form $8n+5$, so ist der kleinste ungerade quadratische Nichtrest u*

$$u<\sqrt{p+4}+2.$$

Beweis. Die im Intervall $\{p-4u\ldots p+4u\}$ gelegenen ungeraden ganzzahligen Multipla von u seien

$$ku,\quad (k+2)u,\quad (k+4)u \quad\text{und}\quad (k+6)u. \tag{17}$$

Dann bilden die geraden Zahlen

$$p-(k+6)u,\quad p-(k+4)u,\quad p-(k+2)u,\quad p-ku$$

eine arithmetische Progression von vier Gliedern, deren Differenz 2 durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist. Daher ist genau eine von diesen vier Zahlen durch 4, aber nicht durch 8 teilbar; es sei dies etwa die Zahl $p-k^*u$, dann ist $\frac{p-k^*u}{4}$ eine ungerade ganze Zahl. Wegen (17) ist nun

$$\left|\frac{p-k^*u}{4}\right|<u. \tag{18}$$

olglich ist $\frac{p-k^*u}{4}$ quadratischer Rest, demnach auch k^*u quadratischer est; da u Nichtrest ist, ist also auch k^* Nichtrest. Andererseits ist ungerade, folglich $k^* \geqq u$. Ferner ist nach (18)

$$k^*u < p + 4u,$$

so

$$u^2 < p + 4u,$$

$$u < \sqrt{p+4} + 2.$$

Es soll jetzt das Resultat des Satzes 2 noch weiter verschärft werden; gleich wird sich dieselbe Abschätzung auch für die Primzahlen der Form $n+3$ ergeben. Der Satz 2 wird dazu gebraucht werden, um für eine eihe von Primzahlen, für die die anzuwendende Methode versagt, die ichtigkeit der Behauptung schnell zu beweisen.

Satz 3. *Ist $p > 3$ eine Primzahl der Form $8n \pm 3$, so ist der einste ungerade Nichtrest u*

$$u < 2\{(4p)^{\frac{2}{5}} + (4p)^{\frac{1}{5}}\} + 1.$$

Beweis. Die geraden Zahlen

$$p+1,\ p+3,\ \ldots,\ p+u-2$$

nd sämtlich quadratische Reste. Es sei ϱ eine beliebige nichtnegative nze Zahl, derart, daß

9) $$2^{2\varrho+1} < u$$

; die im Intervall $\{p \ldots p+u-1\}$ gelegenen ganzzahligen Multipla on $2^{\varrho+1}$ seien

0) $$k \cdot 2^{2\varrho+1},\ (k+1)2^{2\varrho+1},\ \ldots,\ (k+l-1)2^{2\varrho+1} \qquad (l \geqq 1).$$

ann ist

1) $$k = \left[\frac{p}{2^{2\varrho+1}}\right] + 1.$$

ie Zahlen (20) sind sämtlich Reste; da 2 und folglich auch $2^{2\varrho+1}$ Nicht- st ist, bilden die Zahlen

2) $$k,\ k+1,\ \ldots,\ k+l-1$$

ne Sequenz von l Nichtresten. Daher läßt sich die positive ganze Zahl a bestimmen, daß

3) $$a^2 < k \leqq k+l-1 < (a+1)^2$$

; dann folgt wegen (21)

$$a^2 \leqq \left[\frac{p}{2^{2\varrho+1}}\right],$$

4) $$a < \sqrt{\frac{p}{2^{2\varrho+1}}}.$$

Das Intervall $A = \{a^2 \dots (a+1)^2\}$ soll nun wieder in Teilintervalle zerlegt werden; man muß jedoch zwei Fälle unterscheiden.

I. Es sei a gerade.

Die positive ganze Zahl t' sei so bestimmt, daß

$$(a+1)^2 - (2t')^2 > a^2 > (a+1)^2 - (2t'+2)^2 \tag{25}$$

ist[6]). Dann ist

$$(2t')^2 < 2a+1,$$

$$2t' \leqq [\sqrt{2a}]. \tag{26}$$

Die Punkte

$$(a+1)^2 - (2\nu)^2 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, t') \tag{27}$$

zerlegen das Intervall A in Teilintervalle; die Entfernung zweier benachbarter Teilpunkte ist

$$((a+1)^2 - (2\nu)^2) - ((a+1)^2 - (2\nu+2)^2) = 8\nu + 4. \tag{28}$$

Daher ist von den Teilintervallen entweder das Intervall

$$J_{t'} = \{(a+1)^2 - (2t'-2)^2 \dots (a+1)^2 - (2t')^2\}$$

oder das Intervall

$$J_{t'+1} = \{(a+1)^2 - (2t')^2 \dots a^2\}$$

das größte. Wegen (28) ist die Länge $|J_{t'}|$ von $J_{t'}$

$$|J_{t'}| = 8t' - 4. \tag{29}$$

Da a gerade war, ist

$$a^2 - ((a+1)^2 - (2t'+2)^2) \equiv 3 \pmod 4.$$

Wegen (25) ist daher

$$a^2 - ((a+1)^2 - (2t'+2)^2) \geqq 3,$$

folglich ist nach (28) die Länge $|J_{t'+1}|$ von $J_{t'+1}$

$$|J_{t'+1}| \leqq 8t' + 4 - 3 = 8t' + 1. \tag{30}$$

Bezeichnet man nun die Maximallänge der Teilintervalle mit s', so folgt aus (29), (30) und (26)

$$s' \leqq 8t' + 1 \leqq 4[\sqrt{2a}] + 1. \tag{31}$$

II. Es sei a ungerade.

In diesem Fall sei die nichtnegative ganze Zahl t'' so bestimmt, daß

$$(a+1)^2 - (2t''+1)^2 > a^2 > (a+1)^2 - (2t''+3)^2 \tag{32}$$

[7])

---

[6]) Dies ist stets möglich, da ein gerades Quadrat nicht gleich der Differenz eines ungeraden und eines geraden Quadrats sein kann und $a \geqq 2$ ist.

[7]) Dies ist wieder möglich, da die Summe zweier ungeraden Quadrate kein Quadrat sein kann.

ist. Dann ist

$$2t''+1<\sqrt{2a+1},$$

(33) $$2t''+1\leqq[\sqrt{2a}].$$

Durch die Punkte

(34) $$(a+1)^2-(2\nu+1)^2 \qquad (\nu=0,1,\ldots,t'')$$

wird das Intervall A wieder in Teilintervalle eingeteilt. Die Entfernung zweier benachbarter Teilpunkte ist

(35) $$((a+1)^2-(2\nu+1)^2)-((a+1)^2-(2\nu+3)^2)=8\nu+8.$$

Daher ist von den Teilintervallen für $t''>0$ entweder das Intervall

$$J_{t''}=\{(a+1)^2-(2t''-1)^2\ldots(a+1)^2-(2t''+1)^2\}$$

oder das Intervall

$$J_{t''+1}=\{(a+1)^2-(2t''+1)^2\ldots a^2\}.$$

das größte; für $t''=0$ ist $J_{t''+1}$ das größte Teilintervall. Sind nun $|J_{t''}|$ und $|J_{t''+1}|$ die Längen von $J_{t''}$ und $J_{t''+1}$, so ist wegen (35)

(36) $$|J_{t''}|=8t''.$$

Da hier a ungerade war, ist

$$a^2-((a+1)^2-(2t''+3)^2)\equiv-2a-1+1\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4),$$

folglich nach (32)

$$a^2-((a+1)^2-(2t''+3)^2)\geqq 2,$$

also wegen (35)

(37) $$|J_{t''+1}|\leqq 8t''+8-2=8t''+6.$$

Ist s'' die Maximallänge der Teilintervalle, so folgt aus (36), (37) und (33)

(38) $$s''\leqq 8t''+6\leqq 4[\sqrt{2a}]+2.$$

Teilt man daher das Intervall A im Fall I durch die Punkte (27), im Fall II durch die Punkte (34) in Teilintervalle ein, so sind, wenn man

(39) $$s=\mathrm{Max}\,(s',s'')$$

setzt, in beiden Fällen die Längen aller Teilintervalle $\leqq s$; hierbei ist wegen (31) und (38)

(40) $$s\leqq 4[\sqrt{2a}]+2.$$

Wäre nun

(41) $$u\geqq\mathrm{Max}\,\{a+2+[\sqrt{2a}],\,2^{2\varrho+1}s\},$$

so wären die ungeraden Zahlen, die $\leqq a+1+[\sqrt{2a}]$ sind, sämtlich Reste. Ist also a gerade, so wären wegen (26) für $\nu=1,2,\ldots,t'$ die ungeraden Zahlen

(42) $$(a+1)^2-(2\nu)^2=(a+1+2\nu)(a+1-2\nu)$$

quadratische Reste. Analog wären für ungerades a wegen (33) für $\nu = 0, 1, \ldots, t''$ die ungeraden Zahlen

$$(43) \qquad (a+1)^2 - (2\nu+1)^2 = (a+1+2\nu+1)(a+1-2\nu-1)$$

quadratische Reste.

Das Intervall A ist daher im Falle, daß a gerade ist, durch die Punkte (27), im Falle, daß a ungerade ist, durch die Punkte (34) in Teilintervalle eingeteilt, deren Endpunkte wegen (42) und (43) sämtlich quadratische Reste sind. Da nach (39) die Längen dieser Teilintervalle $\leqq s$ waren, müßte daher jedes beliebige, im Intervalle A gelegene Intervall von der Länge s mindestens einen quadratischen Rest enthalten. Folglich könnte im Intervalle A keine Sequenz von s Nichtresten liegen.

Andererseits wäre wegen (41)

$$u \geqq 2^{2\varrho+1} s,$$

folglich nach (20)

$$l \geqq s.$$

Daher enthielte wegen (22) und (23) das Intervall A eine Sequenz $k, k+1, \ldots, k+l-1$ von mindestens s Nichtresten. Dies steht im Widerspruch zu dem Obigen. Die Ungleichung (41) ist also unmöglich; demnach ist

$$(44) \qquad u < \mathrm{Max}\{a+2+[\sqrt{2a}], 2^{2\varrho+1} s\},$$

folglich wegen (40)

$$u < \mathrm{Max}\{a+2+\sqrt{2a}, 2^{2\varrho+1}(4\sqrt{2a}+2)\},$$

$$u \leqq \mathrm{Max}\{a+1+\sqrt{2a}, 2^{2\varrho+2}(2\sqrt{2a}+1)-1\}.$$

Daher ist wegen (24) erst recht

$$(45) \qquad u < \mathrm{Max}\left\{\sqrt{\frac{p}{2^{2\varrho+1}}}+1+\sqrt{2\sqrt{\frac{p}{2^{2\varrho+1}}}}, 2^{2\varrho+2}\left(2\sqrt{2\sqrt{\frac{p}{2^{2\varrho+1}}}}+1\right)-1\right\}.$$

Es sei nun zunächst $p > 2^{13}$; dann ist

$$2^{-\frac{8}{5}} p^{\frac{1}{5}} > 2.$$

Man kann also die nichtnegative ganze Zahl ϱ_0 so bestimmen, daß

$$(46) \qquad 2^{-\frac{18}{5}} p^{\frac{1}{5}} < 2^{2\varrho_0+1} < 2^{-\frac{8}{5}} p^{\frac{1}{5}}$$

wird, da in dem Intervall $\{2^{-\frac{18}{5}} p^{\frac{1}{5}} \ldots 2^{-\frac{8}{5}} p^{\frac{1}{5}}\}$ genau eine ungerade Potenz von 2 liegt. Angenommen, es sei nun

$$(47) \qquad u \geqq 2\{(4p)^{\frac{2}{5}} + (4p)^{\frac{1}{5}}\} + 1,$$

dann wird wegen (46)

$$u > 2^{2\varrho_0+1}.$$

aher ist für $\varrho = \varrho_0$ die Bedingung (19) erfüllt, und es folgt aus (45)

48) $$u < \mathrm{Max}\left\{\sqrt{\frac{p}{2^{2\varrho_0+1}}} + 1 + \sqrt{2\sqrt{\frac{p}{2^{2\varrho_0+1}}}},\ 2^{2\varrho_0+2}\left(2\sqrt{2\sqrt{\frac{p}{2^{2\varrho_0+1}}}} + 1\right) - 1\right\}.$$

ndererseits ist wegen (46)

49) $$\sqrt{\frac{p}{2^{2\varrho_0+1}}} + 1 + \sqrt{2\sqrt{\frac{p}{2^{2\varrho_0+1}}}} < 2^{\frac{9}{5}} p^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{1}{5}} p^{\frac{1}{5}} + 1$$

nd

$$2^{2\varrho_0+2}\left(2\sqrt{2\sqrt{\frac{p}{2^{2\varrho_0+1}}}} + 1\right) - 1 < 2^{-\frac{3}{5}} p^{\frac{1}{5}} (2^{\frac{12}{5}} p^{\frac{1}{5}} + 1) < 2^{\frac{9}{5}} p^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{7}{5}} p^{\frac{1}{5}} + 1.$$

us (48), (49) und (50) folgt daher

$$u < 2\{(4p)^{\frac{2}{5}} + (4p)^{\frac{1}{5}}\} + 1.$$

ies steht im Widerspruch zu (47); die Ungleichung (47) ist also un-öglich. Folglich ist

$$u < 2\{(4p)^{\frac{2}{5}} + (4p)^{\frac{1}{5}}\} + 1.$$

amit ist Satz 3 für die Primzahlen $p > 2^{13}$ der Form $8n \pm 3$ bewiesen.

Der Beweis muß nun noch für die Primzahlen $3 < p < 2^{13}$ geführt erden.

Ist zunächst $p < 2^{13}$ von der Form $8n + 5$, so folgt die Behauptung us dem Satz 2; man hat hierzu nur zu zeigen, daß für $p < 2^{13}$

$$\sqrt{p+4} + 2 < 2\{(4p)^{\frac{2}{5}} + (4p)^{\frac{1}{5}}\} + 1,$$

so

51) $$p + 4 < (2^{\frac{9}{5}} p^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{7}{5}} p^{\frac{1}{5}} - 1)^2$$

t. Setzt man

$$p^{\frac{1}{5}} = y,$$

genügt es demnach zu zeigen, daß für $1 < y < 2^{\frac{13}{5}}$

$$y^5 + 4 < 2^{\frac{18}{5}} y^4 + 2^{\frac{21}{5}} y^3 - 2^{\frac{12}{5}} y + 1,$$

lglich für $1 < y < 2^{\frac{13}{5}}$

$$\varphi(y) = y^5 - 2^{\frac{18}{5}} y^4 - 2^{\frac{21}{5}} y^3 + 2^{\frac{12}{5}} y + 3 < 0$$

. Nun ist $\varphi(0) > 0$, $\varphi(1) < 0$ und $\varphi(2^{\frac{13}{5}}) < 0$. Daher liegt im tervall $\{0 \ldots 1\}$ und im Intervall $\{2^{\frac{13}{5}} \ldots \infty\}$ mindestens je eine Wurzel r Gleichung $\varphi(y) = 0$. Da andererseits nach der Descartesschen Zeichen-gel $\varphi(y) = 0$ höchstens zwei positive Wurzeln haben kann, liegt im tervall $\{1 \ldots 2^{\frac{13}{5}}\}$ keine Wurzel, also ist in diesem Intervall $\varphi(y) < 0$. amit ist (51) bewiesen und der Beweis für die Primzahlen $p < 2^{13}$ der orm $8n + 5$ geführt.

Für $p = 11$ ist 7, für $p = 19$ ist 3 Nichtrest, die Behauptung also erfüllt. Für $p \geqq 43$ ist

$$2\{(4p)^{\frac{2}{5}} + (4p)^{\frac{1}{5}}\} + 1 > 11.$$

Man braucht daher nur noch solche Primzahlen $p < 2^{13}$ der Form $8n + 3$ zu betrachten, für die 3, 5, 7 und 11 Reste sind. Man erhält 18 solche Primzahlen, für die man die Richtigkeit der Behauptung leicht direkt beweist.

Damit ist Satz 3 allgemein bewiesen.

Für die Primzahlen der Form $8n + 5$ läßt sich Satz 3 noch etwas verschärfen, indem man berücksichtigt, daß in diesem Fall nicht nur die Zahlen

$$p + 1,\ p + 3,\ \ldots,\ p + u - 2,$$

sondern auch die Zahlen

$$p - 1,\ p - 3,\ \ldots,\ p - u + 2$$

sämtlich quadratische Reste sind. Man kann daher die Multipla von $2^{2\varrho+1}$ im Intervall $\{p - u + 2 \ldots p + u - 2\}$ betrachten. Die angewandte Methode ergibt dann, wie man leicht sieht, statt (44) die schärfere Abschätzung

$$u < \mathrm{Max}\{a + 2 + [\sqrt{2a}],\ 2^{2\varrho} s\}.$$

Dementsprechend ist die weitere Durchführung des Beweises ein wenig abzuändern. Hierauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden.

§ 3.

Auf Grund des Reziprozitätsgesetzes folgt aus Satz 2 und 3 sofort die Richtigkeit des Satzes A für die Primzahlen der Form $8n + 5$. Es soll nun gezeigt werden, daß der Satz A auch für die übrigen ungeraden Primzahlen gilt, indem der folgende schärfere Satz bewiesen wird:

Satz 4. *Für jede Primzahl p der Form $4n - 1$ gibt es eine ungerade Primzahl q*

$$q < 2^{\frac{8}{5}}(3p)^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{8}{5}}(3p)^{\frac{1}{5}} + 1,$$

für die p quadratischer Nichtrest ist.

Beweis. Es sei $N \geqq 2$ eine ganze Zahl; p sei quadratischer Rest für alle ungeraden Primzahlen, die kleiner als $2N$ sind. Sind dann $q_1', q_2', \ldots, q_\alpha'$ die Primzahlen der Form $4n + 1$ und $q_1'', q_2'', \ldots, q_\beta''$ diejenigen der Form $4n - 1$, die kleiner als $2N$ sind, so ist

$$\left(\frac{p}{q_\mu'}\right) = \left(\frac{p}{q_\nu''}\right) = +1 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \alpha;\ \nu = 1, 2, \ldots, \beta),$$

olglich

$$\left(\frac{q'_\mu}{p}\right) = +1 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

$$\left(\frac{q''_\nu}{p}\right) = -1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Hieraus folgt, daß die positiven Zahlen der Form $4n+1$, die kleiner als $2N$ sind, sämtlich quadratische Reste (mod p) und die der Form $4n-1$, die kleiner als $2N$ sind, sämtlich Nichtreste sind. Daher sind die Zahlen

$$3p+3,\ 3p+7,\ 3p+11,\ \ldots,\ 3p+4\left[\frac{N}{2}\right]-1 \tag{52}$$

sämtlich Nichtreste; da -1 Nichtrest ist, sind dann auch die Zahlen

$$3p-1,\ 3p-5,\ 3p-9,\ \ldots,\ 3p-4\left[\frac{N-1}{2}\right]-1 \tag{53}$$

sämtlich Nichtreste. Ferner sind die Zahlen (52) und (53) die sämtlichen im Intervall $\{3p-2N \ldots 3p+2N\}$ gelegenen, durch 4 teilbaren Zahlen.

Nun sei ϱ eine beliebige positive ganze Zahl, die der Bedingung

$$4 \leqq 2^{2\varrho} \leqq 4N \tag{54}$$

genügt. Die im Intervall $\{3p-2N \ldots 3p+2N\}$ gelegenen ganzzahligen Multipla von $2^{2\varrho}$ seien

$$k\cdot 2^{2\varrho},\ (k+1)2^{2\varrho},\ \ldots,\ (k+l-1)2^{2\varrho} \qquad (l \geqq 1). \tag{55}$$

Diese Multipla sind dann wegen (54) durch 4 teilbar und daher Zahlen aus den Reihen (52) und (53), sie sind also quadratische Nichtreste. Folglich bilden die Zahlen

$$k,\ k+1,\ \ldots,\ k+l-1 \tag{56}$$

eine Sequenz von l Nichtresten. Die positive ganze Zahl a sei wieder so bestimmt, daß

$$a^2 < k \leqq k+l-1 < (a+1)^2 \tag{57}$$

ist. Dann ist wegen (55)

$$k \leqq \left[\frac{3p}{2^{2\varrho}}\right] + 1,$$

folglich wegen (57)

$$a^2 < \frac{3p}{2^{2\varrho}},$$

$$a < \frac{1}{2^\varrho}\sqrt{3p}. \tag{58}$$

Man muß nun wieder zwei Fälle unterscheiden:

I. Es sei a gerade.

Wie in (25) sei die positive ganze Zahl t' so bestimmt, daß

$$(a+1)^2 - (2t')^2 > a^2 > (a+1)^2 - (2t'+2)^2$$

ist. Dann folgt aus (26)

$$2t' \leqq [\sqrt{2a}]. \tag{59}$$

Die Punkte

$$(a+1)^2 - (2\nu)^2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, t') \tag{60}$$

zerlegen das Intervall $A = \{a^2 \ldots (a+1)^2\}$ in Teilintervalle, deren Maximallänge s' nach (31)

$$s' \leqq 4[\sqrt{2a}] + 1 \tag{61}$$

ist.

II. Es sei a ungerade.

t'' sei die größte positive ganze Zahl, derart, daß

$$(a+2)^2 - (2t'')^2 > a^2$$

ist. Dann ist

$$2t'' < \sqrt{4a+4},$$

$$t'' \leqq [\sqrt{a}]. \tag{62}$$

Durch die Punkte

$$(a+2)^2 - (2\nu)^2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, t'') \tag{63}$$

wird das Intervall $A = \{a^2 \ldots (a+1)^2\}$ in Teilintervalle geteilt, deren Maximallänge s'' sei[8]). Die Entfernung zweier benachbarter Teilpunkte ist

$$((a+2)^2 - (2\nu)^2) - ((a+2)^2 - (2\nu+2)^2) = 8\nu + 4;$$

daher ist wegen (62)

$$s'' \leqq 8[\sqrt{a}] + 4. \tag{64}$$

Teilt man also das Intervall A im Falle I durch die Punkte (60), im Falle II durch die Punkte (63) in Teilintervalle ein, so ist die Maximallänge s dieser Intervalle wegen (61) und (64)

$$s = \mathrm{Max}(s', s'') \leqq 8[\sqrt{a}] + 4. \tag{65}$$

Wäre nun

$$2N - 1 \geqq \mathrm{Max}\{a + 2 + 2[\sqrt{a}],\ 2^{2\varrho-1}s - 2\}, \tag{66}$$

so wären von den positiven ungeraden Zahlen $\leqq a + 2 + 2[\sqrt{a}]$ die Zahlen der Form $4n+1$ sämtlich Reste, die Zahlen der Form $4n-1$ sämtlich Nichtreste (mod p). Nun waren die Endpunkte der Teilintervalle im Falle I die Punkte (60)

$$(a+1)^2 - (2\nu)^2 = (a+1+2\nu)(a+1-2\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, t').$$

Da in diesem Falle a gerade war, ist

$$a + 1 + 2\nu \equiv a + 1 - 2\nu \equiv 1 \pmod 2$$

---

[8]) Fällt keiner der Punkte (63) in das Intervall A, so ist unter s'' die Länge von A zu verstehen.

nd

$$a+1+2\nu \equiv a+1-2\nu \pmod 4.$$

ie Zahlen $a+1+2\nu$ und $a+1-2\nu$ sind also entweder beide von der orm $4n+1$ oder beide von der Form $4n-1$. Da wegen (59)

$$t' \leqq [\sqrt{a}]$$

t, ist daher

$$\left(\frac{a+1+2\nu}{p}\right) = \left(\frac{a+1-2\nu}{p}\right),$$

olglich

67) $$\left(\frac{(a+1)^2-(2\nu)^2}{p}\right) = +1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, t').$$

nalog folgt im Falle II, da hier a ungerade ist, daß die Punkte (63)

$$(a+2)^2-(2\nu)^2 = (a+2+2\nu)(a+2-2\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, t'')$$

ämtlich quadratische Reste sind, weil wegen (62)

$$t'' \leqq [\sqrt{a}]$$

st.

In beiden Fällen sind also wieder die Endpunkte der Intervalle, in ie das Intervall A eingeteilt wurde, sämtlich quadratische Reste. Daher önnte wegen (65) das Intervall A keine Sequenz von s Nichtresten entalten. Andererseits ist nach (66)

$$4N+1 \geqq 2^{2\varrho}s - 1.$$

Betrachtet man diese Ungleichung (mod 4), so folgt wegen $\varrho \geqq 1$

68) $$4N+1 \geqq 2^{2\varrho}s + 1.$$

Nun enthielt das Intervall $\{3p-2N \ldots 3p+2N\}$ nach (55) genau l Multipla von $2^{2\varrho}$; nach (68) ist daher

$$l \geqq s.$$

Daher enthielte wegen (56) und (57) das Intervall A eine Sequenz $, k+1, \ldots, k+l-1$ von mindestens s Nichtresten. Dies liefert einen Widerspruch; die Ungleichung (66) ist also unmöglich. Folglich ist

69) $$2N-1 < \operatorname{Max}\left\{a+2+2[\sqrt{a}],\ 2^{2\varrho-1}s-2\right\}.$$

Ist nun a gerade, so hätte man in Ungleichung (66) wegen (60) nd (67) $a+2+2[\sqrt{a}]$ durch $a+1+2[\sqrt{a}]$ ersetzen können. Man hält dann in diesem Falle statt (69)

70) $$2N-1 < \operatorname{Max}\left\{a+1+2[\sqrt{a}],\ 2^{2\varrho-1}s-2\right\}.$$

st aber a ungerade, so folgt (70) direkt aus (69), so daß (70) allgemein lt. Also ist

$$2N \leqq \operatorname{Max}\left\{a+1+2[\sqrt{a}],\ 2^{2\varrho-1}s-2\right\}.$$

Wegen (65) und (58) folgt daher

$$2N \leqq \operatorname{Max}\left\{a+1+2\sqrt{a},\ 2^{2\varrho+1}(2\sqrt{a}+1)-2\right\},$$

$$(71)\quad 2N < \operatorname{Max}\left\{\tfrac{1}{2^\varrho}\sqrt{3p}+1+2\sqrt{\tfrac{1}{2^\varrho}\sqrt{3p}},\ 2^{2\varrho+1}\left(2\sqrt{\tfrac{1}{2^\varrho}\sqrt{3p}}+1\right)-2\right\}.$$

Es sei nun zunächst

$$p > \frac{2^{16}}{3}.$$

Dann läßt sich $\varrho \geqq 1$ eindeutig so bestimmen, daß

$$(72)\quad \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{3}{2}p\right)^{\frac{1}{5}} < 2^{2\varrho} < \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2}p\right)^{\frac{1}{5}}$$

wird.

Angenommen es wäre nun

$$(73)\quad 2N \geqq 2^{\frac{3}{5}}(3p)^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{2}{5}}(3p)^{\frac{1}{5}} + 1,$$

so wäre wegen (72) die Bedingung (54) erfüllt; ferner wäre

$$\tfrac{1}{2^\varrho}\sqrt{3p}+1+2\sqrt{\tfrac{1}{2^\varrho}\sqrt{3p}} < \sqrt{8}\left(\tfrac{3}{2}p\right)^{-\frac{1}{10}}\sqrt{3p}+1+2(24p)^{\frac{1}{4}}\left(\tfrac{3}{2}p\right)^{-\frac{1}{20}}$$

$$= 2^{\frac{3}{5}}(3p)^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{4}{5}}(3p)^{\frac{1}{5}} + 1$$

und

$$2^{2\varrho+1}\left(2\sqrt{\tfrac{1}{2^\varrho}\sqrt{3p}}+1\right)-2 < \left(\tfrac{3}{2}p\right)^{\frac{1}{5}}\left\{2(24p)^{\frac{1}{4}}\left(\tfrac{3}{2}p\right)^{-\frac{1}{20}}+1\right\}$$

$$< 2^{\frac{3}{5}}(3p)^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{2}{5}}(3p)^{\frac{1}{5}} + 1.$$

Aus (71) würde daher folgen

$$2N < 2^{\frac{3}{5}}(3p)^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{2}{5}}(3p)^{\frac{1}{5}} + 1.$$

Dies steht im Widerspruch zu (73); die Ungleichung (73) ist also unmöglich, und es ist

$$2N < 2^{\frac{3}{5}}(3p)^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{2}{5}}(3p)^{\frac{1}{5}} + 1.$$

Folglich gibt es unterhalb von $2^{\frac{3}{5}}(3p)^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{2}{5}}(3p)^{\frac{1}{5}} + 1$ mindestens eine ungerade Primzahl q, für die p quadratischer Nichtrest ist.

Damit ist Satz 4 für $p > \frac{2^{16}}{3}$ bewiesen.

Daß er auch für $p < \frac{2^{16}}{3}$ gilt, zeigt eine leichte, wenn auch etwas umständliche, direkte Rechnung.

Für die Primzahlen der Form $8n-1$ läßt sich der Satz 4 noch ein wenig verschärfen, da hier 2 Rest ist, man also statt der Multipla von $2^{2\varrho}$ die Multipla von $2^{\varrho+1}$ betrachten kann. Hierauf soll nicht näher eingegangen werden.

(Eingegangen am 16. Dezember 1929.)

ber den Konvergenzbereich der Potenzreihenentwicklung iner harmonischen Funktion von n Veränderlichen.

Von

T. H. Gronwall in New York.

1. Einleitung.

Es sei u eine harmonische Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche inner- b der Einheitskugel $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 < 1$ regulär ist. Dann ist zufolge verallgemeinerten Poissonschen Formel für $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < R^2 < 1$

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}} R} \int u_\xi \frac{R^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}{r^n} d\omega,$$

u_ξ der Wert von u im Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ der Kugel $\sum_1^n \xi_\nu^2 = R^2$, das Flächenelement dieser Kugel und $r^2 = \sum_1^n (x_\nu - \xi_\nu)^2$ ist. Von jetzt lassen wir auch komplexe Werte der x_ν zu; aus (1) folgt, daß u jeden- s für hinreichend kleine Werte aller $|x_\nu|$ nach Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wickelt werden kann, und es entsteht die Frage nach dem vollständigen nvergenzbereich [1]).

Im Falle $n = 2$ liegt die Sache besonders einfach; Bôcher [2]) hat be- sen, daß, wenn der Einheitskreis der größte Kreis ist, in welchem die monische Funktion regulär ist, das Innere des Konvergenzbereiches au: n Inneren des schräg gestellten Quadrates

$$|x_1| + |x_2| < 1$$

[1]) Wie allgemein üblich, betrachten wir nur den $2n$-dimensionalen Bereich der luten Konvergenz, unter Ausschluß der etwa vorhandenen „Ausläufer“ geringerer ensionszahl, welche durch Nullsetzen eines oder mehrerer x_ν entstehen.

[2]) M. Bôcher, On the regions of convergence of power series which represent dimensional harmonic functions, Trans. Am. Math. Soc. **15** (1909), S. 271—278.

besteht. Für $n > 2$ können aber, wie am Ende des § 4 an Beispielen gezeigt wird, zwei nur innerhalb der Einheitskugel reguläre harmonische Funktionen Potenzreihenentwicklungen mit verschiedenen Konvergenzbereichen haben, und die Bestimmung dieser wird schwierig.

Wir stellen uns hier die viel bescheidenere Aufgabe, den größten Bereich zu bestimmen, welcher allen diesen Konvergenzbereichen angehört. Herr Kellogg hat gezeigt[3]), daß das „Oktaederinnere“

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| < 1$$

jedenfalls in dem gesuchten Bereich enthalten ist. Dieses Resultat, das mir Herr Kellogg vor mehreren Jahren brieflich mitteilte, gab die Anregung zur vorliegenden Arbeit, deren Ergebnis der folgende Satz ist:

Satz. *Der größte Bereich K, welcher in dem Konvergenzbereich der Entwicklung nach Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einer jeden innerhalb der Einheitskugel regulären harmonischen Funktion enthalten ist, wird durch folgende Ungleichungen definiert:*

Erstens ist

$$\sum_1^n |x_\nu|^2 < \frac{1}{2}, \tag{3}$$

wenn

$$|x_1| \leqq \frac{1}{2},\ |x_2| \leqq \frac{1}{2},\ \ldots,\ |x_n| \leqq \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Zweitens ist

$$\sum_1^n |x_\nu|^2 - |x_k|^2 - (1 - |x_k|)^2 < 0, \tag{5}$$

wenn

$$\frac{1}{2} \leqq |x_k| \leqq 1, \tag{6}$$

wobei k die Werte $1, 2, \ldots, n$ durchläuft.

Werden $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$ als rechtwinklige Koordinaten eines n-dimensionalen Euklidischen Raumes gedeutet, so besteht, wie unmittelbar ersichtlich, die Begrenzung von K aus den Koordinatenebenen $|x_1| = 0, \ldots, |x_n| = 0$ sowie dem durch (4) abgegrenzten Stück der Kugel $\sum |x_\nu|^2 = \frac{1}{2}$ nebst den durch (6) festgelegten Stücken der Tangentenkegel aus den Punkten $|x_k| = 1$, $|x_\nu| = 0$ $(\nu \neq k)$, welche die Kugel in den durch $|x_k| = \frac{1}{2}$ gegebenen Kreisen berühren. Aus $|x_k|^2 + (1 - |x_k|)^2 \leqq 1$ für $|x_k| \leqq 1$ folgt übrigens, daß K ganz innerhalb der Einheitskugel liegt. *Ferner ist K konvex*; der recht einfache Beweis möge hier unterbleiben, da wir im folgenden diese Eigenschaft nicht gebrauchen werden.

---

[3]) O. D. Kellogg, On bounded polynomials in several variables, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 55—64. Siehe Ende des § 3, S. 59.

Der Beweis unseres Satzes wird in § 2 durch Untersuchung der Nullstellen des Nenners rechts in (1) für $R = 1$ vorbereitet, und in § 3 wird bewiesen, daß der Bereich K mindestens so groß ist, als der Satz angibt. In § 4 wird durch Beispiele gezeigt, daß K auch nicht größer sein kann, was den Beweis vollendet. Endlich bringt § 5 einen neuen, sehr kurzen Beweis des Bôcherschen Satzes für $n = 2$.

2. Die Nullstellen von r.

Es sei

$$r^2 = \sum_1^n (x_\nu - \xi_\nu)^2 \tag{7}$$

und

$$\sum_1^n \xi_\nu^2 = 1, \tag{8}$$

sowie alle ξ_ν reell; es soll gezeigt werden, daß, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Nullstelle von r^2 ist, die absoluten Beträge $|x_\nu|$ außerhalb oder auf der Begrenzung des durch die Ungleichungen (3) bis (6) bestimmten Bereiches liegen.

Es sei also

$$\sum_1^n (x_\nu - \xi_\nu)^2 = 0, \tag{9}$$

woraus durch Übergang zu den konjugiert komplexen Größen

$$\sum_1^n (\bar{x}_\nu - \xi_\nu)^2 = 0. \tag{10}$$

Wir machen die Annahmen (von welchen wir uns nachher befreien werden): jedes $|x_\nu| > 0$ und $\xi_n (x_n - \xi_n) \neq 0$. Wir halten jetzt $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n-1}|$ konstant:

$$x_\nu \bar{x}_\nu = |x_\nu|^2 = r_\nu^2 = \text{konst.} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{11}$$

lassen die reellen ξ_ν unter Einhaltung von (8) sich verändern und fragen nach dem kleinsten absoluten Betrag eines x_n, welches (9) genügt. Aus (8) folgt durch Differenzieren

$$\sum_1^n \xi_\nu \, d\xi_\nu = 0, \tag{12}$$

aus (9), (10) und (12),

$$\begin{aligned} \sum_1^n (x_\nu - \xi_\nu)\, dx_\nu - \sum_1^n x_\nu \, d\xi_\nu &= 0, \\ \sum_1^n (\bar{x}_\nu - \xi_\nu)\, d\bar{x}_\nu - \sum_1^n \bar{x}_\nu \, d\xi_\nu &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Tragen wir $d\xi_n$ aus (12) in (13) ein, lösen diese Gleichungen sodann nach

dx_n und $d\bar{x}_n$ auf und beachten, daß zufolge (11) $d\bar{x}_\nu = -\frac{\bar{x}_\nu}{x_\nu} dx_\nu$ für $\nu < n$ ist, so erhalten wir

$$\frac{2}{|x_n|} d|x_n| = \frac{dx_n}{x_n} + \frac{d\bar{x}_n}{\bar{x}_n} = \sum_1^{n-1} \left(\frac{\bar{x}_\nu}{\bar{x}_n x_\nu} \cdot \frac{\bar{x}_\nu - \xi_\nu}{\bar{x}_n - \xi_n} - \frac{1}{x_n} \cdot \frac{x_\nu - \xi_\nu}{x_n - \xi_n} \right) dx_\nu + \sum_1^{n-1} \left(\frac{x_\nu - \frac{\xi_\nu}{\xi_n} x_n}{x_n (x_n - \xi_n)} + \frac{\bar{x}_\nu - \frac{\xi_\nu}{\xi_n} \bar{x}_n}{\bar{x}_n (\bar{x}_n - \xi_n)} \right) d\xi_\nu . \tag{14}$$

Für ein Extrem von $|x_n|$ müssen die Koeffizienten der Differentiale rechts verschwinden; der Koeffizient von $d\xi_\nu$ gleich Null gesetzt sagt aus, daß

$$\frac{x_\nu - \frac{\xi_\nu}{\xi_n} x_n}{x_n (x_n - \xi_n)}$$

rein imaginär ist, so daß unter Einführung reeller Parameter α_ν

$$x_\nu - \frac{\xi_\nu}{\xi_n} x_n = i \alpha_\nu \frac{x_n}{\xi_n} (x_n - \xi_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{15}$$

Setzen wir den Koeffizienten von dx_ν in (14) gleich Null, so ergibt eine kurze Rechnung unter Benutzung von (15)

$$\alpha_\nu (2 i \xi_\nu - \alpha_\nu (x_n - \bar{x}_n))(x_n + \bar{x}_n - \xi_n) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{16}$$

Es sind demnach zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall:

$$\xi_n = x_n + \bar{x}_n . \tag{17}$$

Wird in (15) jede Gleichung zu der ihr konjugierten addiert, so kommt wegen (17)

$$\xi_\nu = x_\nu + \bar{x}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{18}$$

Gleichungen (10) und (9) werden nun

$$\sum_1^n x_\nu^2 = 0, \qquad \sum_1^n \bar{x}_\nu^2 = 0, \tag{19}$$

und (8) wird unter Benutzung von (18) und (19)

$$\sum_1^n |x_\nu|^2 = \frac{1}{2} . \tag{20}$$

Aus (19) folgt

$$|x_k|^2 = |\sum_{\nu \neq k} x_\nu^2| \leqq \sum_{\nu \neq k} |x_\nu|^2 ,$$

woraus wegen (20) $2|x_k|^2 \leqq \frac{1}{2}$ oder

$$|x_k| \leqq \frac{1}{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Zweiter Fall: $\xi_n \neq x_n + \bar{x}_n$. Durch Umnummerierung der Veränderlichen erhält man aus (16)

$$\xi_\nu = \frac{i\alpha_\nu}{2}(\bar{x}_n - x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \tag{22}$$

$$\alpha_\nu = 0 \qquad (\nu = m+1, \ldots, n-1).$$

Sollte $m = 0$ bzw. $n-1$ sein, so ist die erste bzw. zweite Zeile in (22) zu streichen. Zufolge (22) und (15) nimmt (9) die Form

$$-\left(\frac{x_n + \bar{x}_n}{2}\right)^2 \sum_1^m \alpha_\nu^2 + \sum_{m+1}^n \xi_\nu^2 = 0,$$

und aus (8) wird

$$-\left(\frac{x_n - \bar{x}_n}{2}\right)^2 \sum_1^m \alpha_\nu^2 + \sum_{m+1}^n \xi_\nu^2 = 1;$$

diese beiden Gleichungen ergeben

$$\sum_1^m \alpha_\nu^2 = \frac{1}{|x_n|^2}, \qquad \sum_{m+1}^n \xi_\nu^2 = \left(\frac{x_n + \bar{x}_n}{2|x_n|}\right)^2, \tag{23}$$

so daß $m > 0$. Wird $\frac{x_n + \bar{x}_n}{2\xi_n} = 1 - \lambda$ gesetzt, so daß λ reell ist, so rechnet man aus (15), (22) und (23) leicht nach, daß

$$\sum_1^m |x_\nu|^2 = \lambda^2, \qquad \sum_{m+1}^n |x_\nu|^2 = (1-\lambda)^2. \tag{24}$$

Kein Punkt von (24) kann aber dem durch (3) bis (6) definierten Bereich angehören, denn ist $\lambda < 0$ oder > 1, so liegt jeder Punkt von (24) außerhalb der Einheitskugel. Es sei also $0 \leqq \lambda \leqq 1$; dann ergibt (24) $\sum_1^n |x_\nu|^2 = \lambda^2 + (1-\lambda)^2 \geqq \frac{1}{2}$, so daß (3) nicht erfüllt ist. Es sei jetzt $\frac{1}{2} \leqq |x_k| \leqq 1$; durch Umnumerierung der Veränderlichen und eventuellen Ersatz von λ durch $1-\lambda$ in (24) läßt sich erreichen, daß $1 \leqq k \leqq m$, so daß (24)

$$\frac{1}{2} \leqq |x_k| \leqq \lambda \leqq 1$$

ergibt, und es wird

$$\sum_1^n |x_\nu|^2 - |x_k|^2 - (1 - |x_k|)^2 = \lambda^2 + (1-\lambda)^2 - |x_k|^2 - (1 - |x_k|)^2$$
$$= 2(\lambda - |x_k|)(\lambda + |x_k| - 1).$$

Der letzte Ausdruck ist wegen der vorangehenden Ungleichung nichtnegativ, so daß (5) nicht erfüllt ist.

Um die anfangs dieses Paragraphen gemachte Behauptung zu beweisen, sind jetzt noch die Annahmen: jedes $|x_\nu| > 0$ und $\xi_n(x_n - \xi_n) \neq 0$ zu

beseitigen. Letztere Annahme ist nur dann durch Umnumerierung der Veränderlichen nicht zu vermeiden, wenn $\xi_\nu(x_\nu - \xi_\nu) = 0$ für jedes ν; dann ergibt aber eine geeignete Umnumerierung $x_\nu = \xi_\nu$ für $1 \leqq \nu \leqq m$, $x_\nu \neq \xi_\nu$ und $\xi_\nu = 0$ für $m+1 \leqq \nu \leqq n$, und (8) zeigt daß $\sum_1^m |x_\nu|^2 = \sum_1^m \xi_\nu^2 = 1$, so daß $\sum_1^n |x_\nu|^2 \geqq 1$, und die Ungleichungen (3) bis (6) sind nicht erfüllt.

Es seien jetzt einige $x_\nu = 0$ (aber wegen (8) und (9) nicht alle); nehmen wir also $x_1 \neq 0, \ldots, x_m \neq 0$, $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$ an, wobei $1 \leqq m < n$. Dann folgt aus (8), (9) und (10) daß

$$\begin{aligned} &\sum_1^m (x_\nu - \xi_\nu)^2 + 1 - \sum_1^m \xi_\nu^2 = 0, \\ &\sum_1^m (\bar{x}_\nu - \xi_\nu)^2 + 1 - \sum_1^m \xi_\nu^2 = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Zunächst sei $m = 1$, dann folgt aus (25)

$$x_1 = \xi_1 \pm i\sqrt{1 - \xi_1^2},$$

und wegen $\xi_1^2 \leqq 1$, $|x_1| = 1$. Es sei jetzt $1 < m < n$; ist außerdem $x_\nu = \xi_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$, so folgt $\sum_1^m |x_\nu|^2 = 1$. Nachdem dieser Fall erledigt ist, können wir $x_m \neq \xi_m$ annehmen, und unter Festhaltung von $x_\nu \bar{x}_\nu = |x_\nu|^2$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m-1$ folgt aus (25)

$$\begin{aligned} \frac{2}{|x_m|} d|x_m| = \frac{dx_m}{x_m} + \frac{d\bar{x}_m}{\bar{x}_m} = &\sum_1^{m-1} \left(\frac{\bar{x}_\nu}{\bar{x}_m x_\nu} \cdot \frac{\bar{x}_\nu - \xi_\nu}{\bar{x}_m - \xi_m} - \frac{1}{x_m} \frac{x_\nu - \xi_\nu}{x_m - \xi_m} \right) dx_\nu \\ &+ \sum_1^m \left(\frac{x_\nu}{x_m(x_m - \xi_m)} + \frac{\bar{x}_\nu}{\bar{x}_m(\bar{x}_m - \xi_m)} \right) d\xi_\nu. \end{aligned}$$

Wegen $m < n$ haben wir also für ein Extrem von $|x_m|$

$$\frac{x_\nu}{x_m(x_m - \xi_m)} + \frac{\bar{x}_\nu}{\bar{x}_m(\bar{x}_m - \xi_m)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\frac{\bar{x}_\nu}{\bar{x}_m(\bar{x}_m - \xi_m)}(\bar{x}_\nu - \xi_\nu) - \frac{x_\nu}{x_m(x_m - \xi_m)}(x_\nu - \xi_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Aus dem zweiten dieser Gleichungssysteme folgt unter Zuhilfenahme des ersten daß

$$x_\nu + \bar{x}_\nu - 2\xi_\nu = 0 \tag{26}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, m-1$ und aus dem ersten System ($\nu = m$ gesetzt) folgt (26) auch für $\nu = m$. Wird nun aber ξ_ν aus (26) in (25) eingetragen, bekommen wir $\sum_1^m |x_\nu|^2 = 1$.

3. Beweis, daß der durch (3) bis (6) definierte Bereich K in dem gesuchten enthalten ist.

Es sei $|x_\nu| = r_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ein auf der Begrenzung von K liegender Punkt; dann liegt, wie aus (3) bis (6) unmittelbar ersichtlich, jeder Punkt wo $|x_\nu| \leqq R r_\nu$ und $R < 1$ auch innerhalb K, und aus dem Resultat des vorangehenden Paragraphen folgt, daß zu jedem $R < 1$ ein $\varepsilon(R) > 0$ existiert derart, daß

$$\left| \sum_1^n (x_\nu - \xi_\nu)^2 \right| \geqq R^2 \varepsilon(R)$$

gleichmäßig in den x_ν und ξ_ν für $|x_\nu| \leqq R r_\nu$ und $\sum_1^n \xi_\nu^2 = 1$. Verkleinert man alle x_ν und ξ_ν im Verhältnis R, so besteht die Ungleichung

$$\left| \sum_1^n (x_\nu - \xi_\nu)^2 \right| \geqq \varepsilon(R)$$

offenbar auch gleichmäßig in den x_ν und ξ_ν für $|x_\nu| \leqq R^2 r_\nu$ und $\sum_1^n \xi_\nu^2 = R^2$. Die n-malige Anwendung des Cauchyschen Integrals auf die Kreise $|x_\nu| = R^2 r_\nu$ zeigt nun in bekannter Weise[4]), daß r^{-n} nach Potenzen der x_ν entwickelbar ist, und zwar ist die Konvergenz gleichmäßig für $|x_\nu| \leqq R^3 r_\nu$ und $\sum_1^n \xi_\nu^2 = R^2$. Durch Eintragen in (1) und Grenzübergang $R \to 1$ folgt daher, daß die Potenzreihenentwicklung einer jeden innerhalb der Einheitskugel regulären harmonischen Funktion u im Inneren des durch (3) bis (6) definierten Bereiches K konvergiert.

4. Beweis, daß der durch (3) bis (6) definierte Bereich K der größte seiner Art ist.

Hier genügt offenbar die Angabe von Beispielen. Es werde r durch (7) definiert, wobei die ξ_ν (8) genügen; dann ist r^{2-n} (bez. $\log r$ für $n = 2$) eine für reelle x_ν innerhalb der Einheitskugel reguläre harmonische Funktion. In einem Konvergenzpunkte ihrer Potenzreihe muß $r \neq 0$ sein, und unsere Behauptung ist bewiesen, wenn es gelingt, zu jedem Punkt $|x_1|, \ldots, |x_n|$ der Begrenzung von K reelle Werte der φ_ν in $x_\nu = |x_\nu| e^{i\varphi_\nu}$ und zugehörige reelle, (8) genügende ξ_ν anzugeben, für welche $r = 0$ wird.

Erstens möge der Punkt $|x_1|, \ldots, |x_n|$ auf dem sphärischen Teil (20), (21) der Begrenzung von K liegen. Es gibt dann ein $m \geqq 2$ derart, daß

$$0 < \sum_1^{m-1} |x_\nu|^2 \leqq \frac{1}{4}, \qquad \sum_1^m |x_\nu|^2 > \frac{1}{4},$$

[4]) Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. 2, Kap. 1.

oder, $\sum_1^{m-1} |x_\nu|^2 = a^2$ gesetzt,

$$0 \leqq \frac{1}{4} - |x_m|^2 < a^2 \leqq \frac{1}{4}. \tag{27}$$

Versuchen wir jetzt, mit

$$\begin{aligned} x_\nu &= |x_\nu| e^{\varphi i} && (\nu = 1, 2, \ldots, m-1), \\ x_m &= |x_m| e^{\psi i} \\ x_\nu &= |x_\nu|, && (\nu = m+1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{28}$$

und reellem φ und ψ der Bedingung (19) zu genügen. Wir erhalten wegen (20)

$$-|x_m|^2 e^{2\psi i} = a^2 e^{2\varphi i} + \frac{1}{2} - a^2 - |x_m|^2,$$

und die Bedingung für die Realität von ψ wird

$$|x_m|^4 = \left(a^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} - a^2 - |x_m|^2\right)^2 + a^4 \sin^2 2\varphi,$$

woraus

$$\sin^2 \varphi = \frac{\frac{1}{4} - |x_m|^2}{4a^2\left(\frac{1}{2} - a^2 - |x_m|^2\right)}$$

folgt, und weil a^2 im Intervall (27) liegt, wird $0 \leqq \sin^2 \varphi \leqq 1$, so daß φ reell ist. Werden endlich die ξ_ν durch (17) und (18) bestimmt, so liegen sie wegen (19) und (20) auf der Einheitskugel (8), und r verschwindet an der durch (28) gegebenen Stelle $x_1, \ldots, x_n$.

Zweitens möge der Punkt $|x_1|, \ldots, |x_n|$ auf dem durch

$$\sum_{\nu \neq k} |x_\nu|^2 - (1 - |x_k|)^2 = 0 \tag{29}$$

und (6) definierten Teil der Begrenzung von K liegen. Wir genügen (8) durch $\xi_k = 1$, $\xi_\nu = 0\,(\nu \neq k)$, so daß

$$r^2 = (x_k - 1)^2 + \sum_{\nu \neq k} x_\nu^2 \tag{30}$$

wird, und wegen (29) verschwindet r an der Stelle $x_k = |x_k|$, $x_\nu = i\,|x_\nu|$, $\nu \neq k$.

Um endlich für $n > 2$ die im § 1 angedeuteten Beispiele von innerhalb der Einheitskugel, aber keiner größeren konzentrischen Kugel, regulären harmonischen Funktionen mit verschiedenen Konvergenzbereichen ihrer Potenzreihen aufzustellen, bemerken wir, daß wenn $r = 0$ in (30),

$$(1 - |x_k|)^2 \leqq |1 - x_k|^2 = \left|\sum_{\nu \neq k} x_\nu^2\right| \leqq \sum_{\nu \neq k} |x_\nu|^2,$$

so daß $r \neq 0$ innerhalb des durch $0 \leqq |x_k| \leqq 1$ definierten Stückes des Kegels (5). Die in § 3 beschriebene Anwendung des Cauchyschen Integrals zeigt nun, daß die Potenzreihe für r^{2-n} in (5) und $0 \leqq |x_k| \leqq 1$ konvergiert, und wegen der soeben an (29) angeknüpften Betrachtung nur dort. Setzen wir $k = 1$ und $k = 2$, so sind für $n > 2$ diese beiden Kegelstücke verschieden.

5. Neuer Beweis des Bôcherschen Satzes.

Der Beweis, daß für $n = 2$ das durch (7) und (8) definierte r in dem Bereiche (2) nicht verschwindet, ist viel kürzer als im allgemeinen Falle zu führen. Wir genügen (8) durch $\xi_1 = \cos\alpha$, $\xi_2 = \sin\alpha$, und $r = 0$ ergibt zufolge (7) $x_1 - \cos\alpha = \pm i(x_2 - \sin\alpha)$ oder $x_1 = \pm i x_2 + e^{\mp \alpha i}$, woraus

$$|x_1| \geqq |e^{\mp \alpha i}| - |i x_2| = 1 - |x_2|.$$

Der Nachweis, daß die Potenzreihe einer im Einheitskreise regulären harmonischen Funktion $u(x_1, x_2)$ innerhalb (2) konvergiert, wird wie in § 3 geführt. Um umgekehrt zu beweisen, daß, wenn die Potenzreihe in einem Punkte außerhalb (2) konvergiert, $u(x_1, x_2)$ auch in einem größeren Kreise $|x_1 + i x_2| < R$ mit $R > 1$ regulär sein muß, beachten wir, daß wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die Konvergenzbereiche der Potenzreihen von $u(x_1, x_2)$ und der konjugierten Funktion $v(x_1, x_2)$ zusammenfallen. Es möge nun ein Punkt $|x_1^0|$, $|x_2^0|$, wo $|x_1^0| > 0$, $|x_2^0| > 0$ und $|x_1^0| + |x_2^0| > 1$, dem Konvergenzbereich angehören. Dasselbe ist dann, wegen eines bekannten Abelschen Satzes, der Fall für

$$x_1 = \lambda |x_1^0|, \quad x_2 = -i\lambda |x_2^0|, \quad |\lambda| < 1,$$

und die Potenzreihe in $x_1 + i x_2$

$$u(x_1, x_2) + i v(x_1, x_2) = \sum c_\nu (x_1 + i x_2)^\nu$$

konvergiert, weil die Potenzreihen links absolut konvergieren; $u(x_1, x_2)$ ist demnach im Kreise $|x_1 + i x_2| < |x_1^0| + |x_2^0|$ regulär.

Department of Physics, Columbia University.

(Eingegangen am 17. Februar 1930.)

Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari.

Di

Gabriele Mammana a Cagliari.

Introduzione.

In una memoria pubblicata nelle Mathematische Zeitschrift [1]) diedi un breve saggio di un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari che mi promisi, fin d'allora, di sviluppare, ove fosse possibile, e farne sistema di ricerca.

In quella memoria, grazie all'applicazione di detto metodo, che ha una certa analogia con quello che generalmente si segue nel fare la teoria delle equazioni algebriche, raggiungo, ad esempio, in modo assai semplice e con mezzi elementari, i teoremi di oscillazione e sugli autovalori, per le equazioni del secondo ordine, in ipotesi quanto mai larghe.

L'efficacia del metodo si rivelava subito oltre che per la sua semplicità, anche pel fatto che per mezzo di esso si riusciva, in una argomento tanto sfruttato, a dire alcunchè di nuovo.

Ecco un brevissimo cenno sui punti essenziali di quella ricerca. Rappresenti:

$$\text{I} \qquad l[u] \equiv u'' + p\,u' + q\,u = 0$$

la più generale equazione del secondo ordine a coefficienti variabili con continuità.

È possibile, e in infiniti modi, determinare due funzioni α, β, continue in tutto l'intervallo (a, b) dell'asse x di definizione di p e q, eventualmente

[1]) Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari, Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 734–748. Pel preciso significato dei simboli e delle locuzioni qui adoperate si rimanda alla memoria citata.

complesse, tali da aversi identicamente:

II $$l[u] = \left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} + \beta\right)u,$$

da cui segue la possibilità di soddisfare sempre, *con funzioni continue in tutto* (a, b), eventualmente complesse, al sistema non lineare seguente:

III $$\alpha + \beta = p; \quad \beta' + \alpha\beta = q.$$

In conseguenza della assicurata decomponibilità di $l[u]$, secondo la II, possiamo dare all'integrale della I, la notevole forma seguente:

IV $$u = k\, e^{\eta} \operatorname{sen}(\xi - c)$$

dove k e c sono costanti arbitrarie, η e ξ funzioni continue di x, e ξ *monotona*.

I teoremi di Sturm, di oscillazione e sugli autovalori, relativi alla I son conseguenze immediate della forma speciale IV, data all'integrale u della I.

La possibilità di decomporre $l[u]$ nel prodotto di due fattori (simbolici) del primo ordine, o ciò che fa lo stesso, l'esistenza di due funzioni α, β continue in tutto (a, b), soddisfacenti alle III, è assicurata nel campo delle funzioni complesse: affinchè una tale possibilità abbia luogo nel campo delle funzioni reali, occorre e basta la esistenza, per la I, di un integrale mai nullo in (a, b), o come vogliamo anche dire: che la I non abbia carattere oscillatorio[2]).

Nella presente memoria, il problema della decomposizione delle espressioni differenziali, lineari, omogenee, di ordine qualsiansi:

(1) $$L[u] \equiv u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} u' + p_n u$$

in fattori (simbolici) di ordine inferiore a n, è, nella sua generalità, affrontato, e vengono precisati i concetti generali per la trattazione di una teoria relativa.

Comincio con lo stabilire la condizione necessaria e sufficiente perchè una espressione come la (1), si spezzi nel prodotto (simbolico) di due fattori, di ordine m l'uno, seguito da un altro di ordine $n - m$: in un prodotto cioè del seguente tipo:

$$\left(\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} + g_1 \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} + \ldots + g_{n-m-1}\frac{d}{dx} + g_{n-m}\right)\left(\frac{d^m}{dx^m} + q_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + q_{m-1}\frac{d}{dx} + q_m\right)u.$$

Dimostro che la cosa è sempre possibile[3]), e assegno una regola pratica che permette, fissato uno dei fattori, di determinare razionalmente l'altro.

---

[2]) Ogni integrale della I si annulla in (a, b) una volta al più.

[3]) È possibile, cioè, soddisfare sempre a un certo *sistema non lineare* di equazioni differenziali con funzioni continue, *in tutto l'intervallo* (a, b) *dove son definiti i coefficienti* p_i, eventualmente complesse.

Deduco quindi la identità[4]):

$$\text{V} \qquad L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} - D\frac{W_n}{W_{n-1}}\right)\left(\frac{d}{dx} - D\frac{W_{n-1}}{W_{n-2}}\right)\cdots\left(\frac{d}{dx} - D\frac{W_2}{W_1}\right)\left(\frac{d}{dx} - D\frac{W_1}{W_0}\right);$$

dove D è simbolo di derivazione rispetto a x, e dove, detto: $u_1, u_2, \ldots, u_n$, un sistema fondamentale di integrali per la $L[u] = 0$, si è posto:

$$W_0 \equiv 1, \quad \text{e} \quad W_i = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_i \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_i' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(i-1)} & u_2^{(i-1)} & \ldots & u_i^{(i-1)} \end{vmatrix}.$$

Questa identità vale dappertutto nell'intervallo (a, b) dei coefficienti p_i, salvo in un numero finito di punti: dimostro poi come sia possibile, in ogni caso, costruire un particolare sistema fondamentale per la $L[u] = 0$ (formato da integrali tutti reali ad eccezione di uno che sarà complesso) per il quale la V riesca valida in tutto (a, b).

Come conseguenza dell'identità V abbiamo:

Le espressioni differenziali lineari di ordine n sono sempre decomponibili nel prodotto simbolico di n fattori simbolici del primo ordine: possiamo, in altri termini, supporre sempre $L[u]$ posto sotto la forma seguente:

$$\text{VI} \qquad L[u] = \left(\frac{d}{dx} + \eta_1\right)\left(\frac{d}{dx} + \eta_2\right)\cdots\left(\frac{d}{dx} + \eta_n\right)u$$

le η_i essendo funzioni della x, continue in tutto (a, b), eventualmente complesse.

Fra gli integrali dell'equazione $L[u] = 0$ ve ne sono infiniti che sono anche soluzioni di equazioni del secondo ordine, e quindi a tipo oscillatorio.

Gli integrali stessi della $L[u] = 0$, si esprimono come prodotti di esponenziali per seni e coseni di funzioni continue: come accade per le equazioni a coefficienti costanti.

Sviluppando la VI e uguagliando i coefficienti delle varie derivate di u, ai corrispondenti coefficienti p_i, si ottengono n relazioni fra le η_i e i coefficienti p_i stessi, relazioni che ricordano quelle fra le radici e i coefficienti di una equazione algebrica di grado n, e che a queste si riducono nella ipotesi che siano costanti le p_i.

In generale i fattori menzionati non sono fra loro commutabili; condizione necessaria e sufficiente per la loro commutabilità, è che: la trasformata della $L[u] = 0$, mediante la sostituzione $u = z\, e^{\frac{-1}{n}\int p_1 dx}$ si riduca a coefficienti costanti.

---

[4]) Relativamente all'algebra delle forme differenzili lineari (nel campo delle funzioni analitiche) cfr. l'Opera di S. Pincherle «Le Operazioni distributive etc.», Bologna: Zanichelli 1901.

Detto così in generale della decomposizione delle espressioni $L[u]$, ccio un' indagine per stabilire se non sia, per caso, sempre possibile eguire la stessa decomposizione in prodotto (simbolico) *di fattori tutti eali*. La questione è importante. L' esistenza di un fattore reale porta, vero, come conseguenza, alla esistenza di integrali per la $L[u] = 0$ ostituenti sistema fondamentale, di una equazione di ordine inferiore al ato. Così ad esempio: dall' esistenza di un fattore reale del primo ordine, gue l' esistenza di un integrale mai nullo in tutto (a, b), etc.

Preciso la condizione necessaria e sufficiente cui deve soddisfare $L[u]$, erchè i fattori nel quale esso si può decomporre riescano tutti reali, e ne educo le conseguenze circa la forma degli integrali della relativa equaione $L[u] = 0$.

Infine faccio brevi applicazioni della teoria svolta, alle equazioni del rzo e quarto ordine autoaggiunte, pervenendo in modo semplice a risulti nuovi ed eleganti.

L' applicazione del metodo esposto, a casi particolari porterà, senza ubbio, a conseguenze notevoli. Esso a mio avviso è ancora suscettibile i maggiore sviluppo e di più vaste applicazioni allo studio, per esempio, ell' equazioni alle derivate parziali.

Una questione non ancora completamente assodata è la segunte: una spressione come la $L[u]$ potrà, sempre, essere decomposta in fattori di rdine eventualmente superiore al primo *ma reali*? È da presumersi, per gioni che si possono dedurre dalla lettura della presente memoria, essere ossibile decomporre sempre $L[u]$ in fattori *reali* del primo e del secondo rdine.

Qui la cosa è verificata per le equazioni del terzo ordine autoaggiunte, er quelle del quarto autoaggiunte delle sbarre incastrate e par una assai stesa classe di equazioni del terzo non autoaggiunte, e naturalmente per tte le equazioni a coefficienti costanti.

La verifica generale è subordinata alla dimostrazione dell' esistenza, er una equazione di ordine dispari, di un integrale mai nullo in tutto intervallo in cui questa è definita.

Cagliari, 5 gennaio 1930.

I.

'equazione complementare associata ad una equazione di ordine n.

N.° 1. Sull' aggiunto del Wronskiano.

Della equazione:

$$L[u] \equiv u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} u' + p_n u = 0 ,$$

che prenderemo a considerare, supporremo i coefficienti p_i funzioni di x simultaneamente definite nell'intervallo (a, b), ivi continue e, ove occorra, a derivate continue.

Posto che $u_1, u_2, \ldots, u_n$ rappresentino un sistema fondamentale di integrali della (1), poniamo:

$$W \equiv \begin{vmatrix} u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \\ u_1^{(n-2)} & & \ldots & u_n^{(n-2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{vmatrix}$$

e designamo con $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ gli aggiunti degli elementi della prima riga di W stesso. Sussiste il

Teorema. *Il Wronskiano*

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \ldots & \Delta_n \\ \Delta_1' & & \ldots & \Delta_n' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ \Delta_1^{(n-1)} & & \ldots & \Delta_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

è uguale (a meno del segno) al determinante aggiunto di W, esso wronskiano, pertanto, non è mai nullo in (a, b).

Abbiamo, invero, fra gli aggiunti Δ_{ji} degli elementi $u_j^{(n-i)}$ di W, l'identità:

$$\Delta_{ji}' = -p_1 \Delta_{ji} + p_i \Delta_{j1} - \Delta_{j(i+1)}, \quad (2)$$

[5]

valida per

$$j = 1, 2, \ldots, n; \text{ e per } i = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Abbiamo poi:

$$\Delta_{j1}' = -\Delta_{j2}; \quad \text{e:} \quad \Delta_{jn}' = -p_1 \Delta_{jn} + p_n \Delta_{j1}. \quad (3)$$

Deduciamo, quindi, successivamente:

$$\Delta_{j2} = -\Delta_{j1}' \equiv -\Delta_j',$$

$$\Delta_j'' = -\Delta_{j2}' = p_1 \Delta_{j2} - p_2 \Delta_{j1} + \Delta_{j3} = -p_1 \Delta_j' - p_2 \Delta_j + \Delta_{j3}$$

e però

$$\Delta_{j3} = \Delta_j'' + p_1 \Delta_j' + p_2 \Delta_j;$$

e

$$\Delta_{j3}' = -p_1 \Delta_{j3} + p_3 \Delta_{j1} - \Delta_{j4} = \Delta_j''' + p_1 \Delta_j'' + (p_1' + p_2) \Delta_j' + p_2' \Delta_j$$

da cui

$$\Delta_{j4} = -\Delta_j''' - 2p_1 \Delta_j'' - (p_1' + p_1^2 + p_2) \Delta_j' - (p_2' + p_1 p_2 - p_3) \Delta_j.$$

---

[5]) La verifica, quando si tenga conto della (1), cui le u_i soddisfano, è assai facile.

n generale avremo:

$$4) \quad \Delta_{ji} = (-1)^{i-1} \Delta_j^{(i-1)} + \sum_{r=2}^{i} h_r \Delta^{(i-r)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

e h_r essendo funzioni intere delle p_i e delle derivate delle p_i stesse.

La dimostrazione del teorema sopra enunciato è conseguenza della (4). Gli aggiunti Δ_j costituiscono, conseguentemente, sistema fondamentale per una equazione lineare omogenea di ordine n e di *tipo normale*[6]), che diremo *complementare associata alla* (1).

N.° 2. Equazione associata.

Poniamo:

$$W^{-1} \Delta_j = \varrho .$$

Segue, quando si tengan presenti le (2), (3), e l' identità: $(W^{-1})' = p_1 W^{-1}$,

$$\varrho' = p_1 W^{-1} \Delta_j + W^{-1} \Delta_j' = p_1 \varrho - W^{-1} \Delta_{j2}$$

da cui

$$\varrho' - p_1 \varrho = - W^{-1} \Delta_{j2} ,$$

derivando

$$\varrho'' - (p_1 \varrho)' = - p_1 W^{-1} \Delta_{j2} - W^{-1} \Delta_{j2}' ,$$

per la (2)

$$= - p_2 W^{-1} \Delta_j + W^{-1} \Delta_{j3}$$

e anche:

$$\varrho'' - (p_1 \varrho)' + p_2 \varrho = W^{-1} \Delta_{j3} .$$

Derivando ancora avremo analogamente:

$$\varrho''' - (p_1 \varrho)'' + (p_2 \varrho)' - p_3 \varrho = - W^{-1} \Delta_{j4} .$$

E dopo $n-1$ successive derivazioni:

$$\varrho^{(n-1)} - (p_1 \varrho)^{(n-2)} + (p_2 \varrho)^{(n-3)} - \ldots + (-1)^{(n-1)} p_{n-1} \varrho = (-1)^{(n-1)} W^{-1} \Delta_{jn}$$

infine;

$$\varrho^{(n)} - (p_1 \varrho)^{(n-1)} + (p_2 \varrho)^{(n-2)} - \ldots + (-1)^{(n-1)} (p_{n-1} \varrho)' = (-1)^{(n-1)} p_n W^{-1} \Delta_j$$

cioè:

$$5) \qquad \varrho^{(n)} - (p_1 \varrho)^{(n-1)} + (p_2 \varrho)^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n p_n \varrho = 0 .$$

I minori Δ_j sono integrali indipendenti della equazione (associata) seguente:

$$6) \qquad H(z) \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (p_i W^{-1} z)^{(n-i)} = 0 , \qquad p_0 \equiv 1$$

La (5) è l' aggiunta[7]) della equazione (1).

---

[6]) Per la quale cioè il coefficiente della massima derivata non è mai zero.

[7]) Secondo Lagrange.

N.° 3. Relazione di reciprocità tra una equazione e la sua associata.

Il teorema enunciato al N.° 1 si esprime, dunque, mediante l'identità:

$$\Delta = \pm \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \dots \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \dots \Delta_{n2} \\ \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} \dots \Delta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Indichiamo con δ_{ij}, gli aggiunti degli elementi del wronskiano Δ, e con α_{ij} gli aggiunti degli elementi del determinante aggiunto $|\Delta_{ij}|$.

Si verifica immediatamente che:

$$\delta_{jn} = \pm \alpha_{jn} \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

d'altra parte si ha[8]):

$$\alpha_{in} \equiv W u_j^{(n-n)} \equiv W u_j$$

ne consegue:

$$\delta_{jn} = \pm W u_j.$$

Possiamo quindi concludere:

L'associata dell'associata alla (1), ammette come integrali indipendenti quelli della (1) stessa, moltiplicati per il loro wronskiano. In paticolare, se tale wronskiano è costante, (e però $p_1 \equiv 0$), abbiamo che, l'associata dell'associata alla (1), coincide con la stessa (1)[9]).

Da questa relazione, diciamo di reciprocità, fra la (1) e la sua associata (6), deduciamo questa prima conseguenza (importante per il seguito): se una di esse ammette un integrale mai nullo in tutto (a, b), esistono per la associata, $(n-1)$ soluzioni a wronskiano mai nullo in tutto lo stesso intervallo: e però, se la (1) è autoaggiunta e quindi coincidente con la sua associata, possiamo concludere:

Se un integrale della (1) non è mai zero in (a, b), esistono $n-1$ integrali, della stessa (1), a wronskiano non nullo in tutto (a, b) stesso, e inversamente.

II.

Lemmi fondamentali su cui si basa la teoria della decomposizione delle espressioni differenziali lineari.

N.° 1. Lemma I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il primo membro della* (1), *sia decomponibile nel prodotto simbolico di due fattori simbolici di tipo normale, di ordine* $m < n$ *l'uno, di ordine*

[8]) V. Algebra, teoria dei determinanti aggiunti.

[9]) Cio che è conseguenza immediata del fatto che, nella nostra ipotesi, l'associata della (1) è l'equazione aggiunta di Lagrange.

— m l'altro, è che esistano m integrali indipendenti della (1) *stessa, wronskiano mai nullo in* (a, b); *ciò che è quanto dire, esistano m integrali della* (1) *costituenti sistema fondamentale per una equazione di ordine m e di tipo normale.*

Siano $u_1, u_2, \ldots, u_m$; m soluzioni della (1) a wronskiano W_m sempre diverso da zero in (a, b): esse soluzioni costituiscono sistema fondamentale, come è ben chiaro, per la seguente equazione di tipo normale in u:

$$l[u] \equiv \frac{1}{W_m}\begin{vmatrix} u^{(m)} & u^{(m-1)} & \ldots & u' & u \\ u_1^{(m)} & u_1^{(m-1)} & \ldots & u_1' & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_m^{(m)} & u_m^{(m-1)} & \ldots & u_m' & u_m \end{vmatrix} \equiv u^{(m)} + q_1 u^{(m-1)} + \ldots + q_{m-1} u + q_m u = 0.$$

Porremo simbolicamente:

$$u^{(m)} + q_1 u^{(m-1)} + \ldots + q_{m-1} u' + q_m u \equiv \left(\frac{d^m}{dx^m} + q_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + q_{m-1}\frac{d}{dx} + q_m\right) u.$$

Si può affermare essere sempre possibile la determinazione di $m - n$ funzioni continue: $g_1, g_2, \ldots, g_{m-n}$; (in modo unico) tali, da aversi identicamente:

$$(7) \quad L[u] = \left(\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} + g_1 \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} + \ldots + g_{n-m-1}\frac{d}{dx} + g_{n-m}\right) \times \left(\frac{d^m}{dx^m} + q_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + q_{m-1}\frac{d}{dx} + q_m\right) u \equiv o_1^{(n-m)} \cdot o_2^{(m)} \cdot u$$

le g_i risultando, inoltre, razionali e intere nelle p_i, q_i, e nelle derivate delle q_i.

Cominciamo, intanto, con l'osservare che l'uguaglianza (7) è verificata comunque si scelgano le g_i) da:

$$u \equiv u_1, u_2, \ldots, u_m;$$

cioè, si ha identicamente:

$$L[u_i] \equiv o_1^{(n-m)} \cdot o_2^{m} \cdot u_i \qquad (\text{per } i = 1, 2, \ldots, m).$$

Pel secondo membro della (7), d'altra parte, sviluppando otteniamo:

$$o_1^{(n-m)} \cdot o_2^{(m)} \cdot u \equiv \sum_{j=0}^{n-m} g_j \frac{d^{n-m-j}}{dx^{n-m-j}} \sum_{i=0}^{m} q_i u^{(m-i)} = \sum_{j=0}^{n-m} g_j \sum_{i=0}^{m} \frac{d^{n-m-j}}{dx^{n-m-j}} q_i u^{(m-i)}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-m} g_i \sum_{i=0}^{m} \sum_{r=0}^{n-m-j} \binom{n-m-j}{r} q_i^{(r)} u^{(n-i-j-r)}$$

ove, si noti, $g_0 = q_0 = 1$, e però, $q_0^{(r)} = 0$ per $r > 0$.

E ordinando rispetto alle potenze simboliche discendenti di u:

$$(8) \qquad o_1^{(n-m)} \cdot o_2^{(m)} \cdot u$$

$$\equiv q_0 g_0 u^{(n)} + (q_0 g_1 + q_1 g_0) u^{(n-1)} + \left\{ q_0 g_2 + q_1 g_1 + q_2 g_0 + \binom{n-m}{1} q_1' g_0 \right\} u^{(n-2)}$$

$$+ \left\{ q_0 g_3 + q_1 g_2 + q_2 g_1 + \binom{n-m-1}{1} q_1' g_1 + q_3 g_0 + \binom{n-m}{1} q_2' g_0 + \binom{n-m}{2} q_1'' g_0 \right\} u^{(n-3)}$$

$$+ \left\{ q_0 g_{n-m} + q_1 g_{n-m-1} + q_2 g_{n-m-2} + \dots + q_{n-m} g_0 + \binom{2}{1} q_1' g_{n-m-2} + \binom{3}{1} q_2' g_{n-m-3} \right.$$

$$+ \binom{n-m}{1} q_{n-m-1}' g_0 + \binom{3}{2} q_1'' g_{n-m-3} + \dots + \binom{n-m}{2} q_{n-m-2}'' g_0 + \dots$$

$$\left. + \binom{n-m-1}{n-m-2} q_1^{(n-m-2)} g_1 + \binom{n-m}{n-m-2} q_2^{(n-m-2)} g_0 + \binom{n-m}{n-m-1} q_1^{(n-m-1)} g_0 \right\} u^{(m)}$$

$$+ \bar{\varrho}_{n-m-1} u^{(m-1)} + \bar{\varrho}_{n-m+2} u^{(m-2)} + \dots + \bar{\varrho}_{n-1} u' + \bar{\varrho}_n u.$$

Con i simboli $\bar{\varrho}_s$, abbiamo designato, per semplicità, i coefficienti delle derivate di u di ordine inferiore a m. Nel precedente sviluppo, poi, si noti, che i termini che, nei vari coefficienti delle $u^{(r)}$, contengono la q, con indice superiore a m, sono da considerarsi nulli.

La espressione (8), quando per le g_j si prendano funzioni generiche, è generalmente diversa dal primo membro della (1). Scegliamo le g_j in maniera che i primi $n-m+1$ coefficienti delle $u^{(r)}$, nella (8), riescano identici ai corrispondenti primi $n-m+1$ coefficienti di $L[u]$. Ciò è possibile, come è chiaro, e in modo unico, (ricordiamo che $g_0 = 1$ e anche $q_0 = 1$). Sostituiamo quindi le espressioni delle g_j, così determinate, nei rimanenti coefficienti $\bar{\varrho}_s$ della (8), e indichiamo con ϱ_s le funzioni dedotte, mediante la detta sostituzione, dalle $\bar{\varrho}_s$.

La (8), con la scelta così fatta delle funzioni g_j, assume la forma:

$$\Delta[u] \equiv u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + p_2 u^{(n-2)} + \dots + p_{n-m} u^{(m)} + \varrho_{n-m+1} u^{(m-1)}$$
$$+ \varrho_{n-m-2} u^{(m-2)} + \dots + \varrho_{n-1} u' + \varrho_n u.$$

La espressione $\Delta[u]$, si annulla identicamente per $u = u_1; u_2; \dots; u_m$. Seguono, pertanto, le identità:

$$\Delta[u_i] = L[u_i] \qquad (\text{per } i = 1, 2, \dots, m)$$

e quindi le altre:

$$(\varrho_{n-m+1} - p_{n-m+1}) u_i^{(m-1)} + (\varrho_{n-m+2} - p_{n-m+2}) u_i^{(m-2)} + \dots$$
$$+ (\varrho_{n-1} - p_{n-1}) u_i' + (\varrho_n - p_n) u_i = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2, \dots, m)$$

Da cui, il determinante delle $u_i^{m-1}; u_i^{m-2}; \dots; u_i'; u_i$, (wronskiano

delle u_i) essendo sempre diverso da zero, ricaviamo:

$$\varrho_s \equiv p_s \quad (\text{per } s = n-m+1, n-m+2, \ldots, n-1, n),$$

ciò che prova il nostro asserto[10]).

Il lemma vale, come è chiaro, anche quando si suppongano le p_i complesse e le u_i pure complesse, ferma restando ogni altra ipotesi.

Si ritrova come conseguenza, sotto forma precisa, il:

Teorema. L'integrazione di una equazione di ordine n di tipo normale, quando di essa si conoscono m integrali indipendent *a wronskiano mai nullo in tutto* (a, b), si riconduce all'integrazione di una equazione di ordine $n-m$ pure di tipo normale e a delle quadrature[11]).

N.° 2. Una notevole identità.

Definizione. Assegnate le n funzioni $u_1; u_2; \ldots; u_n$; continue e a derivate continue fino a quelle di ordine $n-1$ incluse; definiremo *catena completa di wronskiani relativa alle* u_i, la successione di determinanti seguente:

$$W_0 = 1; \qquad W_i \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_{i-1} & u_i \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_{i-1}' & u_i' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(i-1)} & u_2^{(i-1)} & \ldots & & u_i^{(i-1)} \end{vmatrix} \quad (\text{per } i = 1, 2, \ldots, n).$$

Supponiamo che le u_i costituiscano un tale sistema fondamentale di integrali della (1), che la relativa catena completa di wronskiani sia formata da termini che non sono mai nulli nell'intervallo (α, β) contenuto in (a, b). Un tale sistema di integrali, per semplicità, lo diremo a catena completa di wronskiani mai nulla in (α, β).

In questa ipotesi vale in tutto l'intervallo (α, β), l'identità seguente:

(9)
$$L[u] = \prod_{i=n}^{i=1} \left(\frac{d}{dx} - D\lg \frac{W_i}{W_{i-1}}\right) u$$

$$\equiv \left(\frac{d}{dx} - D\lg \frac{W_n}{W_{n-1}}\right)\left(\frac{d}{dx} - D\lg \frac{W_{n-1}}{W_{n-2}}\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - D\lg \frac{W_2}{W_1}\right)\left(\frac{d}{dx} - D\lg \frac{W_1}{W_0}\right) u.$$

---

[10]) Per quest'ultima conclusione, l'ipotesi che il wronskiano delle u_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sia *sempre* non nullo è sovrabbondante, tale ipotesi però è necessaria per poter asserire che le funzioni u_i sono soluzioni indipendenti di una equazione lineare di ordine *m e di tipo normale.*

[11]) Nell'enunciare questo teorema generalmente (V. Jordan, Cours d'Analise) vien taciuta la condizione necessaria, che il wronskiano degli m integrali noti, sia *sempre* diverso da zero.

Notiamo, intanto, subito che il secondo membro di questa identità è, come il primo, una espressione differenziale di ordine n lineare omogenea e *di tipo normale* (col coefficiente della più alta derivata uguale a uno).

Il nostro asserto, quindi, sarà dimostrato quando avremo provato che l'equazione:

$$(9_1) \qquad \prod_{i=n}^{i=1}\left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_i}{W_{i-1}}\right)u = 0$$

è identicamente soddisfatta per $u = u_1; u_2; \ldots; u_n$. È ovvio che, posto:

$$u = \lambda_1[u] \quad \text{e, in generale:} \quad \prod_{i=m-1}^{i=1}\left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_i}{W_{i-1}}\right)u = \lambda_m[u] \quad \text{per } m \leqq n;$$

ogni soluzione dell'equazione $\lambda_m[u] = 0$ è soluzione della (9_1).

Ora si ha:

$$\lambda_2[u] = \left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_1}{W_0}\right)\lambda_1[u] \equiv u' - \frac{u_1'}{u_1}u = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u \\ u_1' & u' \end{vmatrix}}{u_1};$$

segue:

$$\lambda_2[u_1] \equiv 0; \qquad \lambda_2[u_2] = \frac{W_2}{W_1} \quad \text{e però} \quad \frac{\lambda'[u_2]}{\lambda[u_2]} = D\lg\frac{W_2}{W_1},$$

$$\lambda_3[u] = \left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_2}{W_1}\right)\lambda_2[u] = \lambda_2'[u] - D\lg\frac{W_2}{W_1}\cdot\lambda_2[u]$$

da cui, per $u = u_2$ (tenuto conto della precedente relazione), segue:

$$\lambda_3[u_2] \equiv 0 \quad \text{ed evidentemente, anche:} \quad \lambda_3[u_1] \equiv 0.$$

Abbiamo inoltre:

$$\lambda_3[u_3] \equiv \lambda_2'[u_3] - D\lg\frac{W_2}{W_1}\lambda_2[u_3] = \lambda_2'[u_3] - \frac{\lambda_2'[u_2]}{\lambda_2[u_2]}\lambda_2[u_3],$$

$$\lambda_3[u_3] = \frac{\lambda_2'[u_3]\lambda_2[u_2] - \lambda_2[u_3]\lambda_2'[u_2]}{\lambda_2[u_2]} = \frac{\left\{\frac{1}{u_1}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1' & u_3' \end{vmatrix}\right\}'\left\{\frac{1}{u_1}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}\right\} - \left\{\frac{1}{u_1}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1' & u_3' \end{vmatrix}\right\}\left\{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}\frac{1}{u_1}\right\}'}{\lambda_2[u_2]},$$

$$\lambda_3[u_3] = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1'' & u_3'' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1' & u_3' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1'' & u_2'' \end{vmatrix}}{u_1^3\,\lambda_2[u_2]}.$$

Il numeratore del secondo membro di quest'ultima identità, è il determinante formato con gli orlati del minore (del primo ordine, mai zero) u_1 del determinante:

$$W_3 \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix}.$$

Per un noto teorema algebrico esso numeratore è, pertanto, uguale a $u_1 \cdot W_3$.

Per conseguenza:

$$\lambda_3[u_3] = \frac{W_3}{W_2} \quad \text{e quindi} \quad \frac{\lambda_3[u_3]}{\lambda_3[u_3]} = D \lg \frac{W_3}{W_2}.$$

Orbene, in generale, dal supporre

$$\lambda_m[u] = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_{m-1} & u \\ u_1' & & \dots & & u' \\ u_1^{(m-1)} & & \dots & & u^{(m-1)} \end{vmatrix}}{W_{m-1}}; \qquad \text{segue:} \quad \lambda_{m+1}[u_{m+1}] = \frac{W_{m+1}}{W_m}.$$

E invero:

$$\lambda_{m+1}[u_{m+1}] = \left(\frac{d}{dx} - D \lg \frac{W_m}{W_{m-1}}\right) \lambda_m[u_{m+1}] = \frac{\lambda_m'[u_{m+1}]\,\lambda_m[u_m] - \lambda_m[u_{m+1}]\,\lambda_m'[u_m]}{\lambda_m[u_m]}$$

$$= \lambda_{m+1}[u_{m+1}] = \frac{\left\{\frac{1}{W_{m-1}} \begin{vmatrix} u_1 & \dots u_{m-1} u_{m+1} \\ \dots & \dots \\ u_1^{(m-1)} & \dots u_{m+1}^{(m-1)} \end{vmatrix}\right\}' \frac{1}{W_{m-1}} \begin{vmatrix} u_1 u_2 \dots u_m \\ \dots \\ u_1^{m-1} \dots u_m^{(m-1)} \end{vmatrix}}{\lambda_m[u_m]}$$

$$- \frac{\frac{1}{W_{m-1}} \begin{vmatrix} u_1 & \dots u_{m-1} u_{m+1} \\ \dots & \dots \\ u_1^{(m-1)} \dots & u_{m+1}^{(m-1)} \end{vmatrix} \left\{\frac{1}{W_{m-1}} \begin{vmatrix} u_1 & \dots u_m \\ \dots & \dots \\ u_1^{(m-1)} \dots & u_m^{(m-1)} \end{vmatrix}\right\}'}{\lambda_m[u_m]},$$

$$u_{m+1}] = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & \dots u_{m-1} u_{m+1} \\ \dots & \dots \\ u_1^{(m-2)} \dots & u_{m+1}^{(m-2)} \\ u_1^{(m)} & \dots u_{m+1}^{m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & \dots u_m \\ \dots & \dots \\ u_1^{m-1} \dots & u_m^{(m-1)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & \dots u_{m-1} u_{m+1} \\ \dots & \dots \\ u_1^{(m-1)} \dots & u_{m+1}^{(m-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & \dots u_m \\ \dots & \dots \\ u_1^{(m-2)} & \dots u_m^{(m-2)} \\ u_1^{(m)} & \dots u_m^{(m)} \end{vmatrix}}{W_{m-1}^2\, \lambda_m[u_m]},$$

e a causa del citato teorema algebrico:

$$\lambda_{m+1}[u_{m+1}] = \frac{W_{m-1} W_{m+1}}{W_{m-1}^2 \lambda_m[u_m]} = \frac{W_{m+1}}{W_m}. \tag{10}$$

Conseguentemente deduciamo, che se $u_1; u_2; \dots; u_m;$ sono soluzioni (indipendenti) dell'equazione di ordine m; $\lambda_{m+1}[u] = 0$; gli $m+1$ integrali della (1): $u_1; u_2; \dots; u_{m+1};$ costituiscono sistema integrale per l'altra di ordine $m+1$: $\lambda_{m+2}[u] = 0$.

E infatti:

$$\lambda_{m+2}[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} - D \lg \frac{W_{m-1}}{W_m}\right) \lambda_{m+1}[u],$$

e per la (10), quindi:

$$\lambda_{m+2}[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} - \frac{\lambda_{m+1}'[u_{m+1}]}{\lambda_{m+1}[u_{m+1}]}\right) \lambda_{m+1}[u]$$

e però

$$\lambda_{m+2}[u_{m+1}] \equiv 0.$$

L'equazione

$$\prod_{i=n}^{i=1} \left(\frac{d}{dx} - D \lg \frac{W_i}{W_{i-1}}\right) u \equiv \lambda_{n+1}[u] = 0$$

ammette, dunque, come sistema integrale: $u_1; u_2; \ldots; u_n$; ciò che dimostra quanto volevamo.

Possiamo enunciare il seguente:

Lemma II. *Condizione sufficiente perchè il primo membro della* (1) *sia (nel tratto* (α, β), *contenuto in* (a, b)*) decomponibile nel prodotto (simbolico) di n fattori simbolici del primo ordine di tipo normale, si è che esista per la* (1) *un sistema integrale fondamentale, la cui relativa catena completa di wronskiani non sia mai nulla in quel tratto.*

Questa condizione è anche necessaria.

Inversione del Lemma II. Nel tratto (α, β), sussista infatti l'identità:

$$(9)' \qquad L[u] \equiv \prod_{i=n}^{i=1} \left(\frac{d}{dx} - \eta_i\right) u,$$

le η_i essendo funzioni continue nel tratto (α, β), e derivabili tanto quanto occorra perchè il secondo membro abbia significato.

Sia u_1, un integrale, mai nullo e sempre positivo, dell'equazione $\left(\frac{d}{dx} - \eta_1\right) u \equiv \lambda_2[u] = 0$; u_1 e u_2, un sistema integrale fondamentale dell'equazione $\left(\frac{d}{dx} - \eta_2\right)\left(\frac{d}{dx} - \eta_1\right) u \equiv \lambda_3[u] = 0$, sistema che potremo pensare a wronskiano W_2 sempre positivo in (α, β); u_1, u_2 e u_3 un sistema fondamentale per l'equazione $\prod_{i=3}^{i=1} \left(\frac{d}{dx} - \eta_i\right) u \equiv \lambda_4[u] = 0$, e così via, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, un sistema fondamentale per l'equazione

$$\prod_{i=n}^{i=1} \left(\frac{d}{dx} - \eta_i\right) u = \lambda_{n+1}[u] = 0.$$

La catena completa di wronskiani:

$$W_0 = 1; \qquad W_i \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(i-1)} & u_2^{(i-1)} & \ldots & u_i^{(i-1)} \end{vmatrix}$$

in (α, β), è sempre diversa da zero. Si ha poi successivamente:

$$\lambda_2[u_1] \equiv u_1' - \eta_1 u_1 \equiv 0, \qquad \text{da cui:} \qquad \eta_1 = D \lg u_1 \equiv D \lg \frac{W_1}{W_0},$$

$$\lambda_2[u_2] = u_2' - \eta_1 u_2 = u_2' - \frac{u_1'}{u_1} u_2 = \frac{W_2}{W_1}.$$

Dalla identità:

$$\lambda_3[u_2] \equiv \left(\frac{d}{dx} - \eta_2\right) \lambda_2[u_2] \equiv 0,$$

ricaviamo:

$$\eta_2 = D \lg \frac{W_2}{W_1};$$

mentre:

$$\lambda_3[u_3] = \frac{W_3}{W_2}.$$

In generale ammesso che sia:

$$\lambda_m[u] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_{m-1} & u \\ u_1' & u_2' & \dots & u_{m-1}' & u' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(m-1)} & & \dots & u_{m-1}^{(m-1)} & u^{(m-1)} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{W_{m-1}},$$

e quindi

$$\lambda_m[u_m] \equiv \frac{W_m}{W_{m-1}},$$

si deduce dal l'identità:

$$\lambda_{m+1}[u_m] \equiv \left(\frac{d}{dx} - \eta_m\right) \lambda_m[u_m] \equiv 0,$$

$$\eta_m = \frac{\lambda_m'[u_m]}{\lambda_m[u_m]} \quad \text{e cioè} \quad \eta_m = D \lg \frac{W_m}{W_{m-1}}.$$

Notiamo che le conclusioni di questo secondo lemma come quelle del precedente permangono inalterate, anche quando si suppongano le p_i e gli integrali u_i complessi.

N.° 3. Sull'esistenza di un integrale complesso mai nullo per una equazione lineare.

Lemma III. *Se n funzioni reali $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, simultaneamente definite in (a, b) non sono ivi mai contemporaneamente nulle e una di esse, ad esempio φ_1, ha, in (a, b), un numero finito (o anche infinito ma numerabile) di zeri, è sempre possibile, e in infiniti modi, costruire combinazioni lineari a coefficienti costanti reali delle $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$, che non sono mai nulle insieme a φ_1.*

Siano, invero, $c_1, c_2, \dots, c_m \dots$, gli zeri di $\varphi_1(x)$, in (a, b), e prendiamo a considerare il sistemi di equazioni lineari seguenti:

(11) $\quad y_2 \varphi_2(c_i) + y_3 \varphi_3(c_i) + \dots + y_n \varphi_n(c_i) = 0 \quad (\text{per } i = 1, 2, \dots, m, \dots).$

Le equazioni (11), possiamo concepirle come costituenti un sistema di perpiani delle S_{n-2}, sistema, che (nelle fatte ipotesi) non invade tutto lo spazio, esisteranno, quindi, quanti si vogliano punti esterni a ciascunodi essi. Se: $y_2^{(0)}, y_3^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$, sono le coordinate di uno di tali punti, avremo:

$$\varphi(c_i) \equiv \sum_{j=2}^{n} y_j^{(0)} \varphi_j(c_i) \neq 0 \quad (\text{per } i = 1, 2, \dots, m, \dots).$$

La funzione complessa $\varphi(x) + i\,\varphi_1(x)$, per conseguenza, non è mai zero in (a, b).

Ne segue il

Teorema I. *Per la più generale equazione lineare omogenea di tipo normale, di ordine n, esistono quante si vogliano coppie di integrali che non son mai contemporaneamente nulli.*

Ogni integrale, non nullo identicamente, di una equazione come la (1), infatti, si annulla in (a, b) un numero finito di volte: chè, in caso contrario, ove, cioè, un integrale ω della (1), avesse in (a, b) infiniti zeri, dovremmo avere in (a, b) stesso, un punto limite (almeno) α, di questi zeri, il quale dovrebbe pure essere punto limite degli infiniti zeri che verrebbero, di conseguenza, ad avere $\omega', \omega'', \ldots, \omega^{(n-1)}$. A causa delle continuità di $\omega, \omega', \ldots, \omega^{(n-1)}$, in questo punto α si dovrebbero annullare, allora: ω e le sue prime $n-1$ derivate, e però: $\omega \equiv 0$ in (a, b); ciò che contraddice l'ipotesi.

Dopo ciò, la dimostrazione del nostro teorema riesce una immediata conseguenza del lemma III.

Se noi applichiamo questo teorema primo, alla equazione associata (6) ne deduciamo quest'altro:

Teorema II. *Esistono infiniti gruppi di $n-1$ integrali di una equazione come la* (1), *indipendenti e reali tutti ad eccezione di un solo che sarà complesso e della forma $u + i\,v$ (u e v essendo soluzioni della* (1) *indipendenti fra loro e della altre $n-2$) a wronskiano mai nullo in (a, b).*

Esiste, invero, per il lemma III, una combinazione di wronskiani, a coefficienti costanti, del tipo:

$$\sum k_i \begin{vmatrix} u_1 & \ldots & u_{i-1} & u_{i+1} & \ldots & u_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(n-2)} & \ldots & u_{i-1}^{(n-2)} & u_{i+1}^{(n-2)} & \ldots & u_n^{(n-2)} \end{vmatrix} + i\,H \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & \ldots & u_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_2^{(n-2)} & & \ldots & u_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

(le k_i essendo reali, definite a meno di un fattore costante, e H arbitrario costante) che non è mai zero in (a, b). Tale combinazione equivale a un determinante wronskiano di ordine $n-1$, di cui ciascun elemento è una combinazione a coefficienti reali di due u_i, salvo il primo che è complesso e della forma $\varrho\,u_1 + i\,H u_2$, con ϱ costante.

Dai teoremi primo e secondo, e dal lemma primo consegue: È sempre possibile porre ogni equazione come la (1) sotto una delle due seguenti forme:

$$(1)' \qquad L[u] \equiv \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \alpha_1 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots + \alpha_{n-2}\frac{d}{dx} + \alpha_{n-1}\right)\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right) u = 0,$$

$$(1)'' \qquad L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + \beta\right)\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \beta_1 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots + \beta_{n-2}\frac{d}{dx} + \beta_{n-1}\right) u = 0$$

nelle quali: α rappresenta la derivata logaritma, cambiata di segno, di un integrale sempre diverso da zero della (1), e β la derivata logaritma, cambiata di segno, del rapporto fra il wronskiano della (1) e il wronskiano di $n-1$ integrali indipendenti della stessa (1), scelti in modo da formare wronskiano mai nullo in (a, b).

Le α_i risultano funzioni razionali intere delle p_i di α e delle derivate di α fino a quelle di ordine $n-2$, le β_i sono anch'esse funzioni intere e razionali delle p_i, di β e delle derivate di β.

È, peraltro, da osservarsi, che per ottenere la decomposizione (1)'' basta conoscere il wronskiano di $n-1$ integral della (1), e cioè un integrale dell'associata alla (1).

Fra le relazioni che legano le α e le β alle p_i, mettiamo qui in evidenza le due seguenti:

$$\alpha + \alpha_1 = p_1; \qquad \beta + \beta_1 = p_1.$$

Notiamo ancora, esplicitamente, che i fattori nei quali si è decomposta l'espressione $L[u]$ sono generalmente complessi (sono complesse cioè le $\alpha; \alpha_i; \beta; \beta_i$) cosicchè possiamo dire: *una decomposizione del tipo* (1)' *o* (1)'' *è possibile sempre nel campo delle funzioni complesse.*

Perchè fosse possibile una decomposizione del tipo (1)', ad esempio, nel campo reale, sarebbe necessario stabilire l'esistenea di un integrale per la (1), mai nullo in (a, b). Ora ciò, in generale, non è possibile stabilire, chè non sempre una equazione lineare, di ordine maggiore di uno, ammette un integrale sempre diverso da zero, nell'intervallo di definizione dei coefficienti della stessa equazione. Basta per convincersene pensare alle equazioni del secondo ordine. Torneremo più avanti su questo argomento, e preciseremo la condizione necessaria e sufficiente perchè possa operarsi una decomposizione di $L[u]$ in fattori reali.

III.

La decomposizione di $L[u]$ in fattori complessi.

N.° 1. L'esistenza di integrali della (1) soddisfacenti a equazioni di ordine inferiore a n.

Riprendiamo a considerare la (1)''.

Il fattore di ordine $(n-1)$ che figura in essa, eguagliato a zero dà luogo alla equazione:

$$u^{(n-1)} + \beta_1 u^{(n-2)} + \ldots + \beta_{n-2} u' + \beta_{n-1} u = 0 \tag{12}$$

lineare omogenea di tipo normale, e a coefficienti complessi. Essa equazione, è soddisfatta identicamente da $n-2$ integrali indipendenti reali della (1) (che chiameremo $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$) e da un $(n-1)$ esimo integrale com-

plesso del tipo $\omega = u_{n-1} + i\,u_n$, di cui u_{n-1} e u_n, sono soluzioni della (1) indipendenti fra loro, e dagli u_i menzionati.

Notiamo, inoltre, che l'equazione che si ottiene dalla (12) sostituendovi le β_i con le loro parti reali, è a coefficienti reali, e ammette, fra le sue soluzioni, gli $n-2$ integrali indipendenti della (1): $u_1; u_2; \ldots; u_{n-2}$. Analizziamo più da vicino la (12). Essa è determinata dagli $n-1$ integrali $u_1; u_2; \ldots; u_{n-2}$; $\omega_{n-1} \equiv u_{n-1} + i\,u_n$ della (1), e però la sua forma, a meno di un fattore sempre diverso da zero è la seguente:

$$(12)' \qquad \lambda[u] \equiv \begin{vmatrix} u^{(n-1)} & u_1^{(n-1)} & \ldots & u_{n-2}^{(n-1)} & \omega_{n-1}^{(n-1)} \\ u^{(n-2)} & u_1^{(n-2)} & \ldots & u_{n-2}^{(n-2)} & \omega_{n-1}^{(n-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u' & u_1' & \ldots & u_{n-2}' & \omega_{n-1}' \\ u & u_1 & \ldots & u_{n-2} & \omega_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u^{(n-1)} & u_1^{(n-1)} & \ldots & u_{n-2}^{(n-1)} & u_{n-1}^{(n-1)} \\ u^{(n-2)} & u_1^{(n-2)} & \ldots & u_{n-2}^{(n-2)} & u_{n-1}^{(n-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u' & u_1' & \ldots & u_{n-2}' & u_{n-1}' \\ u & u_1 & \ldots & u_{n-2} & u_{n-1} \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} u^{(n-1)} & u_1^{(n-1)} & \ldots & u_{n-2}^{(n-1)} & u_n^{(n-1)} \\ u^{(n-2)} & u_1^{(n-2)} & \ldots & u_{n-2}^{(n-2)} & u_n^{(n-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u' & u_1' & \ldots & u_{n-2}' & u_n' \\ u & u_1 & \ldots & u_{n-2} & u_n \end{vmatrix} = 0$$

o anche:

$$\lambda[u] \equiv v_{n1}\,u^{(n-1)} + v_{n2}\,u^{(n-2)} + \ldots + v_{n,n-1}\,u'$$
$$+ v_{nn}\,u - i\,[v_{n-1,1}\,u^{(n-1)} + v_{n-1,2}\,u^{(n-2)} + \ldots + v_{n-1,n}\,u] = 0$$

dove le $v_{nj}, v_{n-1,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ rappresentano gli aggiunti ri spettivamente dell'ultima e della penultima colonna del wronskiano W, (eventualmente tutti cambiati di segno).

Moltiplichiamo ambo i membri della $(12)'$ pel fattore sempre diverso da zero; $v_{n1} + i\,v_{(n-1)1}$ (coniugato del wronskiano delle $u_1; u_2; \ldots; u_{n-2}, \omega_{n-1}$):

$$\lambda[u]\{v_{n1} + i\,v_{n-1,1}\} = [v_{n1}^2 + v_{n-1,1}^2]\,u^{n-1} + [v_{n1}\,v_{n2} + v_{n-1,1}\,v_{n-1,2}]\,u^{(n-2)} + \ldots$$
$$+ [v_{n1}\,v_{n,n-1} + v_{n-1,1}\,v_{n-1,n-1}]\,u' + [v_{n,1}\,v_{n,n} + v_{n-1,1}\,v_{n-1,n}]\,u$$
$$- i\,\{[v_{n1}\,v_{n-1,2} - v_{n-1,1}\,v_{n2}]\,u^{(n-2)} + [v_{n1}\,v_{n-1,3} - v_{n-1,1}\,v_{n3}]\,u^{(n-3)} + \ldots$$
$$+ [v_{n1}\,v_{n-1,n} - v_{n-1,1}\,v_{n,n}]\,u\} = 0.$$

Consideriamo la parte reale del primo membro di questa equazione e uguagliamola a zero. Abbiamo l'equazione:

$$(13) \qquad v_{n1} \sum_{j=1}^{n} v_{nj}\,u^{(n-j)} + v_{n-1,1} \sum_{j=1}^{n} v_{n-1,j}\,u^{(n-j)} = 0.$$

La (13), come si è detto, ammette come soluzioni gli $n-2$ integrali $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$ della (1); essa, poi, non può essere soddisfatta da alcun altro integrale della stessa (1), chè, in tale ipotesi, un integrale della forma $k u_{n-1} + h u_n$, verrebbe ad esserne un'altra soluzione. Ora ciò è assurdo; dalla (13), invero, sostituendo si ricava:

$$v_{n1} \sum_{j=1}^{n} v_{nj} (k u_{n-1}^{(n-j)} + h u_n^{(n-j)}) + v_{n-1,1} \sum_{j=1}^{n} v_{n-1,j} (k u_{n-1}^{(n-j)} + h u_n^{(n-j)})$$
$$= W \cdot (h v_{n1} + k v_{n-1,1}) \equiv 0 .$$

Il wronskiano delle $(n-1)$ funzioni $u_1; u_2; \ldots; u_{n-2}; k u_{n-1} + h u_n$, cioè, sarebbe nullo identicamente contro il supposto che gli n integrali $u_1, u_2, \ldots, u_n$, sono indipendenti.

Designamo con u_0 un integrale della (13) indipendente dagli $n-2$ menzionati.

È sempre possibile, allora, con gli $n-2$ integrali $u_1; u_2; \ldots; u_{n-2}$; costruire $n-3$ loro combinazioni (lineari e a coefficienti costanti e reali) tali da costituire, insieme alla combinazione complessa $\omega = u_0 + i u_1$, un sistema di integrali a wronskiano sempre diverso da zero in tutto (a, b).

La matrice

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \ldots u_{n-2} \\ u_0' & u_1' & u \ldots u_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_0^{(n-3)} & u_1^{(n-3)} & \ldots u_{n-2}^{(n-3)} \end{vmatrix}$$

ha caratteristica massima $n-2$ in ogni punto, e ciascun dei suoi minori di massimo ordine ha un numero finito di zeri in (a, b), chè tali minori costituiscono sistema integrale fondamentale per l'equazione associata alla (13). Per il lemma III, quindi, è possibile la determinazione di $n-3$ costanti $k_1; k_2; \ldots; k_{n-2}$; tali che la combinazione lineare

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} k_i \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_{i-1} & u_{i+1} & \ldots u_{n-2} \\ u_0^{(n-3)} & u_0^{(n-3)} & u_{i-1}^{(n-3)} & u_{i+1}^{(n-3)} & \ldots u_{n-2}^{(n-3)} \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \ldots u_{n-2} \\ u_1^{(n-3)} & \ldots u_{n-2}^{(n-3)} \end{vmatrix}$$

riesca sempre diversa da zero in tutto (a, b).

Ora, se le k_i son tutte diverse da zero, come sempre possiamo supporle, si ha l'identità:

$$\sigma = \frac{1}{k_1 k_2 \ldots k_{n-2}} \begin{vmatrix} (k_1 u_0 + i u_1), (k_2 u_1 + k_1 u_2) \ldots (k_{n-2} u_{n-3} + k_{n-3} u_{n-2}) \\ \cdot \\ (k_1 u_0 + i u_1)^{(n-3)} \qquad \ldots (k_{n-2} u_{n-3} + k_{n-3} u_{n-2})^{(n-3)} \end{vmatrix} .$$

Il primo membro della (13), dunque, è suscettibile di decomposizione nel prodotto simbolico di due fattori complessi l'uno di ordine $(n-2)$,

seguito dall'altro del primo ordine. Ciò non costituisce nulla di nuovo dopo quando si è detto dianzi, ma siamo indotti a fare queste considerazioni per mettere in evidenza il fatto che $(n-3)$ integrali *reali* della (1), e cioè gli integrali $k_i u_{i-1} + k_{i-1} u_i$ (per $i = 2, 3, \ldots, n-2$), sono soluzioni indipendenti di una equazione omogenea e di tipo normale di ordine $n-2$, e precisamente dell'equazione che si ottiene eguagliando a zero il fattore di ordine $n-2$ che entra (come si è detto) nella formazione del primo membro della (13). Partendo da questa ultima equazione, e ragionando in modo identico, si perviene alla conclusione che esistono $(n-4)$ integrali della (1) costituenti soluzioni indipendenti di una equazione di ordine $(n-3)$. E così via.

In generale, si può affermare, che esiste, per una equazione qualsiasi, come la (1), un sistema fondamentale di integrali tali che: $n-2$ di essi costituiscono soluzioni indipendenti di una equazione di ordine $n-1$ di tipo normale, dei quali, $n-3$ sono soluzioni in dipendenti di una di ordine $n-2$ ecc. ecc., uno soluzione di una equazione del secondo ordine.

Si ha quindi in particolare il

Teorema III. *La più generale equazione di ordine n del tipo* (1) *ammette quanti si vogliano integrali che sono soluzioni di equazioni del secondo ordine e però a tipo generalmente oscillatorio.*

N.° 2. Costruzione di un sistema integrale a catena completa di Wronskiani mai nulla.

Siamo in grado ora, di dimostrare la possibilità di decomporre il primo membro della (1) nel prodotto simbolico di n fattori simbolici del primo ordine e di tipo normale.

Supponiamo, invero, che il sistema fondamentale $u_1; u_2; \ldots; u_n$; sia stato scelto in maniera tale che le i soluzioni

$$u_1; u_2; \ldots; u_i \qquad (\text{per } i = 1, 2, \ldots, n-2);$$

costituiscano i soluzioni indipendenti di una equazione lineare omogenea di ordine $i+1$, di tipo normale.

La matrice wronskiana:

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \ldots & u_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

non è mai nulla in (a, b), essa cioè, ha caratteristica $n-1$ in ogni punto di (a, b), di più, per la scelta particolare del sistema integrale della (1),

anche la matrice:

$$(13)' \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \dots u_{n-2} \\ u_1' & u_2' \dots u_{n-2}' \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ u_1^{(n-2)} & \dots u_{n-2}^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

è diversa da zero in ogni punto di (a, b), chè le $u_1; u_2; \dots; u_{n-2}$; sono $n-2$ soluzioni indipendenti di una equazione di tipo normale e di ordine $n-1$; ne segue che i due minori di ordine $n-1$:

$$(13)'' \qquad \begin{vmatrix} u_1 & \dots u_{n-2} & u_{n-1} \\ u_1' & \dots u_{n-2}' & u_{n-1} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ u_1^{(n-2)} & \dots & u_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} u_1 & \dots u_{n-2} & u_n \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ u_1^{(n-2)} & \dots u_{n-2}^{(n-2)} & u_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

non potran mai riuscire, in un punto α di (a, b), simultaneamente nulli. Esiste, invero, un minore della matrice $(13)'$, e cioè un minore di ordine $(n-2)$ della (13), non nullo (in α), di cui i due determinanti $(13)''$ sono orlati di ordine $n-1$: quindi, ove in α si annullassero i minori $(13)''$, ivi sarebbero nulli gli orlati di ordine $n-1$ di un minore non nullo, di ordine $n-2$ della (13), e la (13) stessa dovrebbe essere nulla, ciò che è assurdo.

Il determinante wronskiano complesso:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \dots u_{n-2} & u_{n-1} & +iu_n \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ u_1^{(n-2)} & \dots u_{n-2}^{(n-2)} & u_{n-1}^{(n-2)} & +iu_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

è, per conseguenza, sempre diverso da zero in tutto (a, b), e l'equazione (1), quindi, potrà porsi sotto la forma:

$$(14) \qquad L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + \eta_1\right)\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \gamma_1 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + \gamma_{n-1}\right) u = 0$$

dove, si noti, le n funzioni

$$u_1; u_2; \dots; u_{n-2}; \qquad \omega_{n-1} \equiv u_{n-1} + iu_n$$

costituiscono sistema integrale fondamentale, dell'equazione di ordine $n-1$:

$$(15) \qquad u^{(n-1)} + \gamma_1 u^{(n-2)} + \dots + \gamma_{n-2} u' + \gamma_n u = 0.$$

Segue da ciò:

La matrice:

$$(15)' \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_{n-2} & \omega_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(n-3)} & \dots & u_{n-2}^{(n-3)} & \omega_{n-1}^{(n-3)} \end{vmatrix}$$

non è mai nulla in (a, b) e tale è pure (per la speciale scelta delle u_i) l'altra:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-3)} & u_2^{(n-3)} & \dots & u_{n-3}^{(n-3)} \end{vmatrix}.$$

Non possono, dunque, mai in un punto di (a, b) essere contemporaneamente zero i due minori estratti dalla $(15)'$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_{n-3} \\ u_1^{(n-2)} & \dots & u_{n-2}^{(n-3)} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_{n-3} & \omega \\ u_1^{(n-3)} & \dots & u_{n-3}^{(n-3)} & \omega^{(n-3)} \end{vmatrix}$$

cioè i tre minori reali:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-3)} & \dots \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_{n-3} & u_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-3)} & \dots \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_{n-3} & u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-3)} & \dots \end{vmatrix}$$

non sono mai simultaneamente nulli in (a, b).

Esistono, pertanto, (lemma III) combinazioni lineari di questi ultimi minori del tipo:

$$k_{n-i} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-3)} & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_{n-3} & u_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-3)} & \dots \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_{n-3} & u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-3)} & \dots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_{n-3}, k_{n-2} u_{n-2} + u_{n-1} + i u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-3)} & \dots \end{vmatrix}$$

(con k_{n-2} costante) mai nulle in tutto (a, b), se il terzo di tali minori, in (a, b), ammette un numero finito di zeri. Ma non può quest'ultimo annullarsi infinite volte, chè altrimenti in unpunto limite α, di questa infinità di zeri, dovrebbero annullarsi il minore stesso e le sue successive derivate. Ne conseguirebbe (la verifica è ovvia) l'annullarsi in α della matrice, estratta da W, costituita dalle colonne che entrano nella formazione del minore in considerazione; ciò che è assurdo.

Il primo membro della (15), dunque, o, ciò che è lo stesso, il fattore di ordine $n-1$ della (14), èsuscettibile di decomposizione ulteriore in due fattori, di ordine $n-2$ l'uno, seguito dall'altro di ordine uno, e alla (1) si potrà dare la forma seguente:

$$(14)' \quad L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + \eta_1\right)\left(\frac{d}{dx} + \eta_2\right)\left(\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \delta_1 \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} + \dots + \delta_{n-2}\right) u = 0.$$

Il fattore di ordine $n-2$ qui rappresentato è, a sua volta, suscettibile di decomposizione in un prodotto di due fattori l'uno di ordine $n-3$ e l'altro di ordine uno, chè esso, ammettendo come sistema integrale $u_1; u_2; \ldots; u_{n-3}; \omega_{n-2} \equiv k_{n-2} u_{n-2} + u_{n-1} + i u_n$; viene a trovarsi nelle medesime condizioni del fattore di ordine $n-1$ che figura nella (14) ecc.

Possiamo enunciare, per conseguenza, il

Teorema generale. *È sempre possibile* (*e in infiniti modi*) *decomporre il primo membro della più generale equazione differenziale di ordine n nel prodotto simbolico di n fattori simbolici del primo ordine.*

Alla più generale equazione (1), a coefficienti reali, possiamo sempre dare cioè la forma seguente:

$$(16) \qquad L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + \eta_1\right)\left(\frac{d}{dx} + \eta_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} + \eta_n\right) u = 0,$$

le η_i essendo finite e continue in (a, b) e complesse eventualmente. Esse sono espresse (lemma II) dalle formule:

$$\eta_i \equiv -D \lg \frac{W_{n-i+1}}{W_{n-i}}, \qquad (i = 1, \ldots, n-1, n)$$

dove $W_0 = 1$ e W_{n-i+1} è il wronskiano della equazione:

$$\left(\frac{d}{dx} + \eta_i\right)\left(\frac{d}{dx} + \eta_{i+1}\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} + \eta_n\right) u = 0,$$

e cioè il wronskiano (con i simboli già usati) degli $n-i+1$ integrali:

$$u_1; u_2; \ldots; u_{n-i}; \quad k_{n-i+1} u_{n-i+1} + k_{n-i+2} u_{n-i+2} + \cdots + k_{n-2} u_{n-2} + u_{n-1} + i u_n \equiv \omega_{n-i+1}$$

le k, essendo costanti opportune.

IV.

Relazioni fra i coefficienti di $L[u]$ e i coefficienti dei fattori in cui $L[u]$ stessa si decompone.

N.° 1. Sviluppando il prodotto indicato nella (16) e identificando i coefficienti della varie derivate di u, ai corrispondenti della (1), si otterranno n relazioni intere che legano le p_i alle η_i, le quali ricordano, in certo qual modo, le relazioni fra le radici e i coefficienti di una equazione algebrica.

Si trova propriamente: Il coefficiente p_1 è uguale alla somma delle η_i, il coefficiente p_2 alla somma dei prodotti a due a due, in tutti i modi possibili, delle η_i, aumentata dalla somma delle derivate prime di alcune delle η_i stesse moltiplicate per opportuni coefficienti interi, p_3 alla somma dei prodotti, a tre a tre, delle η_i più altri termini interi contenenti a

fattori derivate prime e seconde delle η_i ecc., ecc. Riportiamo qui solo le due prime delle menzionate relazioni fra le p_i e le η_i:

$$(17)\quad \begin{aligned} p_1 &= \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n, \\ p_2 &= \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \ldots + \eta_1\eta_n + \eta_2\eta_3 + \ldots \\ &\qquad + \eta_{n-1}\eta_n + \eta_2' + 2\eta_3' + 3\eta_4' + \ldots + (n-1)\eta_n'. \end{aligned}$$

V.

Condizioni per l'invertinilità dei fattori di decomposizione.

N.° 1. Dalle (17) si deduce, assai semplicemente, la condizione necessaria e sufficiente affinchè i fattori, in cui si decompone $L[u]$, riescano commutabili.

Dalla seconda delle (17) consegue, nel supposto che i due fattori $\left(\frac{d}{dx} + \eta_i\right)$, e $\left(\frac{d}{dx} + \eta_j\right)$, siano commutabili:

$$(i-1)\eta_i' + (j-1)\eta_j' = (i-1)\eta_j' + (j-1)\eta_i'$$

da cui:

$$\eta_i' = \eta_j'.$$

E però se uno fra i fattori che entrano nella formazione del primo membro della (16), è commutabile con tutti gli altri, deve aversi necessariamente:

$$\eta_1' = \eta_2' = \eta_3' = \ldots = \eta_n';$$

e a causa della prima delle (17), quindi:

$$\eta_i = \frac{1}{n}p_1 + c_i,$$

c_i essendo costante.

In particolare, dunque, se si suppone $p_1 \equiv 0$, (caso in cui ci posiamo sempre ricondurre) avremo:

$$\eta_i = \text{costante}$$

Ma allora, i coefficienti p_i di $L[u]$, dovranno, di necessità, essere costanti, e le η vengono a essere le radici della equazione caratteristica associata alla equazione (a coefficienti costanti) $L[u] = 0$. Inversamente se le p_i sono costanti e con $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, designiamo le radici della equazione:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0.$$

Si ha l'identità:

$$L[u] = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dx} - \eta_1\right)u$$

nella quale i fattori che ne costituiscono il secondo membro sono commutabili.

Concludendo si può stabilire il

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'espressione differenziale $L[u]$ sia suscettibile di decomposizione in un prodotto di n fattori simbolici del primo ordine, commutabili, si è che la sua trasformata, ottenuta ponendo $u = ve^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$ riesca a meno del fattore $e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$, una espressione differenziale in v a coefficienti costanti.*

Più in generale si può enunciare la proposizione (la verifica è immediata).

Se l'espressione $L[u]$ è suscettibile di una decomposizione in un prodotto di due fattori, di ordine $n-1$ l'uno, di ordine primo l'altro, la condizione necessaria e sufficiente perchè tali fattori siano commutabili, si è che la trasformata di $L[u]$ ottenuta con lasostituzione $u = ve^{-\int \frac{p_1}{3} dx}$, si riduca, a meno del fattore $e^{-\int \frac{p_1}{3} dx}$, a una espressione in v di ordine n, a coefficienti costanti.

VI.

Sulla decomposizione di $L[u]$ in fattori reali.

N.° 1. Constatata la possibilità di decomporre il primo membro della (1) in un prodotto di n fattori lineari, del primo ordine, generalmente complessi, ci si presenta naturale la domanda se, per detta decomposizione, dobbiamo necessariamente mantenerci nel campo delle funzioni complesse. In altri termini, una generica espressione differenziale lineare, si potrà sempre decomporre in fattori reali? Sarà, cioè, sempre possibile la determinazione di n integrali della (1) reali, che ammettano catena completa di wronskiani mai nulla? Constateremo, in quel che segue, che la cosa non è sempre possibile, anzi, preciserimo la condizione necessaria e sufficiente, perchè un' espressione differenziale, come la $L[u]$, sia suscettibile di decomposizione in fattori simbolici tutti reali.

A questo scopo, cominciamo col supporre possibile decomporre $L[u]$ in fattori reali. La (1) allora potremo scriverla:

$$(17)\quad \left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_n}{W_{n-1}}\right)\left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_{n-1}}{W_{n-2}}\right)\cdots\left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_2}{W_1}\right)\left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_1}{W_0}\right)u = 0$$

i simboli W_i avendo il significato solito, salvo che ora sono supposti tutti reali, mai nulli in (a, b), e i quozienti mutui positivi.

Per l'integrale generale della (17) avremo:

$$(18)\qquad u = \frac{W_1}{W_0}\int^x \frac{W_2 W_0}{W_1^2} dx \int^x \frac{W_3 W_1}{W_2^2} dx \int^x \frac{W_4 W_2}{W_3^2} dx \cdots \int^x \frac{W_n W_{n-2}}{W_{n-1}^2} dx.$$

I successivi integrali essendo determinati a meno di una constante additiva

Deduciamo: La funzione u, espressa dalla (18), in (a, b), potrà al più ammettere $n-1$ zeri, ove, si noti, vanno computati come m zeri (coincidenti) gli eventuali punti nei quali la u stessa sia nulla insieme alle sue prime $m-1$ derivate.

E infatti, se la u, in (a, b), avesse un numero di zeri maggiore o uguale a n altrettanti dovrebbe ammetterne la funzione:

$$\varphi_1 \equiv \int^x \frac{W_2 W_0}{W_1^2} dx \int^x \frac{W_3 W_1}{W_2^2} dx \ \dots \int^x \frac{W_n W_{n-2}}{W_{n-1}^2} dx$$

e però la derivata φ_1' dovrebbe, in (a, b), annullarsi $n-1$ volte almeno; ed $n-1$ volte almeno, di conseguenza, dovrebbe pure annullarsi l'altra funzione:

$$\varphi_2 = \int^x \frac{W_3 W_1}{W_2^2} dx \ \dots \int^x \frac{W_n W_{n-2}}{W_{n-1}^2} dx$$

da cui segue che si dovranno avere $n-2$ zeri, almeno, per φ_2', e quindi anche per

$$\varphi_3 \equiv \int^x \frac{W_4 W_2}{W_2^2} dx \ \dots \int^x \frac{W_n W_{n-2}}{W_{n-1}^2} dx.$$

Continuando successivamente perverremo alla conclusione che in (a, b) dovrebbero esistere due zeri almeno per la funzione $\varphi_{n-1} = \int^x \frac{W_n W_{n-2}}{W_{n-1}} dx$ e quindi uno zero almeno per la derivata $\varphi'_{n-1} = \frac{W_n W_{n-2}}{W_{n-1}^2}$ ciò che è assurdo.

Si può dunque affermare:

Affinchè il primo membro della (1) *sia suscettibile di una decomposizione in n fattori simbolici reali del primo ordine, è necessario che ogni suo integrale non ammetta in* (a, b), *un numero di zeri* (*distinti o coincidenti*) *superiore a* $n-1$.

In particolare, si dovrà avere per le equazioni i cui primi membri sono decomponibili in fattori reali, che una loro soluzione, nulla in un punto insieme alle proprie derivate successive, fino a quella di ordine $n-2$ inclusa, non potrà ulteriormente annullarsi.

La proposizione enunciata si inverte. Abbiamo cioè:

Se ogni integrale di una equazione come la (1) *si annulla in* (a, b) $n-1$ *volte al più, esistono per essa n integrali indipendenti a catena completa di wronskiani mai nulla.* Ne consegue la possibilità di decomporre il primo membro della medesima, in un prodotto di n fattori reali del primo ordine.

Infatti: prendiamo a considerare un sistema di integrali $v_1, v_2, \ldots, v_n$ soddisfacenti alle seguenti condizioni iniziali:

$$v_1(a) = v_1'(a) = \ldots = v_1^{(n-2)}(a) = 0; \quad v_1^{(n-1)}(a) = 1;$$
$$v_2(a) = v_2'(a) = \ldots = v_2^{(n-3)}(a) = 0, \quad v_2^{(n-2)}(a) = 1;$$
$$v_3(a) = v_3'(a) = \ldots = v_3^{(n-4)}(a) = 0, \quad v^{(n-3)}(a) = 1, \ldots,$$
$$v_{n-1}(a) = 0, \quad v_{n-1}'(a) = 1; \quad v_n(a) = 1.$$

Un sistema così fatto costituisce certamente sistema fondamentale di soluzioni per la (1).

Orbene, *nella nostra ipotesi, la relativa catena completa di wronskiani, fatta eccezione del punto a, non è più ulteriormente nulla in tutto* (a, b).

Si consideri, invero, il wronskiano

$$W_i \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_i \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_2' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(i-1)} & u_2^{(i-1)} & \ldots & u_i^{(i-1)} \end{vmatrix} \quad (\text{per } i = 1, 2, \ldots, n)$$

dei primi i integrali del sistema fissato, e supponiamo che esso si annulli in un punto c diverso da a, che sia cioè $W(c) = 0$.

È possibile, allora, determinare i costanti, non tutte nulle, $k_1, k_2, \ldots, k_i$, soddisfacenti al sistema di equazioni lineari, omogenee, seguente:

$$k_1 u_1^{(m)}(c) + k_2 u_2^{(m)}(c) + \ldots + k_i u_i^{(m)}(c) = 0 \quad (\text{per } m = 0, 1, 2, \ldots, i-1).$$

L'integrale (non nullo identicamente)

$$u = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_i u_i$$

allora, verrebbe ad avere uno zero di ordine i in c, e uno di ordine $n - i$ in a. Complessivamente, quindi, esso verrebbe ad avere in (a, b), n zeri, contro il supposto. La nostra affermazione è dunque dimostrata.

Scegliendo, poi, come sistema integrale per la (1), invece delle u_i, opportune loro combinazioni lineari, si può far sì che la corrispondente catena completa di wronskiani riesca mai zero in *tutto* (a, b).

Verifichiamo questa nostra asserzione, per semplicità, nell'ipotesi che la (1) sia una equazione del quarto ordine. La cosa però è vera in generale.

Per le u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ si ha: $u_4(a) = 1$; $u_3(a) = 0$; $u_3'(a) = 1$; $u_2(a) = u_2'(a) = 0$; $u_2''(a) = 1$; $u_1(a) = u_1'(a) = u_1''(a) = 0$; $u_1'''(a) = 1$ inoltre per i wronskiani $\Delta_4, \Delta_3, \Delta_2$, abbiamo:

$$\Delta_4 \equiv \begin{vmatrix} u_4 & u_3 & u_2 & u_1 \\ u_4' & u_3' & u_2' & u_1' \\ u_4'' & u_3'' & u_2'' & u_1'' \\ u_4''' & u_3''' & u_2''' & u_1''' \end{vmatrix}$$

è sempre diverso da zero e positivo in tutto (a, b).

$$\Delta_3 \equiv \begin{vmatrix} u_3 & u_2 & u_1 \\ u_3' & u_2' & u_1' \\ u_3'' & u_2'' & u_1'' \end{vmatrix}$$

diverso da zero e positivo in tutto (a, b) ad eccezione del punto a dove è nullo.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} u_2 & u_1 \\ u_2' & u_1' \end{vmatrix}$$

come sopra, mai nullo in (a, b) e positivo, salvo in a dove è $\Delta_2(a) = 0$.

E infine u_1, nullo in a con le sue derivate prima e seconda, è poi sempre positivo. Possiamo supporre anche u_2 e u_3 sempre positivi in (a, b) e nulli solo in a, e così u_4 sempre positivo in tutto (a, b), (se non lo fossero basterebbe aggiunger loro u_1 moltiplicato per un numero positivo sufficientemente grande).

Si prenda a considerare il wronskiano del secondo ordine:

$$\begin{vmatrix} u_3 & u_2 \\ u_3' & u_2' \end{vmatrix}$$

nullo in a e positivo in un intorno di a, e l'altro:

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_1 \\ u_2' & u_1' \end{vmatrix}$$

nullo in a e poi sempre positivo in tutto (a, b).

La combinazione:

$$\begin{vmatrix} u_3 & u_2 \\ u_3' & u_2' \end{vmatrix} + K^2 \begin{vmatrix} u_2 & u_1 \\ u_2' & u_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_3 - K^2 u_1 & u_2 \\ u_3' - K^2 u_1 & u_2' \end{vmatrix}$$

per K sufficientemente grande, riuscira sempre positiva in (a, b), fatta eccezione del punto a dove è zero. Inoltre l'integrale $u_3 - K^2 u_1$, nullo in a, é positivo in un intorno di a, chè: $(u_3'(a) - K^2 u_1'(a)) = 1$; quindi, per H sufficientemente grande, l'integrale $v_3 = u_3 - K^2 u_1 + H^2 u_2$, risulterà nullo in a e poi sempre positivo in tutto (a, b) e di più $v'(a) = 1$.

Il determinante wronskiano $|u_4 v_3 u_2 u_1|$, si viene allora a trovare nelle identiche condizioni di Δ_4 e di più, per esso si avrà: wronskiano $v_3 u_2$ è nullo in a, e poi sempre positivo in (a, b).

Consideriamo ora il minore del terzo ordine:

$$\begin{vmatrix} u_4 & v_3 & u_2 \\ u_4' & v_3' & u_2' \\ u_4'' & v_3'' & u_2'' \end{vmatrix}$$

positivo in a, e però anche in un intorno a destra di a e l'altro:

$$\begin{vmatrix} v_3 & u_2 & u_1 \\ v_3' & u_2' & u_1' \\ v_3'' & u_2'' & u_1'' \end{vmatrix}$$

nullo in a e poi sempre positivo.

La combinazione lineare:

$$W_3 = \begin{vmatrix} u_4 & v_3 & u_2 \\ u_4' & v_3' & u_2' \\ u_4'' & v_3'' & u_2'' \end{vmatrix} + N^2 \begin{vmatrix} v_3 & u_2 & u_1 \\ v_3' & u_2' & u_1' \\ v_3'' & u_2'' & u_1'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_4 + N^2 u_1 & v_3 & u_2 \\ u_4' + N^2 u_1' & v_3' & u_2' \\ u_4'' + N^2 u_1'' & v_3'' & u_2'' \end{vmatrix}$$

per N sufficientemente grande, risulterà maggiore di zero in tutto (a, b); si ha inoltre: $\omega_4 \equiv u_4 + N^2 u_1$ positiva in tutto (a, b), e $\omega(a) = 1$.

Del wronskiano $|\omega_4 v_3 u_2|$ prendiamo in esame i due minori:

$$\begin{vmatrix} \omega_4 & v_3 \\ \omega_4' & v_3' \end{vmatrix}$$

positivo in a e però anche in un intorno a destra di a e

$$\begin{vmatrix} v_3 & u_2 \\ v_3' & u_2' \end{vmatrix}$$

nullo in a e poi sempre positivo in (a, b).

Per M sufficientemente grande avremo:

$$\begin{vmatrix} \omega_4 & v_3 \\ \omega_4' & v_3' \end{vmatrix} + M^2 \begin{vmatrix} v_3 & u_2 \\ v_3' & u_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_4 - M^2 u_2 & v_3 \\ \omega_4' - M^2 u_2' & v_3' \end{vmatrix}$$

sempre positivo in (a, b).

L'integrale $\omega_4 - M^2 u_2$ in a è uguale a 1, esso dunque in un intorno a destra di a si manterrà positivo, prendendo, allora, R sufficientemente grande risulterà $v_4 = \omega_4 - M^2 u_2 + R^2 v_3$ positivo in tutto (a, b).

Si ha anche evidentemente $v_4(a) = 1$.

Il sistema integrale fondamentale v_4, v_3, u_2, u_1 soddisfa alle condizioni:

v_4 sempre positivo in (a, b).

$$\begin{vmatrix} v_4 & v_3 \\ v_4' & v_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_4 - M^2 u_2 & v_3 \\ \omega_4' - M^2 u_2' & v_3' \end{vmatrix}$$

sempre positivo in tutto (a, b).

$$\begin{vmatrix} v_4 & v_3 & u_2 \\ v_4' & v_3' & u_2' \\ v_4'' & v_3'' & u_2'' \end{vmatrix}$$

sempre positivo in tutto (a, b) e infine, wronskiano $|v_4, v_3, u_2, u_1| = \Delta_4$, positivo dappertutto in (a, b); cioè gli integrali $v_4; v_3; u_2; u_1$; sono a catena completa di wronskiani mai nulla in (a, b).

A conclusione di quanto abbiamo sopra esposto possiamo enunciare il seguente:

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il primo membro della* (1) *sia decomponibile nel prodotto di n fattori simbolici del primo ordine e reali, si è che ogni integrale della stessa* (1) *si annulli, nell'intervallo* (a, b), *di definizione delle* p_i, $n-1$ *volte al più.*

N.° 2. Osservazione.

Per dimostrare che la condizione contenuta nell'enunciato teorema è sufficiente per la decomponibilità di $L(u)$ in n fattori reali, abbiamo supposto che ogni integrale della (1) avesse, in (a, b), $n-1$ zeri al più, con la convenziona, però, di computare come m zeri, per un dato integrale, ogni eventuale punto in cui esso risultasse nullo insieme alla sue prime $m-1$ derivate. Ma è superfluo fare tale convenzione, risultando essa conseguenza della ipotesi pura e semplice, che ogni integrale della (1), si annulli $n-1$ volte al più in in tutto (a, b).

Come immediata conseguenza della ipotesi che ogni integrale della (1) si annulli in (a, b) $n-1$ volte al più, si ha intanto: Esiste uno e un solo integrale, determinato a meno di un fattore costante, che si annulli in $n-1$ punti di (a, b), fissati comunque a priori; chè in caso contrario, nel caso cioè vi fossero due integrali, u e v, distinti (non proporzionali) che in (a, b) avessero a comune gli zeri: $c_1; c_2; \ldots; c_{n-1}$; detto c un ulteriore punto del menzionato intervallo, distinto dai c_i, e nel quale quindi riescono: $u(c) \neq 0$, $v(c) \neq 0$, per l'integrale $W(x) = u(x) - \frac{u(c)}{v(c)} v(x)$, della (1), verremmo ad avere n zeri in (a, b), contro il supposto.

Si deduce da ciò: posto che $u_1; u_2; \ldots; u_n$; costituiscano sistema fondamentale di integrali per la (1), e $c_1; c_2; \ldots; c_{n-1}$; un qualsivoglia sistema di $n-1$ punti distinti di (a, b), che la matrice:

$$\left\| \begin{array}{cccc} u_1(c_1) & u_2(c_1) & \ldots & u_n(c_1) \\ u_1(c_2) & u_2(c_2) & \ldots & u_n(c_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1(c_{n-1}) & u_2(c_{n-1}) & \ldots & u_n(c_{n-1}) \end{array} \right\|$$

ha caratteristica massima.

Conseguentemente esistono sempre soluzioni per un sistema di equazioni, lineari nelle k_i, come il seguente:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i u_i(c_1) = \gamma_1; \quad \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(c_2) = \gamma_2; \quad \ldots; \quad \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(c_{n-1}) = \gamma_{n-1}$$

comunque si prendano le costanti γ e le c_i; queste ultime, però, contenute in (a, b). Esiste, cioè, sempre un integrale della (1), che in $n-1$ punti dell'intervallo (a, b), assume valori comunque prescritti.

Segue: Un integrale u della (1) che in un punto c_i sia nullo con la sua prima derivata, (nel quale sia $u''(c_1) \neq 0$) non può ulteriormente annullarsi in più di $n-3$ punti. Supponiamo, invero, il contrario, che cioè u oltre che in c_i si annulli ulteriormente in altri $n-2$ punti, e siano questi punti $c_1; c_2; \ldots; c_{i-1}; c_{i+1} \ldots c_{n-1}$. Per fissare le idee supponiamo: $c_1 < c_2 \ldots < c_{i-1} < c_i < c_{i+1} < \ldots < c_{n-1}$.

Si prenda a considerare un integrale v (certamente esistente) della (1) soddisfacente alle seguenti condizioni:

$$v(c_1) = v(c_2) = \ldots = v(c_{i-1}) = v(c_{i+1}) = \ldots = v(c_{n-1}) = 0 \qquad v(c_i) = 1.$$

Possiamo supporre, senza ledere la generalità, u non negativo nel tratto (c_{i-1}, c_{i+1}). Moltiplichiamo u per una costante positiva k, tale da far sì che i massimi di ku negli intervalli (c_{i-1}, c_i); (c_i, c_{i+1}) riescano maggiori dei massimi assoluti di v nei medesimi intervalli. Diciamo m_{i-1} ed m_{i+1} i punti di massimo di ku nei menzionati tratti.

Per l'integrale $w = ku - v$, abbiamo:

$$w(c_j) = 0 \quad (\text{per } j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1 \ldots n-1)$$

e inoltre:

$$w(m_{i-1}) = ku(m_{i-1}) - v(m_{i-1}) > 0, \qquad w(c_i) = ku(c_i) - v(c_i) = -1,$$
$$w(m_{i+1}) > 0.$$

Per w, nell'intervallo (c_{i-1}, c_{i+1}), si verrebbero ad avere due zeri almeno, oltre ai due zeri estremi, e complessivamente, quindi, n zeri almeno in tutto (a, b), ciò che è assurdo. Il ragionamento, resta evidentemente valido, anche nel caso in cui il primo zero c_1, di u sia proprio c_i cioè quello in cui u si annulla con la sua derivata, purchè sia $c_i > a$.

Resterebbe, quindi, solo da considerare l'eventualità che lo zero doppio per u si abbia proprio nell'estremo a.

Considerazioni della stessa natura, che qui, per brevità, tralasciamo di fare, portano, anche in tal caso, ad escludere che un integrale nullo in a con la sua derivata, si annulli ulteriormente un numero di volte superiore a $n-3$.

Con ragionamente analogo, si prova poi che un integrale della (1) nullo in un punto con le sue derivate prima e seconda, ulteriormente potrà annullarsi $n-4$ volte a più, e in generale, per induzione, supposto che ogni integrale nullo con le sue prime $i-1$ derivate si annulli ulteriormente $n-i$ volte al più, ne segue: che un integrale nullo in un punto con le sue prime i derivate, ulteriormente potrà ancora annullarsi $n-i-1$ volte al più ecc.

VII.

Sulla validità della identità (9) in tutto $a(b)$.

N.° 1. Ritornando ancora al dimostrato teorema, osserviamo, che: *perchè esso sussista è sufficiente stabilire che pel particolare sistema integrale* $u_1, u_2, \ldots, u_n$, *determinato dalle condizioni*:

$$u_{n-i}^{(j)}(a) = 0 \quad \text{per } j \neq i,$$
$$u_{n-i}^{(i)}(a) = 1 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \ (j = 0, 1, \ldots, n-1)$$

si ha:

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_i \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_i' \\ u_1^{(i-1)} & u_2^{(i-1)} & \ldots & u_i^{(i-1)} \end{vmatrix} \quad (\text{per } i = 1, 2, \ldots, n),$$

sempre diverso da zero in (a, b), eccezion fatta per l'estremo a.

Si può provare che questa condizione è anche necessaria, nel seguito avremo mezzo di verificarlo.

Qui vogliamo, piuttosto, soffermarci sopra quest'altro fatto. Un sistema integrale fondamentale genrico, per esempio quello adesso menzionato, relativo a una generica equazione come la (1), non è a catena completa di wronskiani mai nulli in (a, b); in generale, però, è facile dimostrare esser sempre possibile decomporre (a, b), in un numero finito di intervalli, in ciascuno dei quali, la catena completa di wronskiani, relativa a un medesimo sistema integrale fondamentale, e sempre diversa da zero, gli estremi dei detti tratti esclusi.

Basterà, per questo, constatare che ogni elemento della catena di wronskiani, relativa a un sistema integrale della (1), si annulla, in (a, b), un numero finito di volte. Ed ecco come si può arrivare a tale constatazione.

N.° 2. Sugli zeri dei termini di una catena completa di wronskiani.

Dei wronskiani:

$$W \equiv |u_1 u_2 \ldots u_n|; \quad W_{n-1} \equiv |u_1 u_2 \ldots u_{n-1}|; \ \ldots; \ W_2 \equiv |u_1 u_2|;$$
$$W_1 \equiv |u_1|; \quad W_0 \equiv 1;$$

costituenti la catena completa relativa al sistema degli integrali u_i: il primo non è mai zero; il secondo costituisce una particolare soluzione della equazione, di tipo normale, associata alla (1). Esso dunque in (a, b) si annulla un numero finito di volte.

Siano $a_1; a_2; \ldots; a_h$ gli zeri di W_{n-1}, interni ad (a, b).

In ciascuno degli intervalli, aperti agli estremi: (a, a_1); (a_{i-1}, a_i); (a_h, b); (per $i = 2, 3, \ldots, h$), le funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, costituiscono

sistema fondamentale di integrali per una determinata equazione di ordine $n-1$, la cui associata ammette, come particolare soluzione, il wronskiano W_{n-2}. Di conseguenza W_{n-2} in ognuno degli intervalli parziali sopra fissati si annulla un numero finito di volte, esso, poi, potrà eventualmente annullarsi anche nei punti a, a_i e b, complessivamente, però, viene sempre ad avere in (a, b), un numero finito di zeri. Segue, analogamente, che anche W_{n-3}, ammette in (a, b) un numero finito di zeri e quindi anche W_{n-4}, W_{n-5}, W_1.

Diciamo α_1; $\alpha_i, \ldots, \alpha_m$; gli zeri distinti delle funzioni $W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}$, costituenti catena completa di wronskiani, relativa al sistema integrale fondamentale $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Si può stabilire la *proposizione*:

In ogni punto di (a, b), *i punti* α_i *esclusi, vale l'identità*:

$$(20)\quad L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W}{W_{n-1}}\right)\left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_{n-1}}{W_{n-2}}\right)\ldots\left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_1}{W_0}\right)u.$$

Ne consegue l'importante risultato:

Il numero degli zeri di un integrale della più generale equazio n e lineare di ordine n è limitato, e non supera il numero $(n-1)m + m = nm$ dove m rappresenta il numero complessivo di zeri distinti degli elementi della catena di wronskiani relativa a un particolare (del resto qualsiasi) sistema fondamentale di integrali della stessa equazione.

In altri termini, si può esprimere la stessa cosa dicendo: che *la combinazione a coefficienti* k_i *costanti*

$$u = k_1 u_1 + k_1 + u_2 + \ldots + k_n u_n$$

ha, in (a, b), *un numero di zeri che si mantiene* limitato al variare *comunque delle* k_i.

Di un'altra notevole conseguenza della enunciata proposizione diremo più avanti.

VIII.

Alcune applicazioni.

N.° 1. Sull'equazione del terzo ordine.

Se la (1) è del terzo ordine: si deduce, dalle osservazioni ora fatte, che: affinché essa sia decomponibile nel prodotto di tre fattori simbolici reali, è necessario e basta che l'integrale di essa nullo all'estremo a con la sua derivata, ed il wronskiano formato da questo integrale e da un altro integrale pure nullo in a, non siano più ulteriormente zero in tutto (a, b). Ma un tale wronskiano è l'integrale, nullo con la derivata in a, della equazione associata alla data; conseguentemente si potrà affermare che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il primo membro di una equazione del terzo ordine sia decomponibile nel prodotto di tre fattori simbolici del primo ordine reali, si è che gli integrali di essa equazione e della sua associata, nulli con la derivata in un estremo, non siano più ulteriormente nulli in tutto (a, b).

In particolare quindi se l'equazione è autoaggiunta e perciò coincidente con la propria associata abbiamo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il primo membro di una equazione autoaggiunta, del terzo ordine, si decomponga nel prodotto di tre fattori simbolici del primo ordine reali, si è che l'integrale nullo con la derivata ad un estremo, non sia più nullo ulteriormente.

Questa proposizione costituisce la generalizzazione, perfetta, di quella analoga enunciata da me pel caso delle equazioni del secondo ordine (nella memoria citata nella prefazione), e cioè, affinchè il primo membro di una equazione del secondo ordine si decomponga in due fattori del primo, reali, è necessario e basta che l'integrale di essa nullo a un estremo non sia più nullo ulteriormente [12]).

N.° 2. L'equazione del quarto ordine autoaggiunta.

Supponiamo la (1) del quarto ordine, autoaggiunta, cioè della forma:

$$L[u] = u^{IV} + (pu')' + qu = 0 \tag{20}$$

e designiamo, con $u_1; u_2; u_3; u_4;$ il sistema integrale fondamentale ad essa relativo, determinato dalle condizioni:

$$\begin{aligned} u_1(a) = u_1'(a) &= u_1''(a) = 0; \quad u_1'''(a) = 1; \\ u_2(a) = u_2'(a) &= u_2'''(a) = 0; \quad u_2'''(a) = 1; \\ u_3(a) = u_3''(a) &= u_3'''(a) = 0; \quad u_3'(a) = 1; \\ u_4'(a) = u_4''(a) &= u_4'''(a) = 0; \quad u_4(a) = 1; \end{aligned}$$

Abbiamo: Affinchè pel primo membro di essa equazione sia possibile una decomposizione in fattori reali, è necessario e basta che le tre funzioni:

$$u_1; \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix}$$

nulle tutte in a, non siano più ulteriormente nulle in (a, b). Si osservi che il wronskiano dei tre integrali $u_1; u_2; u_3;$ è un integrale della associata alla (1), e propriamente l'integrale nullo in a, insieme alle sue derivate

[12]) Non è necessaria, per le equazioni del secondo ordine, la restrizione della autoaggiunzione in quanto tutte le equazioni del secondo ordine possono considerarsi autoaggiunte.

rima e seconda; ma noi abbiamo supposto la (1) autoaggiunta, coincidente ioè con la sua associata; ne segue che, il menzionato wronskiano, a meno i un fattore costante, coincide con u_1. Se, dunque, u_1 non è mai zero n tutto (a, b), (eccezion fatta pel punto a) tale sarà pure il wronskiano $|u_1, u_2, u_3|$. Riguardo poi al determinante $|u_1 u_2|$, si trova che esso è oluzione di una equazione del quinto ordine autoaggiunta, che ora co-truiremo, e propriamente il particolare integrale di questa, nullo in a con e sue derivate prima, seconda e terza. Posto invero: $\varrho = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$, si icava successivamente:

$$\varrho' = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1'' & u_2'' \end{vmatrix}; \quad \varrho'' = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1'' & u_2'' \end{vmatrix}; \quad \varrho''' = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1^{(IV)} & u_2^{(IV)} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix}$$

la cui, a causa della (29):

$$21)\quad \varrho''' + (p\varrho)' = 2 \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix}; \quad \{\varrho''' + (p\varrho)'\}' = 2 \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1^{(IV)} & u_2^{(IV)} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} u_1'' & u_2'' \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix}$$

$$= -2p \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1'' & u_2'' \end{vmatrix} - 2q \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} u_1'' & u_2'' \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix}; \quad \{\varrho''' + (p\varrho)'\}' - 2q\varrho$$

$$= 2p \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1'' & u_2'' \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} u_1'' & u_2'' \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix}; \quad \{\varrho''' + (p\varrho)'\}'' + p\{\varrho''' + (p\varrho)'\} - 2(q\varrho)'$$

$$= -2q \begin{vmatrix} u_1'' & u_2'' \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = 2q\varrho'$$

$$22)\qquad \{\varrho'' + (p\varrho)\}''' + p\{\varrho'' + (p\varrho)\}' - 4q\varrho' - 2q'\varrho = 0.$$

Si verifica assai agevolmente che la (22), è autoaggiunta.

Si potrà concludere che: il primo membro della (20) sarà decomponibile el prodotto di quattro fattori del primo ordine reali, allora e solo quando l suo integrale nullo in a con le derivate prima e seconda, e l'integrale ella (22) nullo in a con le derivate prima, seconda e terza, non sono iù ulteriormente nulli in tutto (a, b).

In ogni caso la (22) sarà decomponibile nel prodotto di tre fattori imbolici reali di cui uno del secondo ordine, allora e solo quando esista n integrale della (22) stessa, mai nullo in (a, b).

IX.

La forma degli integrali di una equazione lineare.

N.° 1. Caso in cui $L[u]$ riesca decomponibile in fattori reali.

Alla (1), possiamo dare la forma:

$$17)\qquad L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_n}{W_{n-1}}\right)\left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_{n-1}}{W_{n-2}}\right)\cdot\cdot$$

$$\left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_2}{W_1}\right)\left(\frac{d}{dx} - D\lg\frac{W_1}{W_0}\right)u = 0$$

i rapporti $\frac{W_i}{W_{i-1}}$, essendo continui, e sempre positivi in (a, b). Pel relativo integrale generale avremo quindi:

$$u = \frac{W_1}{W_0}\int^x \frac{W_2 W_0}{W_1^2}\,dx \int^x \frac{W_3 W_1}{W_2^2}\,dx \ldots \int^x \frac{W_n W_{n-2}}{W_{n-1}^2}\,dx. \tag{18}$$

Ricaviamo dalla (18), detto c, un qualsivoglia punto di (a, b): le n funzioni:

$$u_1 = \frac{W_1}{W_0}; \quad u_2 = \frac{W_1}{W_0}\int_c^x \frac{W_2 W_0}{W_1^2}\,dx; \quad u_3 = \frac{W_1}{W_0}\int_c^x \frac{W_2 W_0}{W_1^2}\,dx \int_c^x \frac{W_3 W_1}{W_2^2}\,dx; \quad \ldots; \tag{23}$$

$$u_n = \frac{W_1}{W_0}\int_c^x \frac{W_2 W_0}{W_1^2}\,dx \int_c^x \frac{W_3 W_1}{W_2^2}\,dx \ldots \int_c^x \frac{W_n W_{n-2}}{W_{n-1}^2}\,dx$$

costituiscono sistema fondamentale di integrali per la (1), e precisamente un sistema soddisfacente alle seguenti condizioni iniziali:

$$u_i(c) = u_i'(c) = \ldots = u^{(i-2)}(c) = 0; \quad u^{(i-1)}(i) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dal systema (23), possiamo, con opportune combinazioni lineari delle u_i, dedurne un altro, anch'esso fondamentale, i cui elementi abbiano tutti la forma di prodotto della funzione mai nulla in (a, b), $\frac{W_1}{W_0}$ per una funzione mai nulla e monotona.

Una tale ennupla di integrali si esprimerà quindi mediante esponenziali del tipo:

$$e^{\lambda_1}; \quad e^{\lambda_1} e^{\lambda_2}; \quad e^{\lambda_1} e^{\lambda_3}; \ldots; e^{\lambda_1} e^{\lambda_n}$$

dove λ è continua in (a, b) e $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ anche monotone.

La nostra equazione (1), nell'ipotesi in questione, ha dunque comportamento perfettamente analogo a quello, di una equazione a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è a radici reali.

N.° 2. Caso generale (in cui non è possibile la decomposizione in fattori reali).

Alla (1) possiamo sempre dare la forma (17), e la forma (18) (conseguentemente) al suo integrale generale; e possiamo rappresentare un sistema integrale fondamentale ad essa relativo con le (23). Le W_i però, nella ipotesi generica, non saranno necessariamente reali, chè mentre è possibile, in ogni caso, decomporre $L[u]$ in n fattori del primo ordine complessi, non è sempre possibile una decomposizione del genere in fattori tutti reali. Basta per convincersene pensare alla espressione del secondo ordine: $l[u] \equiv u'' + \lambda^2 u$, con λ, costante reale. L'eventuale decomposizione di $l[u]$, nel prodotto di due fattori reali, porterebbe

ll' esistenza di un integrale sempre diverso da zero, per l' equazione $l[u] = 0$, iò che è assurdo, ogni integrale di quest' ultima, essendo contenuto nella ormula: $u = k \operatorname{sen} \lambda(x - c)$, con, k e c costanti arbitrarie.

Dalle (23), nella ipotesi che le W_i, siano complesse deduciamo: La parte eale e il coefficiente dell' immaginario i, di ognuna delle funzioni u_i, ono soluzioni della (1). Ciò, perchè le p_i son supposte reali. Fra le $2n$ unzioni costituenti le parti reali e i coefficienti dell' immaginario i, nelle (23), ntercedono quindi n relazioni lineari a coefficienti costanti.

La u_n, rappresenta l' integrale della (1), in c nullo con le sue derivate uccessive fino a quella di ordine $n - 2$ inclusa (integrale determinato a eno di un fattore costante), la sua parte reale, quindi, e il coefficiente ell' immaginario relativo, a meno di un fattore costante, coincidono.

L' ultima delle (23), pertanto, è, a meno di un fattore costante, ventualmente complesso, una funzione reale della x, e rappresenta l' inte- rale *reale* della (1), nullo in c, con le sue derivate fino a quella di ordine $- 2$ inclusa.

Rileviamo ancora, sempre nel caso generico, dalle (23):

La u_1 non è mai zero; possiamo quindi pensarla rappresentata da na funzione esponenziale del tipo:

$$u_1 = e^{\lambda_1} e^{i\xi_1} \equiv e^{\lambda_1}(\cos \xi_1 + i \operatorname{sen} \xi_1)$$

on λ_1 e ξ_1, continue in (a, b).

Un secondo integrale della (1), indipendente da u_1, è il seguente:

$$v_2 \equiv u_2 + k u_1 = e^{\lambda_1 + i\xi_1} \left\{ \int_c^x \frac{W_2 W_0}{W_1^2} dx + k \right\}$$

ove k, è costante che potremo scegliere in modo che la funzione tra arentesi graffe, riesca sempre diversa da zero in (a, b). Ne segue, che otremo rappresentare anche v_2, con una funzione esponenziale della forma i u_1, e cioè scrivere:

$$v_2 = e^{\lambda_1 + i\xi_1} e^{\bar{\lambda}_1 + i\bar{\xi}_1} = e^{\lambda_2 + i\xi_2} = e^{\lambda_2}(\cos \xi_2 + i \operatorname{sen} \xi_2).$$

E tutto un sistema fondamentale della (1), possiamo, come è chiaro, ensare rappresentato da funzioni esponenziali, del tipo:

24) $$v_i = e^{\lambda_i + i\xi_i} = e^{\lambda_i}(\cos \xi_i + i \operatorname{sen} \xi_i) \qquad (\text{per } i = 1, 2, \ldots, n)$$

ciò in analogia con quanto si trova a proposito delle equazioni a oefficienti costanti. Consegue il

Teorema. *Gli integrali della* (1) *si esprimono come prodotti di sponenziali per seni e coseni, di funzioni continue.*

E comune a tutte le equazioni lineari a coefficienti variabili o no, l carattere generalmente oscillatorio dei relativi integrali.

X.

Studio relativo all'andamento degli integrali della (1) mediante le (23).

N.° 1. Le (23) si prestano bene per lo studio relativo all'andamento degli integrali di una equazione, come la (1), in tratti parziali (α, β), di (a, b); dal quale studio, poi, potrà dedursi l'andamento dei medesimi integrali in tutto (a, b). Diamo di ciò un breve saggio, riferendoci per semplicità, a una equazione del terzo ordine.

L'equazione che prenderemo a studiare sia la seguente:

$$(25) \qquad L[u] \equiv u''' + pu' + qu = 0 \dots .$$

Alla forma (25) possiamo sempre ricondurre una equazione del terzo ordine. Il wronskiano di tre integrali indipendenti della (25) è costante. Supporremo uguale a uno il wronskiano W dei tre integrali u_1, u_2, u_3. Poniamo: $W_2 \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$. La funzione W_2, in (a, b) ha un numero finito di zeri. Possiamo pensare u_1 e u_2 mai nulli simultaneamente (ciò è sempre possibile per il lemma III).

Sia (α, β) un intervallo, contenuto in (a, b), in cui W_2 si mantiene diverso da zero, per esempio positivo. In questo intervallo, u_1 si annullerà un numero finito n di volte, per u_2, nel medesimo intervallo, avremo allora $n-1$ zeri almeno e $n+1$ al più. Chè essendo W_2 mai nullo in (α, β), u_1 e u_2 costituiscono, ivi, sistema integrale fondamentale per una equazione del secondo ordine di tipo normale, e i loro zeri, per conseguenza si separano.

Siano c_1 e c_2 due zeri consecutivi di u_1, contenuti in (α, β), e c un qualsivoglia punto interno a (c_1, c_2). Abbiamo:

$$u_1'(c_1) \neq 0 \quad \text{e} \quad u_1'(c_2) \neq 0.$$

I segni, inoltre, di questi valori assunti da u_1', in c_1 e c_2, devono essere contrari. (I punti c_1 e c_2 sono zeri consecutivi di u_1.) Per fissare le idee supponiamo:

$$u_1'(c_1) > 0, \qquad u_2'(c_2) < 0.$$

La funzione:

$$(26)_1 \qquad u_3 = u_1 \int_c^x \frac{W_2}{u_1^2}\, dx \int_c^x \frac{u_1}{W_2^2}\, dx$$

nel tratto (c_1, c_2), aperto agli estremi, rappresenta (a meno di un fattore costante) l'integrale della equazione (25) nullo con la derivata in c.

L'integrale $\int_c^x \frac{u_1}{W_2^2}\,dx$ in (c_1, c_2) è funzione monotona crescente di x nulla in c e però negativa in (c_1, c), positiva in (c, c_2). Anche la funzione $\varphi = \frac{W_2}{u_1^2}\int_c^x \frac{u_1}{W_2^2}\,dx$ definita nell'intervallo, aperto agli estremi, (c_1, c_2), nulla in c, è negativa a sinistra di c, positiva a destra; essa, poi, ha limiti determinati in c_1 e c_2, e propriamente:

$$\lim_{x\to c_1} \varphi = -\infty; \quad \lim_{x\to c_2} \varphi = +\infty.$$

Per l'integrale u_3 abbiamo inotre:

$$\lim_{x\to c_1} u_3 = \lim_{x\to c_1} u_1 \int_c^x \frac{W_2}{u_1^2}\,dx \int_c^x \frac{u_1}{W_2^2}\,dx = \lim_{x\to c_1} \frac{\int_c^x \frac{W_2}{u_1^2}\,dx \int_c^x \frac{u_1}{W_2^2}\,dx}{\frac{1}{u_1}} = -\lim_{x\to c_1} \frac{W_2 \int_c^x \frac{u_1}{W_2^2}\,dx}{u_1'}$$

$$= -\frac{W_2(c_1)}{u_1'(c_1)} \cdot \int_c^{c_1} \frac{u_1}{W_2^2}\,dx = \text{quantità finita e maggiore di zero.}$$

$$\lim_{x\to c_2} u_1 \int_c^x \frac{W_2}{u_1^2}\int_c^x \frac{u_1}{W_2^2}\,dx = -\lim_{x\to c_2} \frac{W_2 \int_c^x \frac{u_1}{W_2}\,dx}{u_1'} = -\frac{W_2(c_2)}{u_1'(c_2)} \cdot \int_c^{c_2} \frac{u_1}{W_2}\,dx = \text{quantità}$$

finita maggiore di zero.

Ogni integrale, cioè, nullo con la derivate in un punto c interno all'intervallo (c_1, c_2), non è più nullo ulteriormente in (c_1, c_2).

La $(26)_1$ ha significato anche quando si faccia c uguale a c_1 o c_2, e rappresenta sempre l'integrale della (25) nullo con la derivata in c_1 o c_2; chè la funzione $\frac{W_2}{u_1^2}\int_{c_1}^x \frac{u_1}{W_2^2}\,dx$ è finita continua e sempre positiva in $(c_1, c_2 - 0)$; si ha invero:

$$\lim_{x\to c_1} \frac{W_2}{u_1^2}\int_{c_1}^x \frac{u_1}{W_2^2}\,dx = \frac{1}{2\,W_2(c_1)\,u_1'(c_1)} > 0, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c_2} \frac{W_2}{u_1^2}\int_{c_1}^x \frac{u_1}{W_2^2}\,dx = +\infty;$$

da cui segue che la

$$\bar{u}_3 \equiv u_1 \int_{c_1}^x \frac{W_2}{u_1^2}\,dx \int_{c_1}^x \frac{u_1}{W_2^2}\,dx$$

nulla in c_1 con la derivata, ulteriormente, in (c_1, c_2), è finita continua e positiva, ecc.

Il wronskiano: $\begin{vmatrix} u_1 & \bar{u}_3 \\ u_1' & \bar{u}_3' \end{vmatrix}$ nullo con la derivata in c_1, non può ulteriormente annullarsi in (c_1, c_2), non può annullarsi in c_2, altrimenti ivi essendo $u_1(c_2) = 0$, dovrebbe aversi $\bar{u}_3(c_2) = 0$; e neanche in un punto $c_1 < c < c_2$; chè in tal caso l'integrale: $u_1 \bar{u}_3(c) - \bar{u}_3 \cdot u_1(c)$ non nullo identicamente, zero in c con la propria derivata, sarebbe ancora zero in c_1, il che non è possibile.

Potremo quindi concludere, per quanto avanti si ebbe occasione di dire facendo una prima applicazione della teoria svolta alle equazioni del terzo ordine, che ogni integrale della (25), nell'intervallo (c_1, c_2), si annulla due volte al più etc., etc.

Ora u_1, in fondo, è un integrale qualsiasi della (25): ne segue il teorema che costituisce una notevole estensione del teorema di Sturm relativo alla separazione degli zeri di due integrali indipendenti di una equazione del secondo ordine:

Fra due zeri consecutivi di un integrale di una equazione del terzo ordine, ogni altro integrale della stessa si annulla due volte al più.

N.° 2. Ulteriore studio delle equazioni del terzo ordine.

Sulle equazioni del terzo ordine faremo ancora le considerazioni seguenti: Insieme alla (25), consideriamo anche la relativa associata complementare, che nella nostra ipotesi $(p_1 \equiv 0)$, coincide con la equazione aggiunta alla (25) stessa:

$$(25)' \qquad M[v] \equiv v''' + p v' + (p' - q) v = 0.$$

Siano x_1 e x_2 due punti di (a, b) e u, e v, due funzioni qualsiansi definite in (a, b), ivi finite e continue con le derivate prime, seconde e terze.

Si ha per i primi membri della (25) e (25)', la nota identità di Lagrange:

$$(26) \qquad \int_{x_1}^{x} \{v L[u] - (-1)^3 u M[v]\} dx = [v u'' + u v'' - u' v' + p u v]_{x_1}^{x}.$$

Dalla (26), se u è integrale della (25), segue, quando vi si faccia $v \equiv u$

$$(26)' \qquad \int_{x_1}^{x_2} (p_1' - 2q) u^2 dx = [2 u u'' - u'^2 + p u^2]_{x_1}^{x_2};$$

dalla stessa (26), quando si supponga v integrale della (25)', e si faccia $u \equiv v$, si ricava:

$$(26)'' \qquad \int_{x_1}^{x_2} (p' - 2q) v^2 dx = [2 v v'' - v'^2 + p v^2]_{x_2}^{x_1}.$$

Infine, dalla $(26)'$ o $(26)''$, nell'ipotesi dell'autoaggiunzione per la (25), si deduce la notevole identità:

$$(26)''' \qquad [2uu'' - u'^2 + pu^2]_{x_1}^{x_2} \equiv 0$$

che vale per qualsivoglia integrale della (25) supposta autoaggiunta.

Dalla $(26)'$, nell'ipotesi che in (x_1, x_2), la funzione assegnata $p' - 2q$, non cambi segno, segue:

L'integrale della (25), *nullo con la derivata ad un estremo* (all'estremo sinistro o al destro secondo che in (x_1, x_2) è: $p' - 2q \geqq 0$ oppure $p' - 2q \leqq 0$), *non è più zero ulteriormente in tutto* (x_1, x_2).

Nella medesima ipotesi, dalla $(26)''$ si deduce:

L'integrale della $(25)'$ *nullo con la derivata ad un estremo* (all'estremo destro o al sinistro secondo che in (x_1, x_2) è $p' - 2q \geqq 0$, oppure $p' - 2q \leqq 0$) *non è più zero ulteriormente in tutto* (x_1, x_2).

In un intervallo come quello menzionato esistono, pertanto, per la (25): Un integrale u_1 mai nullo, e due integrali u_2 e u_3, indipendenti fra loro e da quello, a wronskiano sempre diverso da zero.

Possiamo, in conseguenza, posto $\frac{u_1'}{u_1} = \varrho$; e $\frac{\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ u_3' & u_2' \end{vmatrix}'}{\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ u_3' & u_1' \end{vmatrix}} = \bar{\varrho}$, dare alla (25) l'una o l'altra delle forme seguenti:

$$L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + \varrho \frac{d}{dx} + \{p + 2\varrho' + \varrho^2\}\right)\left(\frac{d}{dx} - \varrho\right)u = 0,$$

$$L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + \bar{\varrho}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - \bar{\varrho}\frac{d}{dx} + \{p + \bar{\varrho}' + \bar{\varrho}^2\}\right)u = 0.$$

Si può, in un certo senso, dire che la (25) si spezzi in due equazioni, l'una del secondo ordine e l'altra del primo. Un suo sistema integrale fondamentale possiamo, perciò, esprimerlo con funzioni del tipo:

$$(27) \qquad e^{\eta}, \quad e^{\lambda}\cos\xi, \quad e^{\lambda}\operatorname{sen}\xi.$$

Le (27) sono più significative delle (24), in quanto la funzione ξ è non soltanto continua, ma anche monotona crescente o decrescente, in esse cioè ξ' è sempre diversa da zero[14]). L'analogia con l'equazione del terzo ordine a coefficienti costanti è ancora più com pleta.

Ove poi la (25) si supponga autoaggiunta, dall'identità $(26)'''$ si trae:

---

[13]) Il wronskiano, si ricordi, di due integrali indipendenti della (25), è integrale della $(25)'$.

[14]) Cfr. Sopra un nuovo metodo di studio, Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 734–748.

L'integrale della (25) *nullo in un punto con la derivata, ove ulteriormente si annulli, ivi risulta zero insieme alla sua prima derivata.*

Se dunque un integrale della (25) ha uno zero doppio, doppi risulteranno i suoi eventuali ulteriori zeri. Esso integrale, pertanto, non cambia mai di segno in (a, b).

Sia $\bar{u}$ l'integrale nullo con la propria derivata nel punto $\bar{x}$ e $\bar{u}_1$ l'integrale nullo con la derivata in un punto $\bar{x}_1$, distinto dagli zeri di $\bar{u}$. Questi due integrali non hanno zeri comuni, chè altrimenti (essendo i medesimi zeri doppi per entrambi) i due integrali, a meno di un fattore costante, coinciderebbero, e però dovrebbero amendue annullarsi anche in $\bar{x}$. La loro somma dunque, o la loro differenza, risulterà dappertutto diversa da zero.

Esiste anche per la (25)′, coincidente con la (25), un integrale mai nullo in (a, b), e cioè, esistono due integrali indipendenti, per la (25), a wronskiano mai zero in tutto (a, b).

Sia u_1 l'integrale della (25), supposta autoaggiunta, nullo in x_1 con la derivata prima e avente ivi derivata seconda positiva, ad esempio, uguale a uno; u_2 un altro integrale nullo in x_1, che abbia ivi derivata prima positiva e uguale a uno.

Il determinante wronskiano $\omega \equiv \begin{vmatrix} u_2 & u_1 \\ u_2' & u_1' \end{vmatrix}$ è nullo in x_1 con ω', la sua derivata seconda, poi, in x_1 stesso, assume valore uguale a uno. Ma ω è integrale della (25)′, e però, nella nostra ipotesi, segue: $\omega = u_1$.

Gli zeri di ω sono, dunque, tutti e soli quelli di u_1, e tutti doppi.

Si deduce: *gli zeri di* u_1 *sono anche zeri di ogni altro integrale* u_2, *indipendente da* u_1 *e che ha con* u_1 *stesso uno zero a comune.*

Siano x_1 e x_2 due zeri consecutivi di u_1. Nell'intervallo $(x_1 + \varepsilon,\ x_2 - \varepsilon)$, con ε positivo e comunque piccolo, u_1 e $\begin{vmatrix} u_2 & u_1 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$ si mantengono sempre positivi.

Vale ivi, pertanto, l'identità (cfr. la (9)):

$$L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} - D \lg \frac{1}{W_2}\right)\left(\frac{d}{dx} - D \lg \frac{W_2}{u_1'}\right)\left(\frac{d}{dx} - D \lg \frac{u_1}{1}\right) u.$$

Potremo scrivere allora, la nostra equazione nella forma notevole seguente:

$$L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + D \lg u_1\right)\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dx} - D \lg u_1\right) u = 0. \tag{28}$$

Pertanto: *L'integrazione della* (25) *viene ricondotta a due quadrature, quando di essa equazione si conosca l'integrale nullo in un punto con la derivata.*

Si ha ancora, a causa della particolare forma (28) data alla (25): *gni integrale della stessa* (25), *nell'interno di due zeri consecutivi i* u_1, *si annulla due volte al più*; e si dimostra: *che un integrale nullo n* x_1, *si annulla in* x_2 *e ulteriormente una e una sola volta nell'interno i* (x_1, x_2).[15])

N.° 3. Breve studio dell'equazione del quarto ordine autoaggiunta.

Relativamente alla equazione del quarto ordine autoaggiunta,

20) $$\Delta[u] \equiv u^{IV} + (pu')' + qu = 0$$

aremo le ulteriori seguenti considerazioni.

Sia ϱ un integrale della (22) VIII, che supporemo non nullo nel tratto $x_1, x_2)$ di (a, b). Esso rappresenta il wronskiano di due integrali della (20); equazione del secondo ordine che ha come sistema integrale fondamentale uesti due integrali, avrà la forma seguente:

29) $$u'' - \frac{\varrho'}{\varrho} u' + \chi u = 0$$

ella quale il coefficiente χ è incognito.

Per la determinazione della funzione χ, che certamente esiste, osseriamo che il primo membro della (20) quando χ fosse nota, si decompone azionalmente nel prodotto di due fattori simbolici del secondo ordine eali, si ha propriamente una identità del tipo:

30) $$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda \frac{d}{dx} + \mu\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\varrho'}{\varrho}\frac{d}{dx} + \chi\right) u = \Delta[u].$$

Sviluppando il primo membro della (30), e identificando, nei due iebri, i coefficienti delle stesse derivate, ricaviamo:

$$\lambda = \frac{\varrho'}{\varrho}; \qquad -2\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)' - \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 + \mu + \chi = p;$$

30)' $$-\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)'' - \frac{\varrho'}{\varrho}\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)' + 2\chi' + \frac{\varrho'}{\varrho}\chi - \frac{\varrho'}{\varrho}\mu = p'; \qquad \chi'' + \frac{\varrho'}{\varrho}\chi' + \mu\chi = q.$$

Derivando il primo membro della seconda delle (30)' e identificandolo ol primo membro della terza, si trova:

$$(\mu - \chi)' + \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)(\mu - \chi) = \frac{1}{\varrho}\left\{\varrho\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)'\right\}'$$

a cui:

$$\mu - \chi = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)' + \frac{c}{\varrho}$$

[15]) Per un particolare studio sulle equazioni del 3° ordine v. Atti dell'Istituto ombardo et Nota di G. Mammana 1930.

dove c, è una costante opportuna determinabile poi mediante la quarta delle $(30)'$.

Da quest'ultima relazione e dalla seconda delle $(30)'$ ricaveremo μ e χ.

Osserviamo ancora: Posto che u_1, u_2, u_3, u_4, rappresentino quattro integrali indipendenti della (22), e sia, ad esempio, $\varrho = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$.

Dall'identità:

$$(31) \qquad l[u] = \frac{du^2}{dx^2} - \frac{\varrho'}{\varrho}\frac{du}{dx} + \chi u = \frac{1}{\varrho}\begin{vmatrix} u'' & u_1'' & u_2'' \\ u' & u_1' & u_2' \\ u & u_1 & u_2 \end{vmatrix}$$

segue che le due funzioni:

$$l[u_3] \equiv \frac{1}{\varrho}\begin{vmatrix} u_3'' & u_1'' & u_2'' \\ u_3' & u_1' & u_2' \\ u_3 & u_1 & u_2 \end{vmatrix}; \qquad l[u_4] \equiv \frac{1}{\varrho}\begin{vmatrix} u_4'' & u_1'' & u_2'' \\ u_4' & u_1' & u_2' \\ u_4 & u_1 & u_2 \end{vmatrix}$$

sono integrali indipendenti della equazione del secondo ordine:

$$(31)' \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda\frac{du}{dx} + \mu u = 0.$$

Ma per essere la (22) autoaggiunta, i due wronskiani del terzo ordine sopra scritti, sono soluzioni indipendenti della (22) stessa, e, in generale, tali da costituire con i primi due, sistema fondamentale [16]).

Si concluderà:

Quando della (22) *si conosca un integrale* ϱ, *la* (20) *si spezza nelle due equazioni del secondo ordine* (29) *e* $(31)'$.

Un suo sistema integrale fondamentale in ogni tratto in cui ϱ è diverso da zero, è rappresentabile con funzioni del tipo:

$$e^{\eta}\cos\xi, \quad e^{\eta}\operatorname{sen}\xi, \quad e^{\psi}\cos\varphi, \quad e^{\psi}\operatorname{sen}\varphi$$

dove ξ e φ, sono continue e monotone (a derivata mai zero) e η e ψ continue.

Sia w_1 un integrale della (20) non nullo nel tratto (a_1, c_1) di (a, b) e, per esso, supponiamo si abbia in a_1:

$$w_1(a_1) = 1, \qquad w_1'(a_1) = k_1, \qquad w''(a_1) = k_2, \qquad w'''(a_1) = k_3.$$

---

[16]) Può accadere (qui tralasciamo di dimostrarlo per non dilungarci troppo, che i due menzionati wronskiani riescano ciascuno combinazione lineare a coefficienti costanti di u_1 e u_2, quando u_1 e u_2 sono scelti in modo particolare, nel qual caso la trasformata della $(31)'$, ottenuta mediante la sostituzione $u = \varrho v$ deve coincidere con la (29).

All'integrale w_1, associamo gli altri due: v_2 e v_3 determinati dalle seguenti condizioni iniziali:

$$v_2(a_1)=0;\quad v_2'(a_1)=1;\quad v_2''(a_1)=0;\quad v_2'''(a_1)=-k_2-p(a_1);$$
$$v_3(a_1)=0;\quad v_3'(a_1)=0;\quad v_3''(a_1)=1;\quad v_3'''(a_1)=k_1.$$

Pel wronskiano dei tre integrali indipendenti w_1, v_2, v_3,

$$W_3=\begin{vmatrix} w_1 & v_2 & v_3 \\ w_1' & v_2' & v_3' \\ w_1'' & v_2'' & v_3'' \end{vmatrix}$$

abbiamo:

$$W_3(a_1)=1;\quad W_3'(a_1)=k_1;\quad W_3''(a_1)=k_2;\quad W_3'''(a_1)=k_3.$$

Ma W_3 è soluzione della (20), segue:

(32) $$W_3\equiv w\equiv W_1.$$

Designamo con W_2 il wronskiano del secondo ordine di W_1 e v_2.

Nell'estremo a, W_2 è positivo, tale si manterrà quindi in un intorno (a_1, c_2) a destra di a. Nel tratto (a_1, c) comune agli intervalli (a_1, c_1) e (a_1, c_2), per la (9) — lemma II.° — si ha:

$$A[u]\equiv\left(\frac{d}{dx}-D\lg\frac{1}{W_3}\right)\left(\frac{d}{dx}-D\lg\frac{W_3}{W_2}\right)\left(\frac{d}{dx}-D\lg\frac{W_2}{W_1}\right)\left(\frac{d}{dx}-D\lg W_1\right)u$$

da cui, per la (32), e ove si ponga per semplicità $\varphi=\frac{W_1'}{W_1}$; $\psi=\left(\frac{W_1}{W_2}\right)':\left(\frac{W_1}{W_2}\right)$, segue l'elegante identità:

(33) $$A[u]=\left(\frac{d}{dx}+\varphi\right)\left(\frac{d}{dx}-\psi\right)\left(\frac{d}{dx}+\psi\right)\left(\frac{d}{dx}-\varphi\right)u.$$

Nel caso che in (a_1, c_1), W_2 si annulli, osserviamo che, dall'essere in (a_1, c_1), $W_3\neq 0$, si deduce: I due wronskiani $|w_1\, v_2|$; $|w_1\, v_3|$ orlati di W_1 nel determinante W_3, sono a wronskiano mai nullo in (a_1, c_1), i loro zeri, quindi, ivi si separano; conseguentemente riuscirà sempre diverso da zero il wronskiano complesso:

$$|w_1\, v_2|+i\,|w_1\, v_3|=|w_1\, v_2+i\, v_3|\equiv\overline{W}_2.$$

Posto, dunque, ancora: $\varphi=\frac{W_1'}{W_1}$, e $\overline{\psi}=\left(\frac{W_1}{W_2}\right)':\left(\frac{W_1}{W_2}\right)$, avremo come prima in tutto (a, c_1):

(33)′ $$A[u]=\left(\frac{d}{dx}+\varphi\right)\left(\frac{d}{dx}-\overline{\psi}\right)\left(\frac{d}{dx}+\overline{\psi}\right)\left(\frac{d}{dx}-\varphi\right)u$$

dove però ψ è complessa.

Eseguendo il prodotto dei due fattori medi, otteniamo l'altra identità:

(34) $$A[u]=\left(\frac{d}{dx}+\varphi\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}+\{\overline{\psi}'-\overline{\psi}^2\}\right)\left(\frac{d}{dx}-\varphi\right)u$$

nella quale la funzione $\overline{\varphi}' - \overline{\varphi}^2$, è reale, poichè φ è reale, e reale è l'espressione in u prodotto degli ultimi tre fattori della $(33)'$.[17])

La funzione $\overline{\varphi}' - \overline{\varphi}^2$, inoltre, si esprime razionalmente per p e φ, si ottiene propriamente (sviluppando il secondo mebro della (34) e identificando con $A[u]$):

$$\overline{\varphi}' - \overline{\varphi}^2 = p + 3\varphi' + \varphi^2.$$

Concludendo potremo enunciare il:

Teorema. *L'integrazione di una equazione del quarto ordine autoaggiunta, di cui si conosca un integrale, si riconduce razionalmente all'integrazazione di una equazione del secondo ordine e a due quadrature.*

Se il fattore di secondo ordine che figura nella (34), è ulteriormente decomponibile nel prodotto simbolico di due fattori del primo ordine reali (la qual cosa accade certamente quando la funzione $\overline{\varphi}' - \overline{\varphi}^2 \equiv p + 3\varphi' + \varphi^2$, si mantiene in tutto il tratto considerato negativa[18])), ogni integrale della (20) si annulla ivi tre volte al più. Manca in questa ipotesi, si potrebbe dire, alla soluzione della (20) il carattere oscillatorio.

I coefficienti della (20) dipendano da un parametro λ. *Se al tendere di questo parametro verso un suo punto limite λ si verifica che un integrale della* (20) *in un tratto di* (a, b) *varia, in maniera che il massimo della funzione* $p + 3\varphi' + \varphi^2$, *con esso integrale costruita, cresca oltre ogni limite positivamente, allora si potrà concludere che sussiste, per la* (20) *stessa, un teorema di oscillazione.*

Ciò consegue dal fatto che nel menzionato intervallo (che poi potrà anche essere piccolissimo) vale la (34), nella quale il *fattore del secondo ordine* non ulteriormente decomponibile ha carattere oscillatorio[19]), il numero, cioè, degli zeri dei suoi integrali cresce indefinitamente al tenderedi λ, verso λ_0.

Se la (22) è del tipo considerato da Davidoglou[20]), della forma cioè:

$$(35) \qquad (\theta u'')'' = q u$$

con θ e q positive in tutto (a, b), esiste per essa un integrale non nullo e positivo con le sue derivate prima e seconda in tutto (a, b). Vale dunque, pel suo primo membro, la (34) *in tutto* (a, b).

---

[17]) Il prodotto di questi tre fatteri eguagliato a zero ci dà l'equazione di cui W_1, v_2 e v_3, costituiscono sistema fondamentale di integrali, dei quali inoltre W_1 non è mai zero. L'asserto è quindi, conseguenza del lemma primo II. N.° 1.

[18]) In questa ipotesi, invero, esiste per l'equazione del secondo ordine $z'' + \{\overline{\varphi}' - \overline{\varphi}^2\} z = 0$, un integrale sempre diverso da zero.

[19]) Cfr. Mauro Picone, Equazioni differenziali, Fascicolo primo, Circolo Matematico di Catania, 1923.

[20]) Etude de l'équation differentielle $(ou'')'' = k\varphi u$, Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Paris 22 (1905).

Sia W_1, l'integrale della (35), in a uguale a uno e che ivi ha nulle le sue derivate prima, seconda e terza; esso non può ulteriormente annullarsi, e infatti:

Deduciamo dalla (35), intanto, che in a, W_1 è crescente, la sua quarta derivata ivi essendo positiva. Ora, se esso in un punto $c > a$ si annullasse, essendo c il primo fra gli zeri di u, ne seguirebbe l'esistenza di uno zero c_1 almeno, per W_1', interno all'intervallo (a, c), e però uno zero c_2 per W_1'', fra (a, c_1) o, ciò che fa lo stesso, uno zero per $(\theta u'')$ contenuto nell'interno di (a, c_1). La funzione $\theta u''$ nulla in a si annulla ulteriormente in c_2, ne segue l'esistenza di un punto di zero c_3, per la derivata $(\theta u'')'$, interno a (a, c_2), e quindi uno zero c_4, interno a (a, c_3), per la funzione $(\theta u'')''$, ciò che, per la (35), è assurdo.

(Eingegangen am 22. Februar 1930.)

Affine Differentialgeometrie der parabolischen Strahlensysteme.

Von

Wolfgang Haack in Danzig-Langfuhr.

Die vorliegende Arbeit soll die Aufgabe haben, die parabolischen Strahlensysteme zu untersuchen hinsichtlich ihrer affinen Invarianten. Die Systemstrahlen eines parabolischen Systems sind bekanntlich die Tangenten an die eine Schar der Asymptotenlinien der Brennfläche, d. h. sie bilden das eine System der Haupttangenten der Fläche. Nun besitzt aber jede Fläche, die keine Torse (Torse = abwickelbare Fläche) ist, noch ein zweites Haupttangentensystem, welches dem ersten adjungiert heiße. Es liegt nahe, nicht ein einzelnes parabolisches System, sondern ein Paar adjungierter parabolischer Strahlensysteme zu untersuchen. Diese Aufgabe bedeutet aber nichts anderes als die affine Differentialgeometrie einer Fläche, die durch ihre beiden Haupttangentensysteme aufgespannt wird. Der liniengeometrische Aufbau der affinen Flächentheorie führt auch zu neuen geometrischen Ergebnissen: Wie in der Differentialgeometrie der allgemeinen Strahlensysteme[1]), so wird auch hier die Gesamtheit der Flächen zweiter Ordnung betrachtet, die durch je drei konsekutive Systemstrahlen jedes der beiden adjungierten Systeme gelegt werden können. Es zeigt sich, daß die Mittelpunkte dieser ∞^2 Flächen zweiter Ordnung auf den Mänteln eines Paares quadratischer Kegel liegen, die die Umgebung dritter Ordnung eines Flächenpunktes bis auf allgemeine affine Transformationen bestimmen. Die Apolarität der Darbouxtangenten zu den Haupttangenten eines Flächenpunktes, die bisher nur formal belegt wurde, folgt jetzt anschaulich aus der Konfiguration der beiden Kegel. Drei Invarianten $\mathfrak{B}$, Q, $\bar{Q}$ bestimmen die Umgebung dritter Ordnung der beiden parabolischen Systeme bzw. die Umgebung vierter Ord-

[1]) Monatshefte f. Mathematik und Physik **36** (1929); im folgenden zitiert als Strahl.-Syst. I bzw. II.

nung der Brennfläche. Auch die geometrische Deutung dieser Invarianten findet man in der Konfiguration des Kegelpaares.

Für die Anregung zu dieser Arbeit sei an dieser Stelle Herrn W. Blaschke und Herrn G. Thomsen herzlicher Dank ausgesprochen.

§ 1.

Algebraische Einleitung.

Sind x_i; y_i mit $(i = 1, 2, 3, 4)$ die homogenen Koordinaten zweier Punkte, so heißen

$$p_{ik} = \sigma(x_i y_k - y_i x_k) \tag{1}$$

die Plückerschen Linienkoordinaten ihrer Verbindungsgeraden. Dabei ist σ ein beliebiger (reeller) Proportionalitätsfaktor. Die p_{ik} ändern sich nur um einen gemeinsamen Faktor, wenn sich die Punkte x_i; y_i auf ihrer Verbindungsgeraden bewegen.

Ebenso seien u^i; v^i die homogenen Koordinaten zweier Ebenen; dann sind

$$p^{ik} = \mu(u^i v^k - u^k v^i) \tag{2}$$

die Plückerschen Koordinaten ihrer Schnittgeraden. Bei projektiven Transformationen des Raumes transformieren sich die x_i kogredient, die u^i kontragredient. Auch die p_{ik} (bzw. p^{ik}) transformieren sich linear homogen, und zwar die p_{ik} ko-, die p^{ik} kontragredient. Es sind die x_i die Komponenten eines kovarianten *Vierervektors* $\boldsymbol{x}$, die u^i diejenigen eines kontravarianten Vierervektors $\boldsymbol{U}$. Ein und dieselbe Gerade läßt sich sowohl als Verbindungsgerade zweier Punkte, d. h. kovariant (1), als auch als Schnitt zweier Ebenen, d. h. kontravariant (2), darstellen. Die p_{ik} sind daher die kovarianten, die p^{ik} die kontravarianten Komponenten eines und desselben *Sechservektors* $\mathfrak{p}$.

Wegen (1) und (2) sind die p_{ik} die Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_2 & y_4 \end{matrix} \right\|,$$

die p^{ik} diejenigen der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} u^1 & u^2 & u^3 & u^4 \\ v^1 & v^2 & v^3 & v^4 \end{matrix} \right\|.$$

Wir schreiben dann vektoriell

$$\mathfrak{p} = \sigma \| \boldsymbol{x}; \boldsymbol{y} \| = \mu \| \boldsymbol{U}; \boldsymbol{V} \|. \tag{3}$$

Die Linienkoordinaten p_{ik} bzw. p^{ik} genügen der Plückerschen Identität

$$(4) \qquad \begin{aligned} & p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0 \\ \text{bzw.} \quad & p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23} = 0\,. \end{aligned}$$

Zwischen den ko- und kontravarianten Linienkoordinaten besteht die Proportion:

$$(5) \qquad p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23} = p^{34} : p^{42} : p^{23} : p^{12} : p^{13} : p^{14}\,.$$

Eine lineare Gleichung zwischen den Linienkoordinaten definiert einen linearen Komplex:

$$(6) \qquad a^{12}p_{12} + a^{13}p_{13} + a^{14}p_{14} + a^{34}p_{34} + a^{42}p_{42} + a^{23}p_{23} = 0\,;$$

dabei sind a^{12}, a^{13}, a^{14}, a^{34}, a^{42}, a^{23} beliebige reelle, nicht sämtlich verschwindende Koeffizienten, die sich bei homogenen linearen Transformationen ebenso transformieren wie die p^{ik}, d. h. wie die kontravarianten Linienkoordinaten. Wir wollen die sechs Größen $a^{12}, a^{13}, \ldots$ in dem Tensor a^{ik} zusammenfassen, der infolge der Transformationseigenschaft schiefsymmetrisch ist ebenso wie p^{ik}, d. h. es gilt $a^{ik} = -a^{ki}$. Die a^{ik} heißen die kontravarianten Koordinaten des Komplexes (6); denselben linearen Komplex kann man durch eine lineare Gleichung in den kontravarianten Linienkoordinaten darstellen:

$$(7) \qquad a_{12}\,p^{12} + a_{13}\,p^{13} + a_{14}\,p^{14} + a_{34}\,p^{34} + a_{42}\,p^{42} + a_{23}\,p^{23} = 0\,.$$

Dann heißen die $a_{12}, a_{13}, \ldots$ die kovarianten Komplexkoordinaten; sie ergeben sich als Komponenten des kovarianten schiefsymmetrischen Tensors a_{ik} (also $a_{ik} = -a_{ki}$). Zwischen den ko- und kontravarianten Komplexkoordinaten besteht wieder die Proportion:

$$(8) \qquad a_{12} : a_{13} : a_{14} : a_{34} : a_{42} : a_{23} = a^{34} : a^{42} : a^{23} : a^{12} : a^{13} : a^{14}.$$

Man kann daher auch hier die Vektorschreibweise einführen und den linearen Komplex (6) bzw. (7) durch den Sechservektor $\mathfrak{a}$ darstellen, dessen kovariante Komponenten a_{ik}, dessen kontravariante Komponenten a^{ik} sind [2]).

Die sechs Komponenten eines beliebigen schiefsymmetrischen Tensors a_{ik} bzw. a^{ik}, die in dem Sechservektor $\mathfrak{a}$ zusammengefaßt sind, stellen also stets einen linearen Komplex dar. Ein solcher ist ein spezieller Komplex, d. h. besteht aus allen Geraden, die eine feste Gerade schneiden, wenn die a_{ik} bzw. a^{ik} die Gleichung (4) erfüllen. Dann sind aber die a_{ik} bzw. a^{ik} nichts anderes als die Koordinaten jener festen Geraden.

---

[2]) Im folgenden nehmen wir die Normierung stets so, daß gilt:

$$a_{12} = a^{34};\ a_{13} = a^{42}, \ldots, a_{23} = a^{14}.$$

Die Gleichungen (4), (6) und (7) können in der Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{2} p_{ik} p^{ik} = 0, \tag{4a}$$

$$\frac{1}{2} a_{ik} p^{ik} = \frac{1}{2} a^{ik} p_{ik} = 0; \tag{6a}$$

dabei ist über die Indizes i, k zu summieren. Über kleine lateinische Indizes, die in einem Ausdruck einmal oben und einmal unten auftreten, soll in diesem Paragraphen stets summiert werden.

Die Gleichungen (4a) und (6a) dienen zur Definition des Skalarprodukts zweier Sechservektoren. Wir nennen

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = \frac{1}{2} a_{ik} b^{ik} = \frac{1}{2} a^{ik} b_{ik} \tag{9}$$

das Skalarprodukt der beiden Sechservektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und bezeichnen es dadurch, daß wir die beiden Vektoren in Klammern zusammenschreiben. Die Komponenten einer Geraden $\mathfrak{p}$ genügen der Gleichung (4a), die vektoriell geschrieben die Gestalt hat:

$$(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}) = 0. \tag{10}$$

Wir führen hier die später oft verwendeten Sätze an:

I. Zwei Gerade $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ schneiden sich dann und nur dann, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}) = 0. \tag{11}$$

II. Eine Gerade $\mathfrak{p}$ gehört dem Komplexe $\mathfrak{a}$ an dann und nur dann, wenn das Skalarprodukt $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p})$ verschwindet:

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}) = 0. \tag{12}$$

Aus der Definitionsgleichung des Skalarproduktes ersieht man die Gültigkeit des kommutativen und distributiven Gesetzes:

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}), \tag{13}$$

$$((\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\,\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}). \tag{14}$$

Aus sechs Vektoren, die linear unabhängig sind, $\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{II}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{III}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{IV}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{V}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{VI}}$, deren Determinante $|\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{IV}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{V}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{VI}}|$ also nicht verschwindet, läßt sich jeder weitere Vektor linear kombinieren. Es läßt sich z. B. ein Vektor $\mathfrak{s}$ darstellen durch

$$\mathfrak{s} = \alpha_{\mathrm{I}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{I}} + \alpha_{\mathrm{II}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{II}} + \alpha_{\mathrm{III}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{III}} + \alpha_{\mathrm{IV}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{IV}} + \alpha_{\mathrm{V}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{V}} + \alpha_{\mathrm{VI}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{VI}}, \tag{15}$$

wo die $\alpha_{\mathrm{I}}, \alpha_{\mathrm{II}}, \ldots$ bestimmte Zahlen sind. Im folgenden wird nur der Fall auftreten, daß die sechs Vektoren $\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{II}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{III}}, \ldots$ sämtlich gerade Linien

sind, die die Kanten eines Tetraeders ausmachen. Dann gelten die Gleichungen

$$(16) \quad (\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}) = (\mathfrak{a}^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{II}}) = (\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}) = (\mathfrak{a}^{\mathrm{IV}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{IV}}) = (\mathfrak{a}^{\mathrm{V}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{V}}) = (\mathfrak{a}^{\mathrm{VI}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{VI}}) = 0\,.$$

Ferner schneidet jede Kante des Tetraeders alle übrigen außer einer. Trifft man die Anordnung etwa wie in nebenstehender Skizze (Fig. 1), so verschwinden alle Skalarprodukte zwischen den $\mathfrak{a}$ mit Ausnahme der drei folgenden:

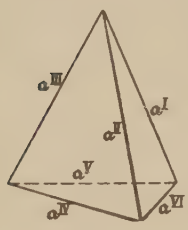

Fig. 1.

$$(\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{IV}});\ (\mathfrak{a}^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{V}});\ (\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{VI}}).$$

Die Koeffizienten $\alpha_{\mathrm{I}}, \alpha_{\mathrm{II}}, \alpha_{\mathrm{III}}, \ldots$ der Linearkombination eines Vektors $\mathfrak{s}$ (15) lassen sich dann leicht bestimmen: Man multipliziert die Gleichung (15) nacheinander skalar mit $\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{II}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{III}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{IV}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{V}}, \mathfrak{a}^{\mathrm{VI}}$; daraus folgen die sechs einfachen Gleichungen, deren jede nur einen der zu bestimmenden Koeffizienten enthält:

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}\ \mathfrak{s}) = \alpha_{\mathrm{IV}}(\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}\ \mathfrak{a}^{\mathrm{IV}})\,; \qquad (\mathfrak{a}^{\mathrm{IV}}\,\mathfrak{s}) = \alpha_{\mathrm{I}}\ (\mathfrak{a}^{\mathrm{IV}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{I}}\ )\,;\\
(17)\qquad &(\mathfrak{a}^{\mathrm{II}}\,\mathfrak{s}) = \alpha_{\mathrm{V}}\ (\mathfrak{a}^{\mathrm{II}}\ \mathfrak{a}^{\mathrm{V}}\ )\,; \qquad (\mathfrak{a}^{\mathrm{V}}\ \mathfrak{s}) = \alpha_{\mathrm{II}}\ (\mathfrak{a}^{\mathrm{V}}\ \mathfrak{a}^{\mathrm{II}}\ )\,;\\
&(\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}\mathfrak{s}) = \alpha_{\mathrm{VI}}(\mathfrak{a}^{\mathrm{III}}\mathfrak{a}^{\mathrm{VI}})\,; \qquad (\mathfrak{a}^{\mathrm{VI}}\,\mathfrak{s}) = \alpha_{\mathrm{III}}(\mathfrak{a}^{\mathrm{VI}}\,\mathfrak{a}^{\mathrm{III}})\,.
\end{aligned}$$

Nach diesen einleitenden Bemerkungen über den projektiven Raum steigen wir ab zum affinen Raum. Im projektiven Raum zeichnen wir eine Ebene — die uneigentliche Ebene — aus. Ihre Koordinaten seien w^1, w^2, w^3, w^4; sie sind die Komponenten eines kontravarianten Tensors erster Stufe w^i, die wir in dem Vierervektor $\boldsymbol{W}$ zusammenfassen. Ein Punkt x mit den Koordinaten x_i liegt in der Ebene $\boldsymbol{W}$ dann und nur dann, wenn $w^i x_i = 0$ ist; diese Gleichung schreibt sich vektoriell

$$(18) \qquad \boldsymbol{W}x = 0\,.$$

Es sei eine Gerade $\mathfrak{p}$ gegeben, d. h. der Tensor p_{ik} bzw. p^{ik} sei bekannt. Dann heißt

$$(19) \qquad \boldsymbol{W}\mathfrak{p} = w^i p_{ik}$$

die Überschiebung von $\mathfrak{p}$ mit $\boldsymbol{W}$ oder auch eine *Kette*. Für die abgekürzte Schreibweise einer Kette wird verlangt, daß die Summationsindizes aufeinanderfolgen; z. B. bedeutet $\mathfrak{p}\boldsymbol{W} = p_{ki}w^i$, wo über den nach w^i zu stehenden Index (i) von p_{ki} zu summieren ist. Wegen $p_{ik} = -p_{ki}$ erhält man die Beziehung

$$(20) \qquad \boldsymbol{W}\mathfrak{p} = -\mathfrak{p}\boldsymbol{W}.$$

Die Linienkoordinaten p_{ik} bilden einen kovarianten Tensor zweiter Stufe; w^i ist ein kontravarianter Tensor erster Stufe. Durch die Überschiebung $w^i p_{ik}$ entsteht ein kovarianter Tensor erster Stufe, den wir in einen Vierervektor

(fetter lateinischer Buchstabe) zusammenfassen. Es wird also

$$(21) \qquad \boldsymbol{W}\mathfrak{p} = w^i p_{ik} = x_k = \boldsymbol{x},$$

wo der Vierervektor $\boldsymbol{x}$ mit den Komponenten x_k einen Punkt darstellt. Dieser ist der Schnittpunkt von $\mathfrak{p}$ mit $\boldsymbol{W}$. Für den Fall, daß $\mathfrak{p}$ in der Ebene $\boldsymbol{W}$ liegt, wird der Schnittpunkt $\boldsymbol{W}\mathfrak{p} = \boldsymbol{x}$ unbestimmt, d. h. die Komponenten x_k von $\boldsymbol{x}$ verschwinden sämtlich.

Hat man einen linearen Komplex $\mathfrak{a}$, der durch einen Tensor zweiter Stufe a^{ik} bzw. a_{ik} gegeben ist, so bildet man entsprechend die Kette

$$(22) \qquad \boldsymbol{W}\mathfrak{a} = w^i a_{ik} = -a_{ki} w^i = -\mathfrak{a}\boldsymbol{W} = y_k = \boldsymbol{y}.$$

Dann ist $\boldsymbol{y}$ der Pol[3]) der Ebene $\boldsymbol{W}$ in bezug auf den Komplex $\mathfrak{a}$.

Wir haben festgestellt, daß der Punkt $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}$ bzw. $\boldsymbol{W}\mathfrak{a}$ in der Ebene $\boldsymbol{W}$ liegt. Daraus folgt wegen Gleichung (18), daß

$$(24) \qquad \boldsymbol{W}\boldsymbol{x} = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} = 0$$

sind. Setzt man hier für $\boldsymbol{x}$ bzw. $\boldsymbol{y}$ die Ketten ein, so erhält man

$$(25) \qquad \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\boldsymbol{W} = w^i p_{ik} w^k = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{W}\mathfrak{a}\boldsymbol{W} = w^i a_{ik} w^k = 0.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen stellen eine zweifache Überschiebung eines Tensors zweiter Stufe mit w^i dar. In ihnen wird über alle auftretenden Indizes summiert. Wir wollen Ketten, in denen über alle auftretenden Indizes summiert wird, *geschlossene* Ketten nennen.

Aus dem Bisherigen geht hervor, daß man durch Überschiebung von Sechservektoren mit $\boldsymbol{W}$ zu Punkten gelangt. Wir wollen die Betrachtungen fortsetzen und annehmen, es sei ein Punkt $\boldsymbol{x}$ durch seine kovarianten Komponenten x_k gegeben, dann kann x_k mit einem Sechservektor $\mathfrak{q}$ überschoben werden, und zwar sind dabei die kontravarianten Komponenten q^{kl} von $\mathfrak{q}$ zu nehmen. Man erhält

$$(26) \qquad x_k q^{kl} = u^l$$

und erkennt, daß man auch hier zu Ketten gelangt, die wir abgekürzt durch

$$(27) \qquad x_k q^{kl} = +\boldsymbol{x}\mathfrak{q} = -q^{lk} x_k = -\mathfrak{q}\boldsymbol{x} = u^i = \boldsymbol{U}$$

bezeichnen; dabei werden die Umformungen ebenso erklärt wie in den mit $\boldsymbol{W}$ gebildeten Ketten. Die Kette $x_k q^{ki} = u^l = \boldsymbol{U}$ stellt einen kontravarianten Vierervektor dar, der eine mit $\boldsymbol{x}$ und $\mathfrak{q}$ invariant verbundene Ebene angibt. Diese ist die Polarebene des Punktes $\boldsymbol{x}$ in bezug auf den Komplex $\mathfrak{q}$, oder wenn $\mathfrak{q}$ eine Gerade ist, die durch $\boldsymbol{x}$ und die Gerade $\mathfrak{q}$ gehende Ebene.

---

[3]) Ein linearer Komplex wird von einer Ebene in einem Strahlenbüschel geschnitten, dessen Träger der Pol der Ebene in bezug auf den linearen Komplex heißt.

Jetzt können die beiden Arten von Überschiebungen zusammengesetzt werden. Wir setzen für x_k die in (21) gegebene Kette ein und erhalten

$$U = u^l = w^i p_{ik} q^{kl} = W\mathfrak{p}\mathfrak{q}; \tag{28}$$

das ist eine Kette mit zwei Sechservektoren. Die Ketten mit mehreren Sechservektoren wollen wir stets so stellen, daß sie entweder mit W anfangen oder mit W aufhören; und die Indizes sollen stets so stehen, daß die Summationsindizes (je einer oben und einer unten) aufeinanderfolgen. Man hat wegen $p_{ki} = -p_{ik}$:

$$w^i p_{ki} q^{kl} = -w^i p_{ik} q^{kl} = -W\mathfrak{p}\mathfrak{q}. \tag{29}$$

Es gilt folgende Umformung: Nach (20) war $x = x_k = -p_{ki} w^i = -\mathfrak{p}W$, nach (27) $U = -\mathfrak{q}x$; man findet also durch Einsetzen

$$U = +\mathfrak{q}\mathfrak{p}W = +W\mathfrak{p}\mathfrak{q}. \tag{30}$$

Eine Kette mit zwei Sechservektoren kann von links nach rechts und von rechts nach links geschrieben werden, ohne ihren Wert zu ändern; dagegen ist die Reihenfolge der Sechservektoren wesentlich und nicht vertauschbar. Die Kette $U = \mathfrak{q}\mathfrak{p}W$ soll also heißen: $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}W)$, d. h. man bilde zuerst $\mathfrak{p}W$ und dann $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}W)$; und analog: $U = W\mathfrak{p}\mathfrak{q} = (W\mathfrak{p})\mathfrak{q}$. Eine Kette, die aus W und zwei Sechservektoren gebildet ist, stellt stets einen kontravarianten Vierervektor dar. Es war $W\mathfrak{p}$ der Schnittpunkt von W mit $\mathfrak{p}$; daher ist $W\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ die Ebene, die durch $\mathfrak{q}$ und jenen Schnittpunkt geht, wenn wir annehmen, daß $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gerade Linien sind. Wird W als unendlich ferne Ebene betrachtet, so ist also $W\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ die Ebene, die durch $\mathfrak{q}$ geht und parallel zu $\mathfrak{p}$ ist [4]). Sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ lineare Komplexe, so gibt $W\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ die Polarebene des Punktes $W\mathfrak{p}$ in bezug auf den Komplex $\mathfrak{q}$.

Die Ketten können beliebig verlängert werden. Es ist evident, was unter einer Kette $W\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ zu verstehen ist; nämlich:

$$W\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r} = w^i p_{ik} q^{kl} r_{ls} = x_s = x \tag{32}$$

definiert einen Punkt, den Schrittpunkt der Ebene $W\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ mit der Geraden $\mathfrak{r}$ bzw. den Pol jener Ebene bezüglich des Komplexes $\mathfrak{r}$. Man hat auch hier die Umformungen:

$$W\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r} = (w^i p_{ik} q^{kl}) r_{ls} = -r_{sl}(q^{lk} p_{ki} w^i) = -\mathfrak{r}\mathfrak{q}\mathfrak{p}W.$$

---

[4]) Es sei hier ein Sonderfall angeführt, der später Verwendung finden wird: Ist eine Gerade $\mathfrak{p}$ gegeben, so ist $W\mathfrak{p}\mathfrak{p} = 0$, denn die Ebene durch W $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ ist unbestimmt. In der Tat ist nach der unten folgenden Gl. (34): $W\mathfrak{p}\mathfrak{p} = -W\mathfrak{p}\mathfrak{p} - (\mathfrak{p}\mathfrak{p})W$. Da $\mathfrak{p}$ eine Gerade ist, also $(\mathfrak{p}\mathfrak{p}) = 0$, ist $W\mathfrak{p}\mathfrak{p} = -W\mathfrak{p}\mathfrak{p} = 0$. Ist dagegen $\mathfrak{p}$ ein nicht ausgearteter Komplex, also $(\mathfrak{p}\mathfrak{p}) \neq 0$, dann wird $W\mathfrak{p}\mathfrak{p} = -W\mathfrak{p}\mathfrak{p} - (\mathfrak{p}\mathfrak{p})W$ oder $W\mathfrak{p}\mathfrak{p} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{p}\mathfrak{p})W$, d. h. die Ebene $W\mathfrak{p}\mathfrak{p}$ fällt mit W zusammen.

Die Kette $W\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ bedeutet auch hier $[(W\mathfrak{p})\mathfrak{q}]\mathfrak{r}$, d. h. man bilde zuerst $W\mathfrak{p}$, dann $(W\mathfrak{p})\mathfrak{q}$ und schließlich $[(W\mathfrak{p})\mathfrak{q}]\mathfrak{r}$; $\mathfrak{r}\mathfrak{q}\mathfrak{p}W$ heißt analog $\mathfrak{r}[\mathfrak{q}(\mathfrak{p}W)]$; Für allgemeine Ketten zeigt man in der gleichen Weise

$$W\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}\ldots = \pm\ldots\mathfrak{r}\mathfrak{q}\mathfrak{p}W, \tag{33}$$

wo das $+$- oder $-$-Zeichen steht, je nachdem die Anzahl der Sechservektoren gerade oder ungerade ist.

Um später mit den Ketten rechnen zu können, ist noch eine wichtige Beziehung abzuleiten. Es wurde schon betont, daß in einer Kette die Sechservektoren *nicht* vertauschbar sind. Wir fragen jetzt: Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Ketten $W\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ und $W\mathfrak{q}\mathfrak{p}$? Wir begnügen uns hier damit, diese Beziehung anzugeben und den Beweis nur anzudeuten. Es gilt

$$W\mathfrak{p}\mathfrak{q} = -W\mathfrak{q}\mathfrak{p} - (\mathfrak{p}\mathfrak{q})W, \tag{34}$$

wo $(\mathfrak{p}\mathfrak{q})$ das Skalarprodukt von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ist. Der Beweis läßt sich einfach durch Nachrechnen führen. Man bildet die beiden Summen $w^i p_{ik} q^{kl}$ und $w^i q_{ik} p^{kl}$ für $l = 1, 2, 3, 4$. Beachtet man noch den Zusammenhang, der nach Gleichung (8) zwischen den ko- und kontravarianten Linienkoordinaten besteht, so verifiziert man leicht die obige Gleichung. Ebenso zeigt man dann für allgemeine Ketten mit mehreren Sechservektoren[5]):

$$W\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}\mathfrak{s} = -W\mathfrak{p}\mathfrak{r}\mathfrak{q}\mathfrak{s} - (\mathfrak{r}\mathfrak{q})W\mathfrak{p}\mathfrak{s}. \tag{35}$$

Nachdem die wichtigsten Eigenschaften der Ketten angegeben sind, wenden wir uns zu einer Aufgabe, die für die affine Liniengeometrie grundlegend ist: Es seien drei windschiefe Gerade $\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}; \mathfrak{a}_{\mathrm{II}}; \mathfrak{a}_{\mathrm{III}}$ gegeben; durch diese wird eine geradlinige Fläche zweiten Grades bestimmt; angenommen, diese sei ein einschaliges Hyperboloid. Gesucht ist der Mittelpunkt dieses Hyperboloids.

Ein einschaliges Hyperboloid hat zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden. Die $\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}; \mathfrak{a}_{\mathrm{II}}; \mathfrak{a}_{\mathrm{III}}$ gehören der einen Schar an. Dann schneidet jede Erzeugende der anderen Schar alle drei Geraden $\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}; \mathfrak{a}_{\mathrm{II}}; \mathfrak{a}_{\mathrm{III}}$, und umgekehrt ist jede Gerade, die $\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}; \mathfrak{a}_{\mathrm{II}}; \mathfrak{a}_{\mathrm{III}}$ schneidet, eine Erzeugende der anderen Schar. Ferner gilt: Jede Tangentenebene des Hyperboloids schneidet dieses in den beiden Erzeugenden, die durch den Berührungspunkt gehen; und die Tangentenebenen in den Endpunkten eines Durchmessers sind zueinander parallel. Wir bestimmen nun die Berührungspunkte zweier paralleler Tangentenebenen.

---

[5]) Einen ausführlichen Beweis für diese Formel sowie andere Eigenschaften der Ketten findet man bei Weitzenböck, Komplexsymbolik, Sammlung Schubert 1908; dort sind die Ketten auf Linearformen aufgebaut und in der von Clebsch eingeführten symbolischen Schreibweise geschrieben.

Es ist $W a_{\mathrm{I}}$ der uneigentliche Punkt von a_{I}, und $W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}}$ die Ebene durch a_{II} und den Punkt $W a_{\mathrm{I}}$. Diese Ebene schneidet a_{III} im Punkt $W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}}$. Verbindet man diesen Schnittpunkt $W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}}$ mit $W a_{\mathrm{I}}$, so ist die Verbindungsgerade eine Erzeugende der anderen Schar, denn sie schneidet $a_{\mathrm{I}}, a_{\mathrm{II}}, a_{\mathrm{III}}$. Daher ist die Ebene, die durch a_{III} und $W a_{\mathrm{I}}$ geht, Tangentenebene des Hyperboloids im Punkt $W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}}$ (Fig. 2). Ebenso sieht man, daß die durch a_{I} und $W a_{\mathrm{III}}$ gehende Ebene das Hyperboloid im Punkt $W a_{\mathrm{III}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{I}}$ berührt. Wir haben also zwei Tangentenebenen bestimmt; ihre Schnittgerade liegt in der unendlich fernen Ebene; sie ist nämlich die durch $W a_{\mathrm{I}}$ und $W a_{\mathrm{II}}$ gehende Gerade. D. h. die Ebenen sind zueinander parallel. Also ist die Verbindungsgerade der beiden Berührungspunkte $W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}}$ und $W a_{\mathrm{III}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{I}}$ ein Durchmesser des Hyperboloids. Der gesuchte Mittelpunkt ist der vierte harmonische Punkt zu den drei Punkten $W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}}$; $W a_{\mathrm{III}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{I}}$ und dem uneigentlichen Punkt der Verbindungsgeraden von $W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}}$ und $W a_{\mathrm{III}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{I}}$. Man erkennt, daß der Punkt

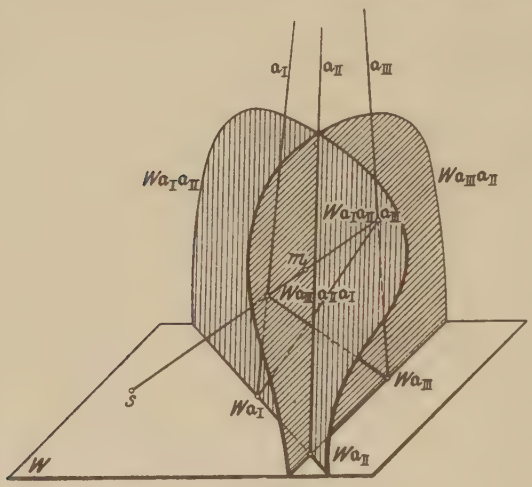

Fig. 2.

$$s = W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}} + W a_{\mathrm{III}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{I}} = W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}} - a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}} W$$

in der uneigentlichen Ebene W liegt; denn es ist nach (33), (18)

$$W s = W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}} W - W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}} W = 0.$$

Daraus folgt, daß

$$m = W a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{III}} - W a_{\mathrm{III}} a_{\mathrm{II}} a_{\mathrm{I}} \tag{36}$$

der gesuchte Mittelpunkt des Hyperboloids ist[6]).

Auch durch drei lineare Komplexe a_{I}; a_{II}; a_{III} wird eine geradlinige Fläche zweiten Grades bestimmt, und es läßt sich zeigen, daß auch in diesem Falle der Mittelpunkt m durch die Gleichung (36) gegeben wird. Ganz allgemein kann die Formel (36) auf Grund ihrer Invarianz gegen

[6]) Den leitenden Gedanken des hier gegebenen Beweises der Formel (36) verdanke ich Herrn F. Schilling. Ihm sei an dieser Stelle für sein reges Interesse an der Arbeit und für viele Ratschläge zur redaktionellen Abfassung herzlicher Dank ausgesprochen.

affine Transformationen des Raumes und Bündeltransformationen[7]) des durch a_I, a_{II}, a_{III} aufgespannten Vektorbündels bewiesen werden; der Beweis selbst mag hier übergangen werden.

Zum Schluß dieses einführenden Paragraphen sollen noch einige später oft benutzte Formeln angegeben werden. Nach Gleichung (3) hatten wir eine Gerade $\mathfrak{p}$ durch zwei Punkte x, y bestimmt aus der Matrix $\mathfrak{p} = \sigma \| x, y \|$; dabei sei jetzt der Proportionalitätsfaktor σ gleich 1 angenommen. Die Matrix hat in Indizes geschrieben die Gestalt $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$. Dann wird das Skalarprodukt von $\mathfrak{p}$ mit einem Vektor $\mathfrak{q}$ (Gleichung (9)):

$$\begin{aligned}(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) &= \frac{1}{2} p_{ik} q^{ik} = \frac{1}{2}(x_i q^{ik} y_k - x_k q^{ik} y_i) \\ &= \frac{1}{2}(x_i q^{ik} y_k + x_k q^{ki} y_i) = x_i q^{ik} y_k \\ &= x\,\mathfrak{q}\,y\,.\end{aligned} \tag{37}$$

Es seien $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ zwei Gerade. Dann sind $W\mathfrak{s} = x$ und $\mathfrak{r}W = y$ ihre uneigentlichen Punkte, und man erhält für die Verbindungsgerade

$$\mathfrak{p} = \| W\mathfrak{s}; \mathfrak{r}W \| \tag{38}$$

und für das Skalarprodukt

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = W\mathfrak{s}\mathfrak{q}\mathfrak{r}W\,. \tag{39}$$

Ebenso kann man die Schnittgerade $\mathfrak{b}$ zweier Ebenen U und V durch die Matzix $\mathfrak{b} = \| U; V \|$ darstellen. Jetzt kann man die Ebenen U und V etwa durch zwei Ketten

$$U = W\mathfrak{a}\mathfrak{g} \quad \text{und} \quad V = \mathfrak{d}\mathfrak{e}W$$

geben. Dann wird

$$\mathfrak{b} = \| W\mathfrak{a}\mathfrak{g}; \mathfrak{d}\mathfrak{e}W \|\,. \tag{40}$$

Auch hier ergibt sich für das Skalarprodukt mit einem Vektor $\mathfrak{q}$ genau wie soeben:

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{q}) = W\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{q}\mathfrak{d}\mathfrak{e}W\,. \tag{41}$$

Schließlich geben wir noch die Formel für das Skalarprodukt der durch (38) und (40) gegebenen Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b}$ an. Es wird:

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{p}) = W\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{s}W \cdot W\mathfrak{r}\mathfrak{d}\mathfrak{e}W - W\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{r}W \cdot W\mathfrak{s}\mathfrak{d}\mathfrak{e}W\,. \tag{42}$$

Auch diese Formel folgt unmittelbar, wenn man auf die Indizes-Schreibweise zurückgeht. Es sei daher gestattet, die Durchrechnung hier zu unterlassen.

[7]) Über Bündeltransformationen vgl. etwa Blaschke III § 56. W. Blaschke, Vorlesungen über Diff.-Geometrie Bd. I, 1930; Bd. II, 1923; Bd. III, 1929. Berlin: Julius Springer; im folgenden zitiert als Blaschke I, II, III.

§ 2.

Entwicklung des Formelapparates.

Definition eines Strahlensystems. *Ein Stück M einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit des vierdimensionalen Plückerschen Geradenraumes heiße ein Strahlensystem, wenn die sechs homogenen Linienkoordinaten durch die Gleichungen*

$$p_{ik} = f_{ik}(u, v) \tag{1}$$

gegeben sind, wo die f_{ik} im Gebiete M des Parameterraumes (u, v) mindestens viermal stetig differenzierbare Funktionen sind, die in M stets der Plückerschen Identität (§ 1 *Gleichung* (4)) *genügen, und deren Funktionalmatrix*

$$\left\| \; f_{ik} \quad \frac{\partial f_{ik}}{\partial u} \quad \frac{\partial f_{ik}}{\partial v} \; \right\| \tag{1a}$$

stets in M den Rang drei hat.

Da die p_{ik} homogene Koordinaten sind, ändert sich das Strahlensystem nicht, wenn man statt $\mathfrak{p}(u, v)$ setzt:

$$\hat{\mathfrak{p}}(u, v) = \lambda(u, v)\,\mathfrak{p}(u, v), \tag{2}$$

vorausgesetzt, daß $\lambda(u, v)$ im Gebiete M nicht verschwindet und hinreichend oft (mindestens viermal) differenzierbar ist. Wird der Faktor $\lambda(u, v)$ auf invariante Weise bestimmt gewählt, so stellt $\hat{\mathfrak{p}}(u, v)$ ein *normiertes* Strahlensystem dar, dessen Koordinaten dann als inhomogen zu betrachten sind.

Es sei nach (1) ein Strahlensystem gegeben, dessen Koordinaten p_{ik} nach (2) normiert seien. Dabei soll über den Normierungsfaktor später verfügt werden. Zunächst setzen wir lediglich voraus, daß die Koordinaten des Systems irgendwie, d. h. affin- und parameter-invariant normiert seien. Die Bezeichnung $\hat{\mathfrak{p}}$ für das normierte System werden wir indes nur da verwenden, wo Verwechslungen möglich sind; sonst wird stets auch $\mathfrak{p}$ für das normierte System geschrieben.

Nach der Definition gilt für $\mathfrak{p}(u, v)$ identisch in u, v die Gleichung

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{p}) = 0. \tag{3}$$

Daraus folgt durch Differentiation nach u und v

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{p}_u) = 0; \qquad (\mathfrak{p}\mathfrak{p}_v) = 0, \tag{4}$$

wo gesetzt ist: $\mathfrak{p}_u = \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}$ und $\mathfrak{p}_v = \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v}$.

Ferner sei vorausgesetzt, *daß das System $\mathfrak{p}(u, v)$ im ganzen Gebiet M parabolisch* ist. D. h.[8]) die Diskriminante der quadratischen Differen-

[8]) Strahl.-Syst. I, § 3.

tialform

$$(5) \qquad \Phi = \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\right) du^2 + 2\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v}\right) du\,dv + \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v}\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v}\right) dv^2$$

verschwindet identisch in M, also

$$(6) \qquad \Delta = \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v}\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v}\right)^2 \equiv 0\,.$$

Das Verschwinden der Form Φ definiert die Differentialgleichung der beiden Scharen von abwickelbaren Flächen eines Systems $\mathfrak{p}(u, v)$. Die Gleichung (6) sagt aus, daß diese beiden Scharen in eine zusammenfallen. Daraus folgt weiter (vgl. Strahl.-Syst. I), daß auch die beiden Brennflächen des Systems in eine einzige zusammenfallen. Es ist bekannt (vgl. etwa: Darboux, Surfaces, Bd. II, Kap. 2), daß ein solches System aus den Tangenten an die eine Schar der Asymptotenlinien der einzigen Brennfläche besteht. Die Geraden unseres Systems hüllen also eine Fläche ein. Die Differentialgeometrie eines parabolischen Strahlensystems ist daher zugleich die Differentialgeometrie der Brennfläche, d. h. Flächentheorie.

Eine quadratische Form, deren Diskriminante verschwindet, ist stets das Quadrat einer Linearform. Dies gilt für unsere Gleichung (5). Es muß daher eine Linearform $d\Psi$ geben, so daß gilt: $\Phi = d\Psi^2$. Durch die Gleichungen

$$(7) \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\right) = n_1 n_1\,; \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v}\right) = n_1 n_2\,; \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v}\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v}\right) = n_2 n_2\,,$$

die wegen (6) verträglich sind, bestimmen wir zwei Größen n_1 und n_2, die die Koeffizienten der gesuchten Linearform

$$(8) \qquad d\Psi = n_1 du + n_2 dv$$

sind. In der Tat ist nach (7), (8), (5) $d\Psi^2 = \Phi$. Die Gleichung $d\Psi = 0$ kennzeichnet die Torsen unseres Systems oder auf der Brennfläche die eine Schar von Asymptotenlinien.

Schließen wir den Fall aus, daß die Brennfläche eine geradlinige Fläche ist, so erkennt man aus dem obigen, daß jedem parabolischen System ein zweites parabolisches System $\mathfrak{q}(u, v)$ adjungiert ist. Dieses besteht aus den Tangenten an die zweite Schar der Asymptotenlinien der Brennfläche. Das System $\mathfrak{q}(u, v)$ ist durch das System $\mathfrak{p}(u, v)$ vollständig bestimmt (d. h. bis auf die Normierung der homogenen Linienkoordinaten); denn ausgehend von $\mathfrak{p}(u, v)$ kennt man die Brennfläche mit beiden Scharen von Asymptotenlinien, also auch beide Tangentensysteme.

Um die folgenden Formeln symmetrisch zu gestalten, denken wir uns die beiden adjungierten Systeme $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{q}(u, v)$ von vornherein gegeben. Dann gelten auch für das System $\mathfrak{q}(u, v)$ nach Definition die Gleichungen

$$(9) \qquad (\mathfrak{q}\mathfrak{q}) = 0\,; \quad (\mathfrak{q}\mathfrak{q}_u) = 0\,; \quad (\mathfrak{q}\mathfrak{q}_v) = 0\,.$$

Da aber nur eines der beiden Systeme willkürlich gewählt werden kann, müssen zwischen $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{q}(u, v)$ eine Anzahl Relationen bestehen, aus denen sich bei gegebenen $\mathfrak{p}(u, v)$ das System $\mathfrak{q}(u, v)$ berechnen läßt bis auf die Normierung. Wir können daher $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ je in einer bestimmten Normierung, die zunächst noch offengelassen werde, annehmen. Dann gelangt man folgendermaßen zu den zwischen $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{q}(u, v)$ geltenden Relationen.

Wir gehen aus von der Brennfläche, deren Haupttangenten durch $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{q}(u, v)$ gegeben sind, und betrachten die Umgebung eines (nicht-singulären) Flächenpunktes (u_0, v_0). Dann sind $\mathfrak{p}(u_0, v_0)$ und $\mathfrak{q}(u_0, v_0)$ die beiden Haupttangenten des Flächenpunktes (u_0, v_0). Da sich $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ schneiden, ist (§ 1, Gleichung 11)

$$(10) \qquad (\mathfrak{p}(u_0, v_0)\, \mathfrak{q}(u_0, v_0)) = 0.$$

Nehmen wir vorübergehend an, daß die Parameterlinien $u =$ konst. und $v =$ konst. die Asymptotenlinien der Brennfläche sind und daß $\mathfrak{p}(u, v)$ die Tangenten an $u =$ konst. und $\mathfrak{q}(u, v)$ diejenigen an $v =$ konst. darstellen (siehe Fig. 3). Schreiten wir dann auf der Asymptotenlinie $v = v_0$ fort zu zwei benachbarten Haupttangenten des Systems $\mathfrak{p}$ und ebenso längs der Kurve $u = u_0$ zu zwei konsekutiven Strahlen des $\mathfrak{q}$-Systems, so sind die drei $\mathfrak{p}$-Geraden drei Erzeugende der einen Schar, die drei $\mathfrak{q}$-Geraden drei Erzeugende der anderen Schar von geradlinigen Erzeugenden der zum Flächenpunkt (u_0, v_0) gehörenden Lie-F_2. Aus der Tatsache, daß jede Erzeugende der einen Schar einer F_2 jede Erzeugende der anderen Schar schneidet, ergeben sich die gesuchten Relationen:

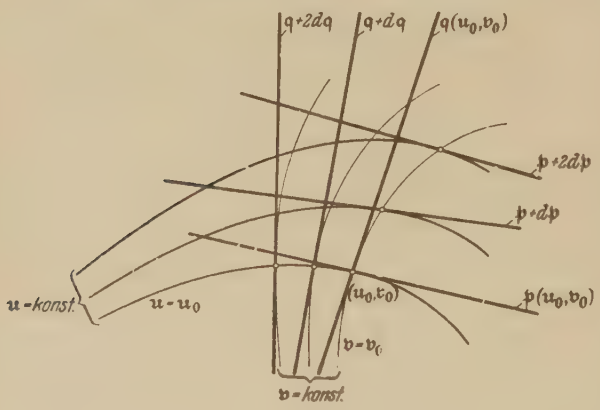

Fig. 3.

$$\begin{aligned}
&\text{I.:} && (\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = 0, && (\mathfrak{p}\mathfrak{q}_v) = 0, && (\mathfrak{p}\mathfrak{q}_{vv}) = 0.\\
(11)\quad &\text{II.:} && (\mathfrak{p}_u\mathfrak{q}) = 0, && (\mathfrak{p}_u\mathfrak{q}_v) = 0, && (\mathfrak{p}_u\mathfrak{q}_{vv}) = 0.\\
&\text{III.:} && (\mathfrak{p}_{uu}\mathfrak{q}) = 0, && (\mathfrak{p}_{uu}\mathfrak{q}_v) = 0, && (\mathfrak{p}_{uu}\mathfrak{q}_{vv}) = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten für jeden beliebigen Flächenpunkt, d. h. sie gelten identisch in u, v. Differenziert man die Gleichung $(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = 0$ nach u, so

wird $(\mathfrak{p}_u \mathfrak{q}) + (\mathfrak{p} \mathfrak{q}_u) = 0$; d. h. wegen Gleichung II_1: $(\mathfrak{p} \mathfrak{q}_u) = 0$; ebenso folgt aus $(\mathfrak{p}_v \mathfrak{q}) + (\mathfrak{p} \mathfrak{q}_v) = 0$ die Gleichung $(\mathfrak{p}_v \mathfrak{q}) = 0$, und man hat zunächst die vier Gleichungen:

$$(12) \qquad \boxed{(\mathfrak{p} \mathfrak{q}_u) = (\mathfrak{p} \mathfrak{q}_v) = 0; \quad (\mathfrak{q} \mathfrak{p}_u) = (\mathfrak{q} \mathfrak{p}_v) = 0}.$$

Durch Differentiation der Gleichung $(\mathfrak{p} \mathfrak{q}_v) = 0$ nach v wird:

$$(\mathfrak{p}_v \mathfrak{q}_v) + (\mathfrak{p} \mathfrak{q}_{vv}) = 0,$$

und wegen $(11, I_3)$: $(\mathfrak{p}_v \mathfrak{q}_v) = 0$. Ebenso folgt durch Differentiation von $(\mathfrak{q} \mathfrak{p}_u) = 0$ nach u die Gleichung $(\mathfrak{p}_u \mathfrak{q}_u) = 0$, und wegen $(\mathfrak{p}_u \mathfrak{q})_v = 0$ ist $-(\mathfrak{p}_u \mathfrak{q}_v) = (\mathfrak{p}_{uv} \mathfrak{q}) = 0$. Differenziert man $(\mathfrak{p}_v \mathfrak{q}) = 0$ nach u, so wird $(\mathfrak{p}_{uv} \mathfrak{q}) + (\mathfrak{p}_v \mathfrak{q}_u) = 0$, d. h. $(\mathfrak{p}_v \mathfrak{q}_u) = 0$. Wir haben daher die Gleichungen erhalten:

$$(13) \qquad \boxed{(\mathfrak{p}_u \mathfrak{q}_u) = 0; \quad (\mathfrak{p}_u \mathfrak{q}_v) = 0; \quad (\mathfrak{p}_v \mathfrak{q}_u) = 0; \quad (\mathfrak{p}_v \mathfrak{q}_v) = 0}.$$

Die Gleichungen (12) und (13) sind die gesuchten Relationen, die zwischen den beiden adjungierten Systemen $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{q}(u, v)$ gelten. Die Gleichungen (12) und (13) zeichnen sich vor (11) dadurch aus, daß in ihnen die zweiten Ableitungen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ nicht mehr auftreten. Der Nachweis, daß umgekehrt die Gleichungen (11) aus (12) und (13) folgen, bereitet keine Schwierigkeiten und mag daher übergangen werden.

Bei der Ableitung der Gleichungen (12) und (13) hatten wir u und v als Asymptotenlinien-Parameter vorausgesetzt. Man erkennt aber, daß die Gleichungen auch für beliebige Parameter gelten. Werden nämlich durch

$$\bar{u} = U(u, v) \quad \text{und} \quad \bar{v} = V(u, v)$$

neue Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ eingeführt, so werden:

$$\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \mathfrak{p}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}; \qquad \mathfrak{p}_v = \mathfrak{p}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \mathfrak{p}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v},$$

$$\mathfrak{q}_u = \mathfrak{q}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \mathfrak{q}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}; \qquad \mathfrak{q}_v = \mathfrak{q}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \mathfrak{q}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}.$$

Durch Einsetzen in (12) bzw. (13) erhält man z. B.

$$(\mathfrak{p} \mathfrak{q}_u) = \left(\mathfrak{p} \left(\mathfrak{q}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \mathfrak{q}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\right)\right) = 0; \qquad (\mathfrak{p} \mathfrak{q}_v) = \left(\mathfrak{p} \left(\mathfrak{q}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \mathfrak{q}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}\right)\right) = 0$$

oder

$$(\mathfrak{p} \mathfrak{q}_{\bar{u}}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + (\mathfrak{p} \mathfrak{q}_{\bar{v}}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = 0,$$

$$(\mathfrak{p} \mathfrak{q}_{\bar{u}}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + (\mathfrak{p} \mathfrak{q}_{\bar{v}}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = 0.$$

Da aber die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

müssen $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}_{\bar{u}}) = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}_{\bar{v}}) = 0$ sein. Ebenso zeigt man die Gültigkeit der übrigen Gleichungen (12), (13) für allgemeine Parameter.

Das System $\mathfrak{q}(u, v)$ besitzt ebenfalls eine ausgeartete quadratische Differentialform:

$$(14) \qquad \bar{\Phi} = \left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}\right) du^2 + 2\left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\right) du\,dv + \left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\right) dv^2,$$

deren Diskriminante verschwindet:

$$(15) \qquad \bar{\Delta} = \left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\right)^2 \equiv 0.$$

Auch hier bestimmen wir eine Linearform

$$(16) \qquad d\bar{\Psi} = \bar{n}_1\,du + \bar{n}_2\,dv,$$

deren Quadrat proportional $\bar{\Phi}$ ist; und zwar setzen wir hier $(d\Psi)^2 = -\Phi$; dann werden die Koeffizienten $\bar{n}_1$ und $\bar{n}_2$ bestimmt durch

$$(17) \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}\right) = -\bar{n}_1\,\bar{n}_1; \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\right) = -\bar{n}_1\,\bar{n}_2; \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\right) = -\bar{n}_2\,\bar{n}_2.$$

Die Gleichung

$$(18) \qquad d\bar{\Psi} = \bar{n}_1\,du + \bar{n}_2\,dv = 0$$

bestimmt die zweite Schar von Asymptotenlinien der Brennfläche oder, was dasselbe ist, die Torsen des Systems $\mathfrak{q}(u, v)$.

Im § 1 wurden solche Operationen der Linienkoordinaten bestimmt, die gegen affine Raumtransformationen invariant sind. Jetzt handelt es sich darum, auch noch die *Parameter-Transformationen* zu eliminieren; dies geschieht durch Verwendung der *invarianten Ableitungen*, die sich auf zwei Linearformen aufbauen lassen (Blaschke I, § 61 f.).

Durch die Gleichungen

$$(19) \qquad \begin{aligned} n^1 n_1 + n^2 n_2 &= 1; \quad & n^1 \bar{n}_1 + n^2 \bar{n}_2 &= 0, \\ \bar{n}^1 n_1 + \bar{n}^2 n_2 &= 0; \quad & \bar{n}^1 \bar{n}_1 + \bar{n}^2 \bar{n}_2 &= 1 \end{aligned}$$

definieren wir die zu den $n_1; n_2$ und $\bar{n}_1; \bar{n}_2$ kontragredienten Tensoren n^1, n^2 und $\bar{n}^1, \bar{n}^2$. Es sei jetzt $S(u, v)$ eine parameter-invariante Größe; dann sind auch die Ausdrücke

$$(20) \qquad S_1 = n^1\,\frac{\partial S}{\partial u} + n^2\,\frac{\partial S}{\partial v} \quad \text{und} \quad S_2 = \bar{n}^1\,\frac{\partial S}{\partial u} + \bar{n}^2\,\frac{\partial S}{\partial v}$$

parameter-invariant. S_1 und S_2 heißen die *invarianten Ableitungen* von S nach den Linearformen $d\Psi$ und $d\overline{\Psi}$. Es wird nötig sein, kurz auf den Sinn der invarianten Ableitungen einzugehen. Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, mögen die Größen $n^1; n^2$ und $\overline{n}^1; \overline{n}^2$ sowie die invarianten Ableitungen S_1 und S_2 berechnet werden für den Fall, daß u, v Asymptotenparameter der Brennfläche sind. Wie auf Seite 244 seien die $\mathfrak{p}(u, v)$ die Tangenten an die Kurven $u = \text{konst.}$, die $\mathfrak{q}(u, v)$ an $v = \text{konst.}$ Dann wird die Gleichung $\Phi = 0$ (5) durch $d\Psi = du = 0$ und $\overline{\Phi} = 0$ (14) durch $d\overline{\Psi} = dv = 0$ erfüllt. Daher sind:

$$(\mathfrak{p}_v \mathfrak{p}_v) = 0; \quad (\mathfrak{p}_u \mathfrak{p}_v) = 0 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{q}_u \mathfrak{q}_u) = 0; \quad (\mathfrak{q}_u \mathfrak{q}_v) = 0,$$

und es werden wegen (7) und (17)

$$(21) \quad n_1 = \underset{+}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\right)}}; \quad n_2 = 0 \quad \text{und} \quad \overline{n}_1 = 0; \quad \overline{n}_2 = \underset{+}{\sqrt{-\left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\right)}},$$

wo die positiven Zeichen der Wurzeln genommen werden sollen. Nach (19) sind jetzt:

$$(22) \qquad n^1 = \frac{1}{n_1}; \quad n^2 = 0 \quad \text{und} \quad \overline{n}^1 = 0; \quad \overline{n}^2 = \frac{1}{\overline{n}_2};$$

daher erhält man für die invarianten Ableitungen S_1 und S_2:

$$(23) \qquad S_1 = \frac{1}{\underset{+}{\sqrt{(\mathfrak{p}_u \mathfrak{p}_u)}}} \cdot \frac{\partial S}{\partial u}; \qquad S_2 = \frac{1}{\underset{+}{\sqrt{-(\mathfrak{q}_v \mathfrak{q}_v)}}} \cdot \frac{\partial S}{\partial v}.$$

Die Linearformen $d\Psi$ und $d\overline{\Psi}$ sind jetzt:

$$(24) \qquad d\Psi = \underset{+}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\right)}}\, du; \qquad d\overline{\Psi} = \underset{+}{\sqrt{-\left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial v}\right)}}\, dv.$$

Man kann daher die invarianten Ableitungen (symbolisch) schreiben:

$$S_1 = \frac{\partial S}{\partial \Psi}; \qquad S_2 = \frac{\partial S}{\partial \overline{\Psi}}.$$

Das hat folgenden geometrischen Sinn: Durch $d\Psi$ wird auf den Kurven $v = \text{konst.}$ und durch $d\overline{\Psi}$ auf $u = \text{konst.}$ je ein invarianter Parameter $\Psi - \Psi_0$ bzw. $\overline{\Psi} - \overline{\Psi}_0$ definiert. S_1 und S_2 sind dann die partiellen Ableitungen nach diesen Parametern. Gehen wir jetzt zu allgemeinen Parametern zurück, so bleiben die Überlegungen gültig, und wir können zusammenfassend sagen: Auf den Asymptotenlinien der Brennfläche sind bestimmte (affin-invariante) Parameter gewählt. Die invarianten Ableitungen einer Größe S sind die partiellen Ableitungen von S nach diesen Parametern.

Es bedarf keiner Erklärung, was formell unter den invarianten Ableitungen von Vektoren zu verstehen ist. Es werden:

$$(25) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &= n^1 \mathfrak{p}_u + n^2 \mathfrak{p}_v; \qquad \mathfrak{p}_2 = \overline{n}^1 \mathfrak{p}_u + \overline{n}^2 \mathfrak{p}_v, \\ \mathfrak{q}_1 &= n^1 \mathfrak{q}_u + n^2 \mathfrak{q}_v; \qquad \mathfrak{q}_2 = \overline{n}^1 \mathfrak{q}_u + \overline{n}^2 \mathfrak{q}_v. \end{aligned}$$

Dagegen erhebt sich die Frage, welche geometrische Bedeutung den Vektoren $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ zukommt: Durch einen Punkt (u, v) der Brennfläche, die von dem Vierervektor $x(u, v)$ beschrieben werde, gehen zwei Asymptotenlinien: $d\Psi = 0$ und $d\overline{\Psi} = 0$. Betrachten wir etwa die Tangente $\mathfrak{q}(u, v)$ im Punkt $x(u, v)$ an die Asymptotenlinie $d\overline{\Psi} = 0$, und schreiten jetzt auf dieser Asymptotenlinie zur benachbarten Tangente fort, so ist der Vektor dieser benachbarten Tangente gegeben durch $\mathfrak{q} + \mathfrak{q}_1 d\Psi$, und zwar unabhängig davon, was u, v für Parameter auf der Fläche sind. Schreitet man dagegen auf der durch $x(u, v)$ gehenden Asymptotenlinie $d\Psi = 0$ fort, so gelangt man zu der Nachbargeraden mit dem Vektor $\mathfrak{q} + \mathfrak{q}_2 d\overline{\Psi}$. Eine analoge Bedeutung haben $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$.

Über die Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_2$ kann Näheres ausgesagt werden, wenn die *Skalarprodukte* dieser Vektoren untereinander bekannt sind. Aus den Gleichungen (12) und (13) folgen sofort bei Beachtung von (7), (17), (19), (25) die Gleichungen:

$$
\begin{gathered}
(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1) = 1; \quad (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) = 0; \quad (\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2) = 0, \\
(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_1) = 0; \quad (\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2) = 0; \quad (\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_2) = -1, \\
(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1) = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2) = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}_1) = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}_2) = 0, \\
(\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_1) = (\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_2) = (\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}_1) = (\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}_2) = 0.
\end{gathered} \tag{26}
$$

Hier erkennt man aus $(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2) = 0$ und $(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_1) = 0$, daß die Vektoren $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_1$ gerade Linien sind, und aus $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2) = 0$ und $(\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}_2) = 0$, ferner aus $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}_1) = 0$ und $(\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_1) = 0$, daß diese Geraden $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_1$ durch den Punkt $x(u, v)$ hindurchgehen. Jedoch kann die Lage dieser Geraden in dem durch $x(u, v)$ gehenden Geradenbündel nicht bestimmt angegeben werden, denn sie hängt von der Normierung der homogenen Linienkoordinaten von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ab. Setzt man nämlich $\hat{\mathfrak{p}} = \lambda\mathfrak{p}$, so wird $\hat{\mathfrak{p}}_2 = \lambda_2\mathfrak{p} + \lambda\mathfrak{p}_2$, wo die invariante Ableitung auch noch von der Normierung von $\mathfrak{q}$ abhängt. Man erkennt jedenfalls, daß sich die Lage der Geraden $\hat{\mathfrak{p}}_2$ mit λ ändert. Erst im § 9 dieser Arbeit kann die Frage nach der geometrischen Deutung der im § 5 gewählten Normierung beantwortet werden.

§ 3.

Die Aufgabe des Folgenden wird es sein, die Umgebung eines Strahles $\mathfrak{p}(u, v)$ oder $\mathfrak{q}(u, v)$ hinsichtlich der affin-invarianten Eigenschaften zu untersuchen. Ausgehend von $\mathfrak{p}(u_0, v_0)$ und $\mathfrak{q}(u_0, v_0)$ bestimmen wir sechs linear unabhängige Geraden, die einerseits von Ableitungen möglichst niedriger Ordnung abhängen, andererseits die Kanten eines mit der Umgebung von $\mathfrak{p}(u_0, v_0)$ und $\mathfrak{q}(u_0, v_0)$ affin-invariant verbundenen Tetraeders ausmachen. Nach § 1 läßt sich dann jeder Sechservektor aus den Kanten des Tetraeders linear kombinieren.

Die beiden Systemstrahlen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ spannen die Tangentenebene der Brennfläche auf. Ihr Schnittpunkt x ist der Berührungspunkt mit der Brennfläche. $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ seien zwei Kanten, x eine Ecke des Tetraeders. Eine Seitenfläche liege in der uneigentlichen Ebene W. Die uneigentlichen Punkte von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sind $W\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}W$; ihre Verbindungsgerade $\mathfrak{w}$ ist dann gegeben durch die Matrix:

$$(1) \qquad \mathfrak{w} = \| W\mathfrak{p};\ \mathfrak{q}W \|.$$

Als dritte durch x gehende Tetraederkante wählen wir die Affin-Normale der Fläche $x(u, v)$; diese wird folgendermaßen definiert (vgl. Blaschke II, § 45): „Konstruiert man um einen Flächenpunkt x herum ein kleines räumliches Viereck aus Asymptotenlinien, so ist die Affin-Normale dadurch gekennzeichnet, daß sich durch sie zwei Ebenen legen lassen, die zu je einem Paar von Gegenseiten des Vierecks parallel laufen."

Wir bestimmen zunächst die Koordinaten der Seiten des Vierecks. Die beiden durch x gehenden Seiten sind die Haupttangenten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. Die beiden anderen Seiten sind nach Seite 248 gegeben durch die Vektoren $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}_1 d\Psi$ und $\mathfrak{q} + \mathfrak{q}_2 d\overline{\Psi}$. Die Ebene durch $\mathfrak{p}$ parallel zu $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}_1 d\Psi$ geht durch den uneigentlichen Punkt $W(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}_1 d\Psi)$ und hat daher die Koordinaten

$$W(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}_1 d\Psi)\,\mathfrak{p} = W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p} + W\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}\,d\Psi = W\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}\,d\Psi \quad [\text{da } W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p} = 0].$$

Der Faktor $d\Psi$ kann aber vernachlässigt werden, da es sich um die homogenen Koordinaten der Ebene handelt. Wir erhalten also für die Ebene den Ausdruck $W\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}$. Ebenso ergibt sich für die durch $\mathfrak{q}$ parallel zu $\mathfrak{q} + \mathfrak{q}_2 d\overline{\Psi}$ gehende Ebene der Ausdruck $\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_2 W$. Für die Affin-Normale, als Schnitt der beiden Ebenen, erhalten wir also die Matrix:

$$(2) \qquad \mathfrak{y} = \| W\mathfrak{p}_1\mathfrak{p};\ \mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_2 W \|.$$

Die Verbindungsgeraden des uneigentlichen Punktes $\mathfrak{y}W$ von $\mathfrak{y}$ mit $W\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}W$ sind (siehe Fig. 4):

$$(3\,\text{a, b}) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{u} &= \| W\mathfrak{p}\,\mathfrak{y};\ W \|; \\ \mathfrak{v} &= \| W;\ \mathfrak{y}\,\mathfrak{q}\,W \|. \end{aligned}$$

Nach § 1 ist nämlich $W\mathfrak{p}\,W = 0$ und daher

$$\| W\mathfrak{p}\,\mathfrak{y};\ W \| = -\| W\mathfrak{p};\ \mathfrak{y}W \|.$$

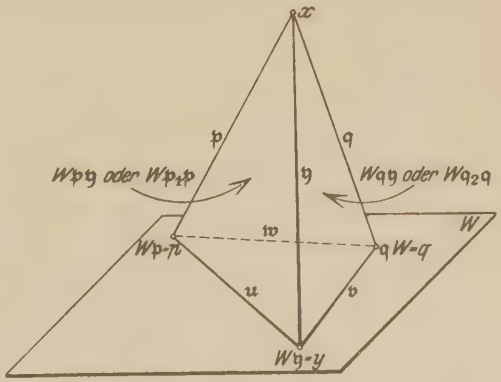

Fig. 4.

Die Geraden $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{y}$ und die uneigentlichen Geraden $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ sind die Kanten des gesuchten Tetraeders. Wird in $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ für $\mathfrak{y}$ sein Wert ein

gesetzt, so erhält man nach § 1:

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{u} &= -\,W\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_2\,W\cdot\|W\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p};\,W\|,\\ \mathfrak{v} &= -\,W\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,W\cdot\|W;\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_2\,W\|. \end{aligned}$$

Die umstehende Skizze (Fig. 4) zeigt die Lage der sechs Kanten. Wir berechnen die Skalarprodukte der Grundvektoren untereinander nach den Regeln des § 1. Zur Abkürzung setzen wir:

$$\text{(5)} \qquad E = W\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{q}\,W = -\,W\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_2\,W\cdot W\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,W,$$

$$\text{(6)} \qquad A = W\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,W; \qquad \bar{A} = W\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_2\,W.$$

Dann können die Skalarprodukte in folgender Tabelle zusammengefaßt werden:

(7)

	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{v}$
$\mathfrak{p}$	0	0	0	0	0	E
$\mathfrak{q}$	0	0	0	0	E	0
$\mathfrak{y}$	0	0	0	E	0	0
$\mathfrak{w}$	0	0	E	0	0	0
$\mathfrak{u}$	0	E	0	0	0	0
$\mathfrak{v}$	E	0	0	0	0	0

Dabei gibt der in einem Felde stehende Wert das Skalarprodukt des Vektors der Zeile mit demjenigen der Kolonne des Feldes.

§ 4.

Ableitungsgleichungen.

Unter den Ableitungsgleichungen versteht man die Linearkombinationen der Sechservektoren $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ aus den Tetraederkanten: $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$. Es ist z. B. $\mathfrak{p}_1$ in der Form darzustellen:

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{p}_1 = \alpha\,\mathfrak{p} + \beta\,\mathfrak{q} + \gamma\,\mathfrak{y} + \delta\,\mathfrak{w} + \varepsilon\,\mathfrak{u} + \zeta\,\mathfrak{v},$$

wo $\alpha, \beta, \ldots$ nach § 1 Gleichung (17) aus dem linearen Gleichungssystem zu bestimmen sind. Das Gleichungssystem nimmt hier (wegen § 3 Gleichung (7)) die Form an:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}) &= \zeta\,E; \quad (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}) = \varepsilon\,E; \quad (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{y}) = \delta\,E;\\ (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{w}) &= \gamma\,E; \quad (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{u}) = \beta\,E; \quad (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{v}) = \alpha\,E. \end{aligned}$$

Für jeden der Ableitungsvektoren erhält man ein entsprechendes System; zur Berechnung der auf den linken Seiten stehenden Skalarprodukte führen wir die Abkürzungen ein:

$$(3)\quad \begin{aligned} C &= W\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}\mathfrak{q}_2 W; \quad D = W\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}\mathfrak{q}_1 W; \quad B = W\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}\mathfrak{p}_2 W,\\ \bar{C} &= -W\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 W; \quad \bar{D} = W\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}\mathfrak{q}_2 W; \quad \bar{B} = -W\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1 W \end{aligned}$$

und ferner

$$(4)\quad \begin{aligned} (\mathfrak{u}\mathfrak{y}_1) &= L; \quad (\mathfrak{u}\mathfrak{y}_2) = \bar{L},\\ (\mathfrak{y}_1\mathfrak{v}) &= N; \quad (\mathfrak{y}_2\mathfrak{v}) = \bar{N}. \end{aligned}$$

Die Aufstellung der Ableitungsgleichungen bereitet jetzt keinerlei Schwierigkeiten. Man hat lediglich die im § 1 angegebenen Regeln für das Rechnen mit Ketten wiederholt anzuwenden und erhält schließlich das folgende System von *Ableitungsgleichungen*:

$$\mathfrak{p}_1 = -\frac{AC}{E}\mathfrak{p} - \frac{A}{E}\mathfrak{y} + \frac{\bar{A}}{2E}\mathfrak{w}; \qquad \mathfrak{u}_1 = \frac{E_1+\bar{A}D}{E}\mathfrak{u} - \frac{L}{E}\mathfrak{w},$$

$$\mathfrak{p}_2 = -\frac{A\bar{D}}{E}\mathfrak{p} - \frac{\bar{A}B}{E}\mathfrak{q}; \qquad \mathfrak{u}_2 = \frac{E_2+\bar{A}\bar{C}}{E}\mathfrak{u} + \frac{\bar{A}B}{E}\mathfrak{v} - \frac{\bar{L}}{E}\mathfrak{w},$$

$$\mathfrak{q}_1 = -\frac{A\bar{B}}{E}\mathfrak{p} - \frac{\bar{A}D}{E}\mathfrak{q}; \qquad \mathfrak{v}_1 = \frac{A\bar{B}}{E}\mathfrak{u} + \frac{E_1+AC}{E}\mathfrak{v} - \frac{N}{E}\mathfrak{w},$$

$$\mathfrak{q}_2 = -\frac{\bar{A}\bar{C}}{E}\mathfrak{q} - \frac{\bar{A}}{E}\mathfrak{y} - \frac{A}{2E}\mathfrak{w}; \qquad \mathfrak{v}_2 = \frac{E_2+A\bar{D}}{E}\mathfrak{v} - \frac{\bar{N}}{E}\mathfrak{w},$$

$$\mathfrak{w}_1 = \left(-\frac{AC}{E} - \frac{\bar{A}D}{E}\right)\mathfrak{w} + \frac{A}{E}\mathfrak{v}; \qquad \mathfrak{y}_1 = \frac{N}{E}\mathfrak{p} + \frac{L}{E}\mathfrak{q} + \frac{E_1+AC+\bar{A}D}{E}\mathfrak{y} - \frac{A}{2E}\mathfrak{v},$$

$$\mathfrak{w}_2 = \left(-\frac{\bar{A}\bar{C}}{E} - \frac{AD}{E}\right)\mathfrak{w} + \frac{\bar{A}}{E}\mathfrak{u}; \qquad \mathfrak{y}_2 = \frac{\bar{N}}{E}\mathfrak{p} + \frac{\bar{L}}{E}\mathfrak{q} + \frac{E_2+\bar{A}\bar{C}+A\bar{D}}{E}\mathfrak{y} + \frac{A}{2E}\mathfrak{u}.$$

Nach § 2 Gleichung (13) und (25) ist $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_2) = 0$. Daraus folgt

$$(6)\quad A^2 - \bar{A}^2 = 0.$$

Die hier auftretenden Größen $A, B, \bar{A}, \bar{B}, C, \bar{C}, \ldots$ sind invariant gegen unimodulare affine Transformationen des Raumes und gegen Parameter-Transformationen, nicht aber gegen Umnormierungen der homogenen Linienkoordinaten von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. Bevor wir jedoch auf die Umnormierungen und die Unabhängigkeit der Größen eingehen, sollen *die Punktkoordinaten der Tetraeder-Eckpunkte und deren Ableitungsgleichungen aufgestellt werden.*

Die drei uneigentlichen Tetraeder-Eckpunkte $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}$ sind die unendlich fernen Punkte der Geraden $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{y}$. Ihre homogenen Koordinaten werden gegeben durch die Ketten:

$$(7)\quad \boxed{\boldsymbol{p} = W\mathfrak{p}, \quad \boldsymbol{q} = \mathfrak{q}W = -W\mathfrak{q}, \quad \boldsymbol{y} = W\mathfrak{y}}.$$

Der im Endlichen gelegene Eckpunkt des Tetraeders (das ist der Berührungspunkt x der Systemstrahlen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ mit der Brennfläche) ist der Schnittpunkt von $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{y}$; seine homogenen Koordinaten werden gegeben durch den Ausdruck $W\mathfrak{p}\mathfrak{y}\mathfrak{q}$; es empfiehlt sich, diese Koordinaten mit $\frac{1}{E}$ zu multiplizieren und dann zu setzen:

$$\boxed{x = \frac{1}{E} W\mathfrak{p}\mathfrak{y}\mathfrak{q}}, \tag{8}$$

denn dann ist $xW = 1 = \frac{1}{E} W\mathfrak{p}\mathfrak{y}\mathfrak{q}\, W$, d. h. die homogenen Koordinaten von x werden unabhängig von der Normierung der Linienkoordinaten von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. Und zwar stellen die drei ersten Komponenten von x gerade die inhomogenen kartesischen Koordinaten des Brennpunktes dar.

Die Ableitungsgleichungen der Tetraeder-Eckpunkte p, q, y, x gewinnt man sofort durch Überschieben der Gleichungen (5) mit W. Nur die Berechnung von x_1 und x_2 bereitet geringe Schwierigkeiten. Es wird

$$x_1 = -\frac{E_1}{E^2} W\mathfrak{p}\mathfrak{y}\mathfrak{q} + \frac{1}{E}(W\mathfrak{p}_1\mathfrak{y}\mathfrak{q} + W\mathfrak{p}\mathfrak{y}_1\mathfrak{q} + W\mathfrak{p}\mathfrak{y}\mathfrak{q}_1). \tag{9}$$

Durch Einsetzen aus Gleichung (5) erhält man

$$x_1 = W\mathfrak{p}\mathfrak{y}\mathfrak{q}\{-E_1 - AC + E_1 + AC + \bar{A}D - \bar{A}D\}\frac{1}{E^2} + \frac{\bar{A}}{2E^2} W\mathfrak{w}\mathfrak{y}\mathfrak{q} - \frac{\bar{A}}{2E^2} W\mathfrak{p}\mathfrak{v}\mathfrak{q},$$

denn es ist $W\mathfrak{p}\mathfrak{p}\mathfrak{q} = W\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{q} = W\mathfrak{y}\mathfrak{y}\mathfrak{q} = 0$ und ferner $W\mathfrak{w}\mathfrak{y}\mathfrak{q} = 0$, da $W\mathfrak{w} = 0$. Außerdem wird

$$W\mathfrak{p}\mathfrak{v}\mathfrak{q} = -W\mathfrak{v}\mathfrak{p}\mathfrak{q} - (\mathfrak{v}\mathfrak{p})W\mathfrak{q} = -EW\mathfrak{q} = +\mathfrak{q}W \cdot E. \tag{10}$$

Daher erhält man

$$x_1 = -\frac{\bar{A}}{2E} q \quad \text{und ebenso} \quad x_2 = \frac{A}{2E} p. \tag{11}$$

Die Ableitungsgleichungen der Eckpunkte sind dann schließlich:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\frac{AC}{E} p - \frac{A}{E} y, & q_1 &= +\frac{A\bar{B}}{E} p - \frac{\bar{A}D}{E} q,\\
p_2 &= -\frac{A\bar{D}}{E} p + \frac{\bar{A}B}{E} q, & q_2 &= -\frac{\bar{A}\bar{C}}{E} q + \frac{\bar{A}}{E} y,\\
x_1 &= -\frac{\bar{A}}{2E} q, & y_1 &= \frac{N}{E} p - \frac{L}{E} q + \frac{E_1 + AC + \bar{A}D}{E} y.\\
x_2 &= +\frac{A}{2E} p, & y_2 &= \frac{\bar{N}}{E} p - \frac{\bar{L}}{E} q + \frac{E_2 + \bar{A}\bar{C} + A\bar{D}}{E} y.
\end{aligned} \tag{12}$$

§ 5.

Normierung der homogenen Linienkoordinaten.

Hier erscheint es vorteilhaft, die in § 2 noch offengelassene Normierung der homogenen Linienkoordinaten festzulegen. In den beiden adjungierten Systemen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ wird, wie wir im § 2 sahen, nichts geometrisch geändert, wenn man statt $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ setzt:

1) $$\hat{\mathfrak{p}}(u,v) = \lambda(u,v)\,\mathfrak{p}(u,v); \qquad \hat{\mathfrak{q}}(u,v) = \mu(u,v)\,\mathfrak{q}(u,v).$$

Wie ändern sich bei einer solchen Umnormierung die Größen $E, A, \bar{A}, \ldots$? Da die obigen Gleichungen parameter-invariant geschrieben sind, darf angenommen werden, daß die Parameter u, v die Asymptotenlinien der Brennfläche sind. Dann werden in den Linearformen $d\Psi$ und $d\bar{\Psi}$ des § 2 $n_2 = 0$ und $\bar{n}_1 = 0$; und für die invarianten Ableitungen erhält man ausführlich geschrieben:

$$\hat{\mathfrak{p}}_1 = \frac{\hat{\mathfrak{p}}_u}{\sqrt{(\hat{\mathfrak{p}}_u\,\hat{\mathfrak{p}}_u)}}; \qquad \hat{\mathfrak{p}}_2 = \frac{\hat{\mathfrak{p}}_v}{\sqrt{-(\hat{\mathfrak{q}}_v\,\hat{\mathfrak{q}}_v)}},$$

$$\hat{\mathfrak{q}}_1 = \frac{\hat{\mathfrak{q}}_u}{\sqrt{(\hat{\mathfrak{p}}_u\,\hat{\mathfrak{p}}_u)}}; \qquad \hat{\mathfrak{q}}_2 = \frac{\hat{\mathfrak{q}}_v}{\sqrt{-(\hat{\mathfrak{q}}_v\,\hat{\mathfrak{q}}_v)}}.$$

Bei dem Übergang zu einer neuen Normierung wird daher

2) $$\hat{\mathfrak{p}}_1 = \frac{\lambda_u}{\lambda\sqrt{(\mathfrak{p}_u\,\mathfrak{p}_u)}}\mathfrak{p} + \mathfrak{p}_1; \qquad \hat{\mathfrak{p}}_2 = \frac{\lambda_v}{\mu\sqrt{-(\mathfrak{q}_v\,\mathfrak{q}_v)}}\mathfrak{p} + \frac{\lambda}{\mu}\mathfrak{p}_2,$$

$$\hat{\mathfrak{q}}_1 = \frac{\mu_u}{\lambda\sqrt{(\mathfrak{p}_u\,\mathfrak{p}_u)}}\mathfrak{q} + \frac{\mu}{\lambda}\mathfrak{q}_1; \qquad \hat{\mathfrak{q}}_2 = \frac{\mu_v}{\mu\sqrt{-(\mathfrak{q}_v\,\mathfrak{q}_v)}}\mathfrak{q} + \mathfrak{q}_2.$$

Setzt man diese Formel in den Ausdruck

$$\hat{E} = -\,\boldsymbol{W}\hat{\mathfrak{p}}\,\hat{\mathfrak{q}}\,\hat{\mathfrak{q}}_2\,\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}\hat{\mathfrak{p}}_1\,\mathfrak{p}\,\hat{\mathfrak{q}}\,\boldsymbol{W}$$

ein, so folgt

3) $$\hat{E} = \lambda^2\mu^2 E.$$

Da ferner λ, μ stets von Null verschieden sind und E als von Null verschieden vorauszusetzen ist (wegen der linearen Unabhängigkeit der Tetraederpunkte), so erhalten wir eine zulässige Normierung, wenn wir setzen

4) $$\boxed{\hat{E} = 1}.$$

Dadurch ist das Produkt $\lambda^2\mu^2$ festgelegt.

Nach § 4 Gleichung (3) war

$$\hat{B} = \boldsymbol{W}\hat{\mathfrak{p}}_1\,\hat{\mathfrak{p}}\,\hat{\mathfrak{p}}_2\,\boldsymbol{W}; \qquad \hat{\bar{B}} = -\,\boldsymbol{W}\mathfrak{q}_2\,\hat{\mathfrak{q}}\,\hat{\mathfrak{q}}_1\,\boldsymbol{W};$$

bei der Umnormierung wird dann

5) $$\hat{B} = \frac{\lambda^2}{\mu}B; \qquad \hat{\bar{B}} = \frac{\mu^2}{\lambda}\bar{B}.$$

Unter der Voraussetzung, daß *nicht* $B = 0$ oder $\bar{B} = 0$ ist, kann durch

$$\hat{B} = \hat{\bar{B}} = \mathfrak{B} \tag{6}$$

die Normierung beider Systeme endgültig festgelegt werden. Um jedoch die Strahlensysteme mit $B = 0$ oder $\bar{B} = 0$ nicht von vornherein auszuschließen, soll im folgenden zunächst nur die Bedingung (4) beachtet werden. Wegen § 3 (5) und (6) und § 4 (6) ist dann zu setzen:

$$A = 1; \quad \bar{A} = -1. \tag{7}$$

Durch (4) und (7) werden die Gleichungen (5) und (12) des vorigen Paragraphen wesentlich vereinfacht. Die Gleichungen (12) werden nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &= -C\mathfrak{p} - \mathfrak{y}, & \mathfrak{q}_1 &= \bar{B}\mathfrak{p} + D\mathfrak{q}, \\ \mathfrak{p}_2 &= -\bar{D}\mathfrak{p} - B\mathfrak{q}, & \mathfrak{q}_2 &= \bar{C}\mathfrak{q} - \mathfrak{y}, \\ \mathfrak{x}_1 &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}, & \mathfrak{y}_1 &= N\mathfrak{p} - L\mathfrak{q} + (C - D)\mathfrak{y}, \\ \mathfrak{x}_2 &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{p}. & \mathfrak{y}_2 &= \bar{N}\mathfrak{p} - \bar{L}\mathfrak{q} + (-\bar{C} + \bar{D})\mathfrak{y}. \end{aligned} \tag{8}$$

§ 6.

Integrabilitätsbedingungen.

Ist $S(u, v)$ eine Funktion von u, v mit stetigen zweiten Ableitungen, so gilt

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 S}{\partial v\, \partial u}.$$

Eine entsprechende Relation besteht für die invarianten Ableitungen von S; nämlich[9])

$$S_{12} + QS_1 = S_{21} + \bar{Q}S_2, \tag{1}$$

dabei werden nach § 2 Gleichung (20)

$$Q = \sum_{i,k} (n^i \bar{n}^k - n^k \bar{n}^i) \frac{\partial n_i}{\partial u^k}; \qquad \bar{Q} = \sum_{i,k} (\bar{n}^i n^k - \bar{n}^k n^i) \frac{\partial \bar{n}_i}{\partial u^k} \tag{2}$$

$$[i, k = 1, 2;\ u^1 = u;\ u^2 = v].$$

Für die invarianten Ableitungen § 5 Gleichung (8) bestehen daher die vier Relationen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{12} + Q\mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{x}_{21} + \bar{Q}\mathfrak{x}_2; & \mathfrak{p}_{12} + Q\mathfrak{p}_1 &= \mathfrak{p}_{21} + \bar{Q}\mathfrak{p}_2, \\ \mathfrak{y}_{12} + Q\mathfrak{y}_1 &= \mathfrak{y}_{21} + \bar{Q}\mathfrak{y}_2; & \mathfrak{q}_{12} + Q\mathfrak{q}_1 &= \mathfrak{q}_{21} + Q\mathfrak{q}_2. \end{aligned} \tag{3}$$

[9]) Vgl. Blaschke III, § 70.

Setzt man in diesen Gleichungen die sich aus § 5 (8) ergebenden Linearkombinationen ein, so ergeben sich folgende *Integrabilitätsbedingungen*:

$$\text{I.} \qquad \begin{aligned} \bar{C} &= -Q; & C &= +\bar{Q}, \\ \bar{D} &= -Q; & D &= +\bar{Q}. \end{aligned}$$

(4)

$$\text{II.} \qquad \begin{aligned} -\bar{N} &= +L = Q_1 + \bar{Q}_2 - B\bar{B} + 2Q\bar{Q}, \\ -N &= \bar{B}_2 + 3\bar{B}Q, \\ -\bar{L} &= B_1 + 3B\bar{Q}; \end{aligned}$$

$$\text{III.} \qquad \begin{aligned} N_2 - \bar{N}_1 + \bar{L}\bar{B} + 2QN &= 0, \\ \bar{L}_1 - L_2 - NB + 2\bar{L}\bar{Q} &= 0 \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingungen bilden den Schlußstein im Aufbau des Formelapparates. Zur späteren Anwendung sei das System der Ableitungsgleichungen in Punkt- und Linienkoordinaten hier zusammengestellt. Die Ableitungsgleichungen in *Punktkoordinaten* nehmen die Gestalt an:

(5)

$$\begin{aligned} p_1 &= -\bar{Q}p - y; & q_1 &= +\bar{B}p + \bar{Q}q, \\ p_2 &= -Qp - Bq; & q_2 &= -Qq - y, \\ x_1 &= +\tfrac{1}{2}q; & y_1 &= Np - Lq, \\ x_2 &= +\tfrac{1}{2}p; & y_2 &= Np - \bar{L}q \end{aligned};$$

diejenigen in *Linienkoordinaten* (§ 4, (5)):

(6)

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &= -\bar{Q}\mathfrak{p} - \mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}; & \mathfrak{u}_1 &= -\bar{Q}\mathfrak{u} - L\mathfrak{w}, \\ \mathfrak{p}_2 &= +Q\mathfrak{p} + B\mathfrak{q}; & \mathfrak{u}_2 &= +Q\mathfrak{u} - B\mathfrak{v} - \bar{L}\mathfrak{w}, \\ \mathfrak{q}_1 &= -\bar{B}\mathfrak{p} + Q\mathfrak{q}; & \mathfrak{v}_1 &= +\bar{B}\mathfrak{u} + \bar{Q}\mathfrak{v} - N\mathfrak{w}, \\ \mathfrak{q}_2 &= -Q\mathfrak{q} + \mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}; & \mathfrak{v}_2 &= -Q\mathfrak{v} - \bar{N}\mathfrak{w}, \\ \mathfrak{y}_1 &= N\mathfrak{p} + L\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{v}; & \mathfrak{w}_1 &= \mathfrak{v}, \\ \mathfrak{y}_2 &= \bar{N}\mathfrak{p} + \bar{L}\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{u}; & \mathfrak{w}_2 &= -\mathfrak{u} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4), (5), (6) bilden den Formelapparat der affinen Differentialgeometrie der Flächen und der parabolischen Strahlensysteme. Für die Anwendung des Formelapparates im folgenden werden die zweiten invarianten Ableitungen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gebraucht. Wir stellen sie hier zu-

sammen:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}_{11} &= \mathfrak{p}(-\bar{Q}_1 + \bar{Q}^2 - N) - L\mathfrak{q} + \bar{Q}\mathfrak{y} + \tfrac{1}{2}\bar{Q}\mathfrak{w} - \mathfrak{v},\\
\mathfrak{p}_{12} &= \mathfrak{p}(-\bar{Q}_2 - \bar{Q}Q - \bar{N}) + \mathfrak{q}(-\bar{Q}B - \bar{L}),\\
\mathfrak{p}_{21} &= \mathfrak{p}(Q_1 - Q\bar{Q} - B\bar{B}) + \mathfrak{q}(B_1 + B\bar{Q}) - Q\mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}Q\mathfrak{w},\\
\mathfrak{p}_{22} &= \mathfrak{p}(Q_2 + Q^2) + \mathfrak{q}(B_2) + B\mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}B\mathfrak{w};
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{11} &= -B_1\mathfrak{p} + \mathfrak{q}(\bar{Q}_1 + \bar{Q}^2) + \bar{B}\mathfrak{y} + \tfrac{1}{2}\bar{B}\mathfrak{w},\\
\mathfrak{q}_{12} &= \mathfrak{p}(-\bar{B}_2 - \bar{B}Q) + \mathfrak{q}(+\bar{Q}_2 - \bar{Q}Q - \bar{B}B) + \bar{Q}\mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\bar{Q}\mathfrak{w},\\
\mathfrak{q}_{21} &= \mathfrak{p}(\bar{B}Q + N) + \mathfrak{q}(-Q_1 - Q\bar{Q} + L),\\
\mathfrak{q}_{22} &= \mathfrak{p}\bar{N} + \mathfrak{q}(-Q_2 + Q^2 + \bar{L}) - Q\mathfrak{y} + \tfrac{1}{2}Q\mathfrak{w} + \mathfrak{u}.
\end{aligned}
$$

Man erkennt, daß sich ebenso die dritten und höheren invarianten Ableitungen der Systemstrahlen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ linear aus den Grundvektoren kombinieren lassen; dabei sind die Koeffizienten dieser Linearkombinationen Ausdrücke, die wegen (4) nur von Q; $\bar{Q}$, B, $\bar{B}$ und deren invarianten Ableitungen abhängen, oder, wenn man die Normierung § 5 (6) beachtet, von $\mathfrak{B}$, Q, $\bar{Q}$ und deren invarianten Ableitungen.

Es ist hiermit gezeigt, daß sich sämtliche invarianten Ableitungen, soweit sie existieren, von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ aus den sechs Grundvektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ linear kombinieren lassen lediglich mit Hilfe der drei Invarianten $\mathfrak{B}$, Q, $\bar{Q}$ und deren invarianten Ableitungen. Daher gilt der

Satz[10]) I. *Die Invarianten $\mathfrak{B}$, Q, $\bar{Q}$ und ihre invarianten Ableitungen bilden ein vollständiges Invariantensystem der Affin-Geometrie parabolischer Strahlensysteme.*

Beachtet man jetzt die Gleichungen § 6 (2):

$$
Q = \sum_{i,k} (n^i \bar{n}^k - n^k \bar{n}^i) \frac{\partial n_i}{\partial u^k}; \qquad \bar{Q} = \sum_{i,k} (\bar{n}^i n^k - \bar{n}^k n^i) \frac{\partial \bar{n}_i}{\partial u^k},
$$

so erkennt man, daß bei gegebenen $n_1(u, v)$; $n_2(u, v)$; $\bar{n}_1(u, v)$; $\bar{n}_2(u, v)$ die Invarianten $Q(u, v)$; $\bar{Q}(u, v)$ bestimmt sind. Nach § 2 (19) sind aber mit den Koeffizienten $n_1(u, v)$; $n_2(u, v)$; $\bar{n}_1(u, v)$; $\bar{n}_2(u, v)$ der Linearformen $d\Psi$ und $d\bar{\Psi}$ auch die invarianten Ableitungen gegeben. Daher gilt der

Satz II. *Ist die Invariante $\mathfrak{B}$ und jede der beiden Linearformen $d\Psi$ und $d\bar{\Psi}$ bekannt, d. h. sind $\mathfrak{B}(u, v)$; $n_1(u, v)$; $n_2(u, v)$; $\bar{n}_1(u, v)$ und $\bar{n}_2(u, v)$*

[10]) Die Untersuchungen dieses Paragraphen gehen völlig parallel zu denen, die im Blaschke III S. 318f. für die Flächentheorie von Möbius und Laguerre durchgeführt sind. Bezüglich des Beweises des Satzes I sei auf jene Stelle verwiesen.

gegeben, derart, daß die Gleichungen (4 II, III) *identisch erfüllt sind, so ist das Paar der parabolischen Systeme nebst der Normierung der homogenen Linienkoordinaten bestimmt bis auf raumtreue Affinitäten.*

Bei den letzten Untersuchungen wurde vorausgesetzt, daß die Größen B, $\overline{B}$ nicht verschwinden. Es erhebt sich die Frage: welches ist die geometrische Kennzeichnung der Systeme, in denen $B \equiv 0$ oder $\overline{B} \equiv 0$ wird? Es sei etwa $B \equiv 0$. Dann wird nach (6) $\mathfrak{p}_2 = Q\,\mathfrak{p}$. Auf Grund der Definition des Strahlensystems $\mathfrak{p}(u, v)$ in § 2 muß die Funktionalmatrix den Rang drei haben:

$$\left\| \mathfrak{p}\ \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\ \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial v} \right\|;$$

das heißt aber, daß auch die Matrix

$$\| \mathfrak{p};\ \mathfrak{p}_1;\ \mathfrak{p}_2 \|$$

vom Rang drei ist. Für $B \equiv 0$ ist dies offenbar nicht der Fall. Es folgt daher: ist $B \equiv 0$, so besteht das System $\mathfrak{p}(u, v)$ nur aus ∞^1 Geraden; es fällt daher nicht unter die Definition des § 2. Betrachtet man aber die Brennfläche, so folgt unmittelbar der

Satz III. *Ist $B \equiv 0$ oder $\overline{B} \equiv 0$, so ist die Brennfläche eine geradlinige Fläche, deren Erzeugende die Geraden $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ sind. Ist dagegen $B \equiv 0$ und $\overline{B} \equiv 0$, so ist die Brennfläche eine Fläche zweiten Grades, auf der die $\mathfrak{p}$ die eine Schar, die $\mathfrak{q}$ die andere Schar der Erzeugenden darstellen*[11]).

Für das Folgende sei vorausgesetzt, daß $B \neq 0$ und $\overline{B} \neq 0$.

§ 7.

Einfache geometrische Anwendungen.

1. Affin-Krümmungslinien. Die Affin-Normalen $\mathfrak{y}(u, v)$ der Brennfläche bilden ein Strahlensystem, dessen Torsen auf der Brennfläche x die Affin-Krümmungslinien ausschneiden. Nach § 2 Gl. (5) ist die Differentialgleichung der Torsen eines Systems $\mathfrak{y}(u, v)$

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u}\ \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u}\right) du^2 + 2\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u}\ \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\right) du\, dv + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\ \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\right) dv^2 = 0. \tag{1}$$

Nach § 2 (20) können die Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}$ durch die invarianten Ableitungen $\mathfrak{y}_1$; $\mathfrak{y}_2$ ausgedrückt werden. Dann geht (1) wegen § 2 (8, 16) über in die Gleichung

$$(\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1)\, d\Psi^2 + 2(\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_2)\, d\Psi\, d\overline{\Psi} + (\mathfrak{y}_2\,\mathfrak{y}_2)\, d\overline{\Psi}^2 = 0.$$

---

[11]) Anmerkung: Vergleicht man mit diesen Sätzen die bekannten Sätze über die Picksche Invariante (etwa Blaschke II, S. 123 f.), so sieht man, daß das Produkt $B \cdot \overline{B}$ der Pickschen Invariante entspricht.

Nun ist aber nach § 6 (6) und § 3 (7)

$$(\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_1) = \left(N\mathfrak{p} + L\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{v}\right)\cdot\left(N\mathfrak{p} + L\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{v}\right) = N,$$

$$(\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_2) = \left(N\mathfrak{p} + L\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{v}\right)\cdot\left(\bar{N}\mathfrak{p} + \bar{L}\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{u}\right) = 0,$$

$$(\mathfrak{y}_2\,\mathfrak{y}_2) = \left(\bar{N}\mathfrak{p} + \bar{L}\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{u}\right)\cdot\left(\bar{N}\mathfrak{p} + \bar{L}\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{u}\right) = \bar{L}.$$

Also wird die *Differentialgleichung der Affin-Krümmungslinien*

$$N\,d\Psi^2 + \bar{L}\,d\bar{\Psi}^2 = 0 \tag{3}$$

oder nach § 6 (4)

$$\boxed{(\bar{B}_2 + 3\bar{B}Q)\,d\Psi^2 + (B_1 + 3B\bar{Q})\,d\bar{\Psi}^2 = 0}. \tag{3a}$$

Flächen, deren Affin-Normalen alle durch einen Punkt gehen, heißen *Affin-Sphären*[12]). Da dann das Affin-Normalensystem in ein Strahlenbündel ausartet, werden die Torsen und daher auch die Affin-Krümmungslinien unbestimmt. Es sind also

$$N = 0; \quad \bar{L} = 0 \tag{4}$$

oder

$$\boxed{\bar{B}_2 + 3\bar{B}Q = 0; \quad B_1 + 3B\bar{Q} = 0} \tag{4a}$$

die Differentialgleichungen der Affin-Sphären.

2. Affin-Zentraflächen. Die Affin-Zentraflächen (= Brennflächen des Affin-Normalensystems) werden von den Affin-Normalen eingehüllt. Der zu (u, v) gehörige Punkt einer Zentrafläche kann in der Form geschrieben werden

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} + \sigma\boldsymbol{y}; \tag{5}$$

dabei ist σ so zu bestimmen, daß die Tangentenebene der Zentrafläche die Gerade $\mathfrak{y}$ enthält; d. h. die Matrix der drei uneigentlichen Punkte $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ muß verschwinden

$$\|\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{y}\| = \left\|\tfrac{1}{2}\boldsymbol{q} + \sigma(N\boldsymbol{p} - L\boldsymbol{q}) + \sigma_1\boldsymbol{y};\ \tfrac{1}{2}\boldsymbol{p} + \sigma(\bar{N}\boldsymbol{p} - \bar{L}\boldsymbol{q}) + \sigma_2\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{y}\right\| = 0.$$

Man erhält daraus für σ die quadratische Gleichung

$$\sigma^2(\bar{L}N - \bar{N}L) + \tfrac{1}{2}\sigma(\bar{N} - L) + \tfrac{1}{4} = 0.$$

Daraus folgt (§ 6 (4 II))

$$\sigma = \frac{L \pm \sqrt{-\bar{L}N}}{2(\bar{L}N - \bar{N}L)} = \frac{1}{\sqrt{-L\bar{N}} \pm \sqrt{-\bar{L}N}}, \tag{6}$$

[12]) Vgl. etwa Blaschke II, § 76 und 78.

und die Koordinaten der Affin-Hauptkrümmungsmittelpunkte werden

$$\left.\begin{matrix}\bar{b}\\ b\end{matrix}\right\} = x + \frac{L \pm \sqrt{-\bar{L}N}}{2(N\bar{L} - L\bar{N})}\, y. \tag{7}$$

Schreibt man diese Gleichungen homogen, so nehmen sie die Form an

$$\left.\begin{matrix}\bar{b}\\ b\end{matrix}\right\} = 2\left(\sqrt{-L\bar{N}} \pm \sqrt{-\bar{L}N}\right) x + y,$$

und man erkennt, daß für

$$\sqrt{-L\bar{N}} + \sqrt{-\bar{L}N} = 0 \quad \text{oder} \quad \sqrt{-L\bar{N}} - \sqrt{-\bar{L}N} = 0$$

einer der Affin-Hauptkrümmungsmittelpunkte im Unendlichen liegt. Dies ist daher die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$\bar{N}L - \bar{L}N = 0. \tag{8}$$

Aus (7) folgen unmittelbar die Koordinaten der *Mittenfläche des Affin-Normalensystems*

$$z = x + \frac{L}{2(N\bar{L} - L\bar{N})}\, y. \tag{9}$$

Der Punkt x der ursprünglichen Fläche fällt mit z zusammen, wenn die Fläche $x(u, v)$ Affin-Minimalfläche ist. Deshalb ist

$$\boxed{L = -\bar{N} = 0} \tag{10}$$

die Differentialgleichung der Affin-Minimalflächen[13]).

Aus (4), (8), (10) folgt sofort der bekannte Satz[14]): Jede Affin-Sphäre, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt, ist Affin-Minimalfläche;

$$L = N = \bar{L} = \bar{N} = 0 \tag{11}$$

sind daher die Differentialgleichungen der uneigentlichen Affin-Sphären.

3. Es soll der vierte harmonische Punkt l von x bezüglich der beiden Affin-Hauptkrümmungsmittelpunkte berechnet werden: Die Hauptkrümmungsmittelpunkte seien wie in (5)

$$b = x + \sigma y,$$
$$\bar{b} = x + \bar{\sigma} y.$$

Der Flächenpunkt x kann aus b und $\bar{b}$ linear kombiniert werden

$$x = \frac{1}{\bar{\sigma} - \sigma}(\bar{\sigma} b - \sigma \bar{b}).$$

Dann ist der vierte harmonische Punkt gegeben durch

$$l = \frac{1}{\bar{\sigma} - \sigma}(\bar{\sigma} b + \sigma \bar{b})$$

[13]) Blaschke II, § 68ff.
[14]) Blaschke II, § 78.

oder

$$\boldsymbol{l} = \frac{1}{\bar{\sigma} - \sigma}[(\bar{\sigma} + \sigma)\boldsymbol{x} + 2\sigma\bar{\sigma}\boldsymbol{y}].$$

Für σ und $\bar{\sigma}$ werden aus (7) die Werte eingesetzt; dann folgt für $\boldsymbol{l}$ bei Vernachlässigung eines für homogene Koordinaten unwesentlichen Faktors

$$\boldsymbol{l} = L\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}. \tag{12}$$

§ 8.

Das Paar der Krümmungskegel.

In diesem Paragraphen mögen einige merkwürdige Eigenschaften der Haupttangenten-Systeme $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{q}(u, v)$ bewiesen werden. Es sei durch die Differentialgleichung (vgl. § 2 (8) und (18))

$$\alpha\, d\Psi + \bar{\alpha}\, d\bar{\Psi} = 0 \tag{1}$$

eine einparametrische Kurvenschar auf der Fläche $\boldsymbol{x}(u, v)$ oder, was dasselbe ist, eine einparametrische Schar von Regelflächen in jedem der Systeme $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ definiert, so daß durch jeden Strahl $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ gerade eine zu (1) gehörige Regelfläche hindurchgeht. Wir betrachten in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ drei infinitesimal-benachbarte Strahlen einer solchen Regelfläche. Diese bestimmen eine Fläche zweiten Grades, die Schmieg-F_2 einer solchen Regelfläche, deren Mittelpunkt $\boldsymbol{m}$ sei (entsprechend für das System $\mathfrak{q}$ der Mittelpunkt $\overline{\boldsymbol{m}}$). Wird nun die Gesamtheit der Flächen zweiter Ordnung betrachtet, die auf diese Weise durch je drei infinitesimal-benachbarte Systemstrahlen von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ gelegt werden können, so gilt

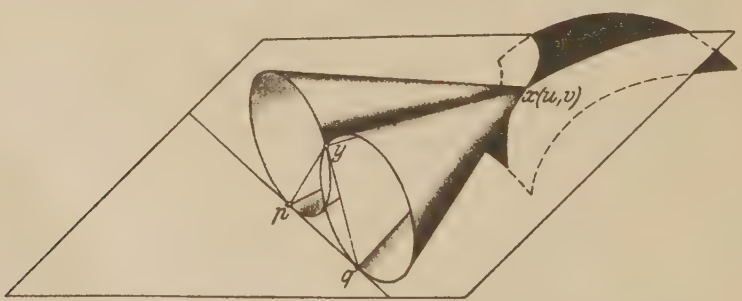

Fig. 5. Skizze zur Veranschaulichung des Krümmungskegelpaares.

Satz IV. *Die Mittelpunkte* $\boldsymbol{m}$ *dieser* ∞^2 *Flächen zweiter Ordnung bilden einen quadratischen Kegel — den* $\mathfrak{p}$*-Krümmungskegel — mit der Spitze im Brennpunkte* $\boldsymbol{x}$ *des Systemstrahles* $\mathfrak{p}$*, der die Tangentenebene der Brennfläche als Tangentenebene besitzt und den Systemstrahl enthält* (siehe Fig. 5).

Ein analoger Satz gilt natürlich für das System $\mathfrak{q}$ und gibt den $\mathfrak{q}$-Krümmungskegel. Es existiert also in jedem Flächenpunkt ein Paar von Krümmungskegeln mit gemeinsamer Spitze x, welches die Tangentenebene der Fläche x als gemeinsame Tangentenebene besitzt.

Der Beweis des Satzes IV ist außerordentlich einfach. Drei infinitesimalbenachbarte Erzeugende einer Regelfläche (1) werden bestimmt durch die Sechservektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_\alpha$; $\mathfrak{p}_{\alpha\alpha}$. Dabei bedeuten $\mathfrak{p}_\alpha$ und $\mathfrak{p}_{\alpha\alpha}$ die invarianten Ableitungen von $\mathfrak{p}$ längs der Regelflächen (1). Solche Ableitungen werden für eine Größe $S(u, v)$ [15])

$$(2)\qquad \begin{aligned} S_\alpha &= \bar{\alpha}\, S_1 - \alpha\, S_2,\\ S_{\alpha\alpha} &= \bar{\alpha}_\alpha S_1 - \alpha_\alpha S_2 + \bar{\alpha}^2 S_{11} - \alpha\,\bar{\alpha}\,(S_{12} + S_{21}) + \alpha^2 S_{22}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\bar{\alpha}_\alpha = \bar{\alpha}\,\bar{\alpha}_1 - \alpha\,\bar{\alpha}_2 \quad \text{und} \quad \alpha_\alpha = \bar{\alpha}\,\alpha_1 - \alpha\,\alpha_2.$$

Man erhält daher

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{p}_\alpha &= \bar{\alpha}\,\mathfrak{p}_1 - \alpha\,\mathfrak{p}_2,\\ \mathfrak{p}_{\alpha\alpha} &= \bar{\alpha}_\alpha \mathfrak{p}_1 - \alpha_\alpha \mathfrak{p}_2 + \bar{\alpha}^2 \mathfrak{p}_{11} - \alpha\,\bar{\alpha}\,(\mathfrak{p}_{12} + \mathfrak{p}_{21}) + \alpha^2 \mathfrak{p}_{22}. \end{aligned}$$

Hier sind nach § 6 (6) und § 6 (7) für $\mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_{11}$; $\mathfrak{p}_{12}$; $\mathfrak{p}_{21}$; $\mathfrak{p}_{22}$ die Linearkombinationen einzusetzen.

Der Mittelpunkt $\boldsymbol{m}$ der durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_\alpha$, $\mathfrak{p}_{\alpha\alpha}$ aufgespannten Fläche zweiter Ordnung wird nach § 1 (36)

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_\alpha \mathfrak{p}\, \mathfrak{p}_{\alpha\alpha} - \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_{\alpha\alpha}\mathfrak{p}_\alpha \mathfrak{p}.$$

Setzt man hier für $\mathfrak{p}_\alpha$, $\mathfrak{p}_{\alpha\alpha}$ die Werte ein und beachtet die Formeln des § 1 und § 4 (7) und (8), so erhält man für den $\mathfrak{p}$-Krümmungskegel

$$(5)\qquad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{x}\cdot 2\varrho + \bar{\alpha}\,[-\alpha^2 B\boldsymbol{p} - \alpha\,\bar{\alpha}\,B\boldsymbol{q} + \bar{\alpha}^2 \boldsymbol{y}],$$

dabei ist

$$\varrho = (\bar{\alpha}\,\alpha_\alpha - \alpha\,\bar{\alpha}_\alpha)\,B + \bar{\alpha}^3 L + \alpha\,\bar{\alpha}^2 (B\bar{Q} + B_1 - \bar{L}) + \bar{\alpha}\,\alpha^2 (BQ - B_2) + \alpha^3 B^2.$$

Nach § 6 (4) ist aber $\bar{L} = -B_1 - 3B\bar{Q}$, man kann also ϱ schreiben

$$(6)\quad \varrho = (\bar{\alpha}\,\alpha_\alpha - \alpha\,\bar{\alpha}_\alpha)\,B + \bar{\alpha}^3 L + 2\alpha\,\bar{\alpha}^2 (B_1 + 2B\bar{Q}) + \bar{\alpha}\,\alpha^2 (BQ - B_2) + \alpha^3 B^2.$$

Durch eine vollkommen gleichlaufende Rechnung findet man den Krümmungskegel des Systems $\mathfrak{q}(u, v)$. Es ist

$$\overline{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{W}\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_\alpha \mathfrak{q}_{\alpha\alpha} - \boldsymbol{W}\mathfrak{q}_{\alpha\alpha}\mathfrak{q}_\alpha \mathfrak{q};$$

daraus folgt für den $\mathfrak{q}$-Krümmungskegel

$$(7)\qquad \overline{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{x}\cdot 2\bar{\varrho} + \alpha\,[-\bar{\alpha}^2 \bar{B}\boldsymbol{q} - \alpha\,\bar{\alpha}\,\bar{B}\boldsymbol{p} - \alpha^2 \boldsymbol{y}]$$

mit

$$(8)\quad \bar{\varrho} = (\bar{\alpha}\,\alpha_\alpha - \alpha\,\bar{\alpha}_\alpha)\,\bar{B} + \alpha^3 \bar{N} + 2\alpha^2 \bar{\alpha}\,(\bar{B}_2 + 2\bar{B}\bar{Q}) + \alpha\,\bar{\alpha}^2 (\bar{B}\bar{Q} - \bar{B}_1) - \bar{\alpha}^3 \bar{B}^2.$$

[15]) Vgl. Blaschke III, § 73.

Es werde kurz gezeigt, daß die Flächen (5) und (7) die Eigenschaften des Satzes IV besitzen: Da es in (1) nur auf das Verhältnis $\alpha : \bar{\alpha}$ ankommt, kann nach Belieben $\alpha = 1$ oder $\bar{\alpha} = 1$ gesetzt werden. Ist etwa $\bar{\alpha} = 1$, dann sind α und α_a die Parameter der Fläche $\boldsymbol{m}$. Führt man statt α_a den neuen Parameter ϱ ein, so erkennt man in (5) sofort den Kegel, dessen Spitze im Brennpunkt $\boldsymbol{x}$ liegt.

Wir betrachten die uneigentliche Kurve des Kegels (5)

$$\boldsymbol{m}_\infty = -\alpha^2 B\boldsymbol{p} - \alpha\bar{\alpha} B\boldsymbol{q} + \bar{\alpha}^2 \boldsymbol{y}. \tag{9}$$

Offenbar geht dieser Kegelschnitt durch die Punkte $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{y}$. Setzt man vorübergehend $\alpha = 1$, so daß $\bar{\alpha}$ der Parameter der Kurve wird, dann ist

$$\frac{d\boldsymbol{m}_\infty}{d\bar{\alpha}} = -B\boldsymbol{q} + 2\bar{\alpha}\boldsymbol{y},$$

und man sieht: die Tangente im Punkte $\boldsymbol{p}$ (d. h. $\bar{\alpha} = 0$) an den Kegelschnitt ist die Verbindungsgerade $\mathfrak{w}$ von $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$, d. h. aber: die uneigentliche Gerade $\mathfrak{w}$ der Tangentenebene der Brennfläche $\boldsymbol{x}$. Analog folgt, wenn man jetzt $\bar{\alpha} = 1$ setzt und α als Parameter des Kegelschnittes betrachtet,

$$\frac{d\boldsymbol{m}_\infty}{d\alpha} = -2\alpha B\boldsymbol{p} - B\boldsymbol{q}.$$

Daraus ergibt sich für $\alpha = 0$: die Verbindungsgerade der Punkte $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{y}$ ist Tangente an den Kegelschnitt im Punkte $\boldsymbol{y}$.

Da für den $\mathfrak{q}$-Kegel $\overline{\boldsymbol{m}}$ wieder Entsprechendes gilt, so folgt der

Satz V. *Die Affin-Normale* $\mathfrak{y}$ *der Fläche* $\boldsymbol{x}$ *ist eine gemeinsame Erzeugende der beiden Krümmungskegel, und zwar derart, daß die durch* $\mathfrak{y}$ *und* $\mathfrak{p}$ *gehende Ebene den* $\mathfrak{q}$*-Kegel, die durch* $\mathfrak{y}$ *und* $\mathfrak{q}$ *gehende Ebene den* $\mathfrak{p}$*-Kegel längs* $\mathfrak{y}$ *berührt* (siehe Fig. 5).

Satz V gibt eine neue geometrische Kennzeichnung der Affin-Normalen $\mathfrak{y}$ eines Flächenpunktes (vgl. hierzu S. 249).

Aus (5) und (7) können noch einige Sätze abgelesen werden. Wird z. B. in (5) wieder $\bar{\alpha} = 1$ gesetzt und werden α und α_a als Parameter des Kegels betrachtet, so sieht man, daß die Kurven $\alpha = \text{konst.}$ auf dem Krümmungskegel gerade die Erzeugenden des Kegels sind. Diese Tatsache gibt ein Analogon zum Satz von Meusnier[16]) der elementaren Flächentheorie:

Satz VI. *Die Mittelpunkte der Schmieg-*F_3 *aller Regelflächen des Systems* $\mathfrak{p}$ *bzw.* $\mathfrak{q}$, *die durch dasselbe Paar konsekutiver Systemstrahlen* $\mathfrak{p}, \mathfrak{p} + d\mathfrak{p}$ *bzw.* $\mathfrak{q}, \mathfrak{q} + d\mathfrak{q}$ *hindurchgehen, liegen auf einer Geraden, die Erzeugende eines Krümmungskegels ist.*

---

[16]) Vgl. Blaschke I, § 34.

Den Satz VI kann man umkehren. Da ein Paar konsekutiver Systemstrahlen eine Fortschreitungsrichtung $\alpha : \bar{\alpha}$ auf der Brennfläche x bestimmt, gilt der

Satz VII. *Jeder Erzeugenden des* $\mathfrak{p}$*-Kegels und jeder Erzeugenden des* $\mathfrak{q}$*-Kegels entspricht je eine Fortschreitungsrichtung* $\alpha : \bar{\alpha}$ *auf der Fläche* x.

Es sei gestattet, hier zwei bereits bekannte Sätze zu beweisen, da sich die Beweise durch außerordentliche Kürze auszeichnen. Die Affin-Normale $\mathfrak{y}$ ist eine Schnitterzeugende der beiden Krümmungskegel. Da für $\alpha = 0$ der Punkt m_∞ (Gl. 9) und für $\bar{\alpha} = 0$ der Punkt $\overline{m}_\infty$ in den uneigentlichen Punkt y der Affin-Normalen $\mathfrak{y}$ fällt, folgt aus Satz VI sofort der

Satz VIII[17]). *Die Mittelpunkte der Schmieg-*F_2 *aller Regelflächen des Systems* $\mathfrak{p}$ *bzw.* $\mathfrak{q}$, *die durch zwei längs der Richtung* $d\overline{\Psi} = 0$ *bzw.* $d\Psi = 0$ *konsekutive Strahlen* $\mathfrak{p}, \mathfrak{p} + d\mathfrak{p}$ *bzw.* $\mathfrak{q}, \mathfrak{q} + d\mathfrak{q}$ *hindurchgehen, liegen auf der Affin-Normalen* $\mathfrak{y}$. *D. h.: Nach Satz* VII *werden der Affin-Normalen die beiden Asymptotenrichtungen der Fläche* x *zugeordnet.*

Im Anschluß an Satz VIII ergibt sich leicht ein schon A. Demoulin bekannter Satz. Setzen wir in (5) $\alpha = 0$ und $\bar{\alpha} = 1$, so wird

$$m = 2Lx + y; \tag{10}$$

setzen wir dagegen in (7) $\bar{\alpha} = 0$ und $\alpha = 1$, so wird

$$\overline{m} = 2\overline{N}x - y. \tag{11}$$

Beachtet man, daß nach § 6 (4 II) $\overline{N} = -L$ ist, so kann $\overline{m}$ geschrieben werden

$$\overline{m} = -2Lx - y. \tag{11a}$$

Das heißt, da wir in homogenen Koordinaten rechnen, m und $\overline{m}$ fallen zusammen. Ferner zeigt ein Vergleich mit § 7 (12), daß m auch mit jenem Punkte l zusammenfällt. Wir formulieren daher den

Satz[18]) IX. *Der Mittelpunkt der Lie-*F_2 *ist der vierte harmonische Punkt des Flächenpunktes* x *bezüglich der Affin-Hauptkrümmungsmittelpunkte.*

Wir fahren in der Untersuchung der Krümmungskegel fort. Zwei quadratische Kegel mit gemeinsamer Spitze schneiden sich in vier Erzeugenden, von denen uns bisher nur eine, nämlich die Affin-Normale $\mathfrak{y}$, bekannt ist.

---

[17]) Vgl. Blaschke III, S. 457.

[18]) Vgl. Blaschke II, S. 223.

Die Ausdrücke für die unendlich fernen Kegelschnitte der Krümmungskegel lassen sich in der Form schreiben [bei Beachtung der Normierung § 5 (6)]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}_\infty &= -\alpha B(\alpha \boldsymbol{p} + \bar{\alpha}\boldsymbol{q}) + \bar{\alpha}^2 \boldsymbol{y}, \\ \overline{\boldsymbol{m}}_\infty &= -\bar{\alpha} B(\alpha \boldsymbol{p} + \bar{\alpha}\boldsymbol{q}) - \alpha^2 \boldsymbol{y}. \end{aligned} \tag{12}$$

Aus dieser Form der Kegelschnittdarstellung läßt sich die in Satz VII betonte Zuordnung zwischen den Kegelerzeugenden und den Fortschreitungsrichtungen auf der Brennfläche konstruktiv erfassen. Ist etwa durch das Verhältnis $\alpha : \bar{\alpha}$ auf der Fläche im Punkte $\boldsymbol{x}$ eine Fortschreitungsrichtung gegeben, dann ist $\boldsymbol{x}_\alpha$ der uneigentliche Punkt der in jener Richtung gezogenen Tangente an die Fläche in $\boldsymbol{x}$. Nach (2) und § 6 (5) ist

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\boldsymbol{q} - \alpha \boldsymbol{p}).$$

Nimmt man jetzt die zu $\alpha : \bar{\alpha}$ konjugierte Fortschreitungsrichtung $\alpha : -\bar{\alpha}$ auf der Fläche und nennt $\boldsymbol{s}$ den uneigentlichen Punkt ihrer Tangente, dann ist $\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\boldsymbol{q} + \alpha \boldsymbol{p})$. Die Verbindungsgerade von $\boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{s}$ schneidet die Kegelschnitte noch in je einem Punkt; dieser ist nach (12) der uneigentliche Punkt der Erzeugenden jedes der beiden Kegel, die der Fortschreitungsrichtung $\alpha : \bar{\alpha}$ auf der Fläche zugeordnet werden. Es gilt daher der

Satz X. *Sind im Punkte $\boldsymbol{x}$ zwei einander konjugierte Flächentangenten gegeben, so schneidet die durch die Affin-Normale $\mathfrak{y}$ und eine dieser Tangenten gelegte Ebene jeden Kegel gerade in derjenigen Erzeugenden, die nach Satz* VII *der konjugierten Tangentenrichtung zugeordnet wird.*

Verbinden wir jetzt $\boldsymbol{y}$ mit den drei anderen Schnittpunkten der beiden Kegelschnitte, so schneiden die drei Verbindungsgeraden die gemeinsame Tangente $\mathfrak{w}$ der Kegelschnitte in drei Punkten. Nehmen wir zu jedem von diesen den vierten harmonischen bezüglich $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$, so erhalten wir nach den Sätzen VII und X die unendlich fernen Punkte der drei Flächentangenten, deren Richtungen den Kegelerzeugenden zugeordnet sind. Es gibt also in jedem Flächenpunkt drei ausgezeichnete Fortschreitungsrichtungen, die zu den Haupttangentenrichtungen apolar sind. Es sind dies die Darboux-Tangenten[19]) des Flächenpunktes, auf die wir von einer ganz neuen Seite gestoßen sind. Die Apolarität folgt hier unmittelbar aus der Konfiguration der beiden Kegelschnitte (12). Da sich aber die beiden Kegelschnitte mit *reellem* Grunddreieck nur in zwei reellen Punkten schneiden, da ferner die Punkte $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ unseres Polardreiecks nur für hyperbolische Flächenpunkte reell sind, gilt der

[19]) Vgl. etwa Blaschke II, S. 112, auch S. 129, Aufg. 7.

Satz XI. *Auf jeder nicht geradlinigen, hyperbolisch gekrümmten Fläche existiert genau eine reelle, einparametrische, einfache Kurvenschar* $d\vartheta = 0$ *mit der Eigenschaft: die Mittelpunkte der Schmieg-*F_2 *aller Regelflächen des Systems* $\mathfrak{p}$, *die durch zwei längs einer* ϑ*-Kurve konsekutive Strahlen* $\mathfrak{p}, \mathfrak{p} + d\mathfrak{p}$ *hindurchgehen, und diejenigen der Regelflächen des Systems* $\mathfrak{q}$, *die durch zwei längs derselben* ϑ*-Kurve konsekutive Strahlen* $\mathfrak{q}, \mathfrak{q} + d\mathfrak{q}$ *gehen, liegen auf ein und derselben Geraden* $\mathfrak{r}$ (siehe auch Fig. 5 und 6).

Setzt man in (12) $\alpha = 1$, $\bar{\alpha} = -1$, so erhält man den uneigentlichen Punkt $\boldsymbol{r}$ der Geraden $\mathfrak{r}$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{m}_\infty = -\overline{\boldsymbol{m}}_\infty = -B\boldsymbol{p} + B\boldsymbol{q} + \boldsymbol{y} \tag{13}$$

und die Linearform

$$d\vartheta = d\Psi - d\overline{\Psi} = 0. \tag{14}$$

$d\vartheta = 0$ gibt die einzige Schar der auf einer hyperbolisch gekrümmten Fläche reellen Darboux-Kurven; in der Tatsache, daß $d\vartheta = 0$ die eine Schar der Diagonalkurven des durch $d\Psi = 0$ und $d\overline{\Psi} = 0$ aufgespannten Netzes darstellt, erkennt man eine Auswirkung der Normierung (vgl. § 9).

Obwohl für eine elliptisch gekrümmte Fläche die Haupttangentensysteme imaginär sind, führen wir dennoch den Satz an:

Satz XIa. *Auf jeder nicht geradlinigen, elliptisch gekrümmten Fläche* $\boldsymbol{x}(u, v)$ *existieren genau drei reelle, einfache, einparametrische Kurvenscharen mit der im Satz* XI *angegebenen Eigenschaft.*

Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch eine Umformung von (12) angegeben, die die gegenseitige Lage der beiden Kegelschnitte hervorhebt: Geht man nämlich in der uneigentlichen Ebene zu gewöhnlichen, projektiven Punktkoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 über, so daß die Tetraeder-Eckpunkte die Koordinaten erhalten:

$$\boldsymbol{p} = (1:0:0), \quad \boldsymbol{q} = (0:1:0), \quad \boldsymbol{y} = (0:0:1).$$

Dann ist:

$$\xi_1 = -\alpha^2 B, \quad \xi_2 = -\alpha\bar{\alpha}B, \quad \xi_3 = \bar{\alpha}^2$$

die Parameterdarstellung des Kegelschnittes $\boldsymbol{m}_\infty$ und

$$\xi_1 = -\alpha\bar{\alpha}B; \quad \xi_2 = -\bar{\alpha}^2 B; \quad \xi_3 = -\alpha^2$$

diejenige von $\overline{\boldsymbol{m}}_\infty$, und man erhält als Gleichung der uneigentlichen Kurve des

$\mathfrak{p}$-Kegels: $\xi_2^2 + B\xi_1\xi_3 = 0;$

$\mathfrak{q}$-Kegels: $\xi_1^2 - B\xi_2\xi_3 = 0.$

§ 9.

Das System der Darboux-Tangenten.

Geometrische Deutung der Normierung der homogenen Linienkoordinaten (§ 5) und des Verschwindens der Invarianten Q und $\bar{Q}$.

Auf der Brennfläche $x(u, v)$ sind uns drei einfache, einparametrische Kurvenscharen bekannt: die beiden Scharen von Asymptotenlinien $d\Psi = 0$, $d\overline{\Psi} = 0$ und die auf hyperbolisch gekrümmten Flächen einzige reelle Schar der Darboux-Kurven $d\vartheta = 0$. Die Tangenten an die Kurven $d\Psi = 0$ bilden das System $\mathfrak{p}(u, v)$, die Tangenten an $d\overline{\Psi} = 0$ das System $\mathfrak{q}(u, v)$. Es liegt nahe, auch dasjenige Strahlensystem zu betrachten, das von den Tangenten $\mathfrak{d}(u, v)$ der Darboux-Kurven $d\vartheta = 0$ gebildet wird. Nach dem vorigen Paragraphen ist die Differentialgleichung der Darboux-Kurven:

$$d\vartheta = d\Psi - d\overline{\Psi} = 0.$$

Wir bestimmen die Tangente der durch den Flächenpunkt x gehenden Darboux-Kurve. Nach § 8 (2) ist die invariante Ableitung von x nach einer durch

$$\alpha\, d\Psi + \bar{\alpha}\, d\overline{\Psi} = 0$$

gegebenen Richtung $x_\alpha = \bar{\alpha} x_1 - \alpha x_2$; in unserem Fall der ϑ-Kurve ist $\bar{\alpha} = -1$ und $\alpha = 1$; und es wird

$$x_\vartheta = -x_1 - x_2$$

oder nach § 6 (5)

$$x_\vartheta = -\tfrac{1}{2}(q + p). \tag{1}$$

x_ϑ ist der unendlich ferne Punkt der gesuchten Tangente. Die Tangente $\mathfrak{d}$ selbst hat dann Linienkoordinaten, die zu $-\frac{1}{2}(-\mathfrak{q} + \mathfrak{p})$ proportional sind. Da ein konstanter[20]) Faktor unwesentlich ist, erhält man schließlich

$$\boxed{\mathfrak{d} = \mathfrak{p} - \mathfrak{q}}. \tag{2}$$

Daß $\mathfrak{d} = \mathfrak{p} - \mathfrak{q}$ in der Tat die gesuchte Tangente ist, sieht man sofort ein: es geht nämlich die Gerade $\mathfrak{d}$ durch x, und es ist der uneigentliche Punkt $W\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{d}$

$$W\mathfrak{d} = p + q,$$

d. h. der Punkt x_ϑ.

---

[20]) Hier soll die in § 5 getroffene Normierung geometrisch interpretiert werden; wir dürfen daher nur einen *konstanten* Faktor vernachlässigen.

Um den Einfluß der Normierung der homogenen Linienkoordinaten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zu erkennen, führen wir wieder die Bezeichnung $\hat{\mathfrak{p}}$ und $\hat{\mathfrak{q}}$ für das normierte System ein (vgl. § 5).

Wir betrachten die Gerade

$$\mathfrak{d} = \hat{\mathfrak{p}} - \hat{\mathfrak{q}}.$$

Bei einer Umnormierung mit $\hat{\mathfrak{p}} = \lambda\mathfrak{p}$ und $\hat{\mathfrak{q}} = \mu\mathfrak{q}$ wird daraus:

$$\mathfrak{d} = \lambda\mathfrak{p} - \mu\mathfrak{q}. \tag{3}$$

Es sei jetzt daran erinnert, daß wir im § 5 die Normierung in zwei Schritten vollzogen haben, erstens durch $E = 1$, zweitens durch $B \equiv \overline{B}$. Der zweite Schritt bestimmte das Verhältnis $\lambda : \mu$. Der Strahl $\mathfrak{p} - \mathfrak{q}$ der *nicht*-normierten Systeme kann eine beliebige Lage in dem durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ aufgespannten Strahlenbüschel einnehmen. Unsere Normierung $B \equiv \overline{B}$ (§ 5 (6)) bringt den Strahl $\mathfrak{p} - \mathfrak{q}$ gerade in die Darboux-Tangente; d. h. durch die Normierung $B \equiv \overline{B}$ hat der Strahl $\mathfrak{p} - \mathfrak{q}$ eine bestimmte geometrische Bedeutung erlangt. Durch $B \equiv \overline{B}$ ist aber nur das Verhältnis $\lambda : \mu$ bestimmt; man erkennt, daß dadurch die Darboux-Tangente als solche noch *nicht* normiert ist. Es ist wegen $B \equiv \overline{B}$ in (3) $\lambda = \mu$; und es wird zunächst:

$$\mathfrak{d} = \lambda(\mathfrak{p} - \mathfrak{q}).$$

Der andere Schritt der Normierung, nämlich $E = 1$, müßte also die Gerade $\mathfrak{d}$ normieren. Die Normierung der beiden Systeme $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{q}(u, v)$ ist durch $B \equiv \overline{B}$ zurückgeführt auf die Normierung des einen Systems

$$\hat{\mathfrak{d}}(u, v) = \lambda(u, v)\,\mathfrak{d}(u, v).$$

Es fragt sich jetzt, welche geometrische Bedeutung hat die Normierung $E = 1$ für das System $\mathfrak{d}(u, v)$? Die Gerade $\mathfrak{d}(u_0, v_0)$ ist Tangente an die durch $x(u_0, v_0)$ gehende Kurve $d\vartheta = 0$. Bezeichnen wir die invariante Ableitung von $\hat{\mathfrak{d}}$ nach der ϑ-Kurve mit $\hat{\mathfrak{d}}_\vartheta$, dann gilt

$$\hat{\mathfrak{d}}_\vartheta = \lambda_\vartheta\,\mathfrak{d} + \lambda\,\mathfrak{d}_\vartheta; \tag{4}$$

d. h. die Gerade $\mathfrak{d}_\vartheta$ des *nicht*-normierten Systems $\mathfrak{d}(u, v)$ hat keine bestimmte Lage; die Normierung $E = 1$ bestimmt erst die Lage von $\hat{\mathfrak{d}}_\vartheta$. Die Normierung $E = 1$ ist geometrisch gedeutet, wenn es gelingt, für die Gerade $\hat{\mathfrak{d}}_\vartheta$ eine geometrische Konstruktion anzugeben.

Wir wenden uns zur Untersuchung des Systems $\mathfrak{d}(u, v)$ der Darboux-Tangenten. Man erkennt ohne Rechnung, daß unsere Fläche $x(u, v)$ die eine Brennfläche des Systems $\mathfrak{d}(u, v)$ ist, und daß die Torsen des Systems $\mathfrak{d}(u, v)$ die Brennfläche $x(u, v)$ längs der Kurven des Netzes

$$d\Psi^2 - d\overline{\Psi}^2 = 0$$

berühren, d. h. längs der Diagonalkurven unseres normierten Asymptotenliniennetzes oder, was dasselbe ist, längs der Darboux-Kurven $d\vartheta = 0$ und der dazu konjugierten Kurven. Die zweite Brennfläche des Systems $\mathfrak{d}(u, v)$ werde beschrieben von dem Punkte $\boldsymbol{d}(u, v)$. Die zum Punkt u, v gehörige Tangentenebene der Brennfläche $\boldsymbol{d}(u, v)$ ist bekanntlich zugleich die Tangentenebene an die durch $\mathfrak{d}(u, v)$ gehende Torse der Schar $d\vartheta = 0$. Diese Ebene wird aufgespannt durch die Geraden $\mathfrak{d}(u, v)$ und $\mathfrak{d}_\vartheta(u, v)$; im *nicht*-normierten System $\mathfrak{d}(u, v)$ ist daher $\mathfrak{d}_\vartheta$ irgendeine Gerade des durch den Punkt $\boldsymbol{x}$ gehenden Strahlenbüschels dieser Brennebene des $\mathfrak{d}$-Systems. Zur Berechnung von $\mathfrak{d}_\vartheta$ bilden wir:

$$\mathfrak{d}_1 = (-\bar{Q} + B)\,\mathfrak{p} - \bar{Q}\,\mathfrak{q} - \mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{w},$$

$$\mathfrak{d}_2 = Q\,\mathfrak{p} + (Q + B)\,\mathfrak{q} - \mathfrak{y} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}.$$

Daraus wird:

$$(5) \qquad \mathfrak{d}_\vartheta = -\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2 = -(Q - \bar{Q} + B)\cdot(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) + 2\,\mathfrak{y}.$$

Aus dieser Formel folgt: erstens: $(\mathfrak{d}_\vartheta \mathfrak{d}_\vartheta) = 0$; also $\mathfrak{d}_\vartheta$ ist, wie es sein muß, eine Gerade; zweitens: die Gerade $\mathfrak{d}_\vartheta$ liegt in der durch die Geraden $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{r}$ (vgl. § 8 (13)) aufgespannten Ebene; d. h. in der Ebene, die das Paar der Krümmungskegel in den reellen Doppelerzeugenden schneidet. Ferner liegt $\mathfrak{d}_\vartheta$ in derjenigen Brennebene des Systems $\mathfrak{d}(u, v)$, die nicht mit der Tangentenebene der Fläche $\boldsymbol{x}(u, v)$ zusammenfällt. Damit ist für $\mathfrak{d}_\vartheta$ eine invariante Konstruktion angegeben und der Rest der Normierung gedeutet[21]).

Das System $\mathfrak{d}(u, v)$ erlaubt uns noch einen Einblick in die Bedeutung der Invarianten Q und $\bar{Q}$. Nach § 6 besitzt die Fläche $\boldsymbol{x}$ die drei Invarianten $\mathfrak{B}$, Q, $\bar{Q}$ (bzw. B, $\bar{B}$, Q, $\bar{Q}$). Wir sahen, daß für $B = 0$ bzw. $\bar{B} = 0$ die Fläche $\boldsymbol{x}(u, v)$ eine geradlinige Fläche ist. Jedoch mußte ein solcher Fall ausgeschlossen werden. Man wird fragen, welche geometrische Eigenschaft durch das Verschwinden von Q oder $\bar{Q}$ gekennzeichnet wird. Wir betrachten das System der Darboux-Tangenten $\mathfrak{d}(u, v)$. Schreiten wir jetzt auf der Fläche $\boldsymbol{x}(u, v)$ von dem untersuchten Punkte $\boldsymbol{x}(u_0, v_0)$ auf einer Asymptotenlinie $d\overline{\Psi} = 0$ fort, so beschreiben die zugehörigen Darboux-Tangenten $\mathfrak{d}(u, v)$ eine geradlinige Fläche und die uneigentlichen Punkte $\boldsymbol{W}\mathfrak{d}$ der Darboux-Tangenten eine Kurve. Die Tangente dieser

---

[21]) In Fig. 6 kann der uneigentliche Punkt $\boldsymbol{W}\mathfrak{d}_\vartheta$ von $\mathfrak{d}_\vartheta$ leicht angegeben werden: schreitet man längs der Darboux-Kurve vom Punkte $\boldsymbol{x}$ aus fort, so beschreibt der uneigentliche Punkt $\boldsymbol{W}\mathfrak{d}$ der Darboux-Tangente eine Kurve. Bringt man die Tangente dieser Kurve (in Fig. 6 gestrichelt) mit der Geraden $\|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{r}\|$ zum Schnitt, so ist der Schnittpunkt der uneigentliche Punkt von $\boldsymbol{W}\mathfrak{d}_\vartheta$.

Kurve im Punkte $W\mathfrak{d}(u_0 v_0)$ ist die Verbindungsgerade der Punkte $W\mathfrak{d}$ und $W\mathfrak{d}_1$; das heißt:

$$W\mathfrak{d} = p + q; \qquad W\mathfrak{d}_1 = -\bar{Q}(p - q) + Bp - y.$$

Im Falle $\bar{Q} = 0$ wird:

$$W\mathfrak{d}_1 = Bp - y. \tag{6}$$

Verbindet man in der uneigentlichen Ebene (siehe Fig. 6) die Punkte q und r und bestimmt den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden $\|y, p\|$, so hat dieser die Koordinaten (§ 8 (13)): $-Bp + y$, d. h. er fällt mit $W\mathfrak{d}_1$ zusammen. Daher gilt der

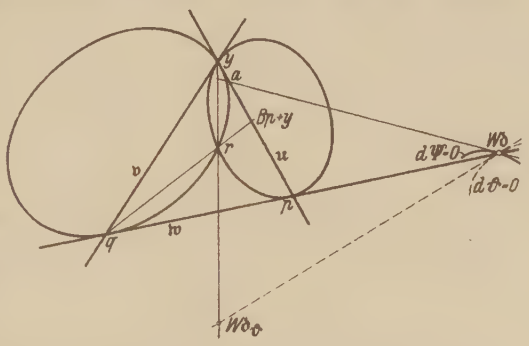

Fig. 6. Konfiguration in der uneigentlichen Ebene.

Satz XII. *Bewegt man sich auf der Asymptotenlinie $d\bar{\Psi} = 0$ der Fläche x, so beschreibt der uneigentliche Punkt $W\mathfrak{d}$ der zugehörigen Darboux-Tangente $\mathfrak{d}(u, v)$ eine Kurve: geht die Tangente dieser Kurve durch den Schnittpunkt der Geraden $\|q; r\|$ und $\|p; y\|$ des zu dem untersuchten Flächenpunkte x gehörigen Grundgebildes (Kegelpaares), so ist im Punkte x die Invariante $\bar{Q} = 0$* (siehe Fig. 6).

Eine völlig analoge Bedeutung hat das Verschwinden von Q. Gehen wir von $x(u_0 v_0)$ aus längs der Asymptotenlinie $d\Psi = 0$, so ist die Tangente an die zugehörige Kurve $W\mathfrak{d}$ im Punkte $W\mathfrak{d}(u_0, v_0)$ die Verbindungsgerade von $W\mathfrak{d}$ und $W\mathfrak{d}_2$. Dabei wird

$$W\mathfrak{d}_2 = Q(p - q) - Bp - y.$$

Man erkennt, daß für $Q = 0$ die Tangente durch den Punkt $Bq + y$ geht, d. h. durch den Schnittpunkt der Geraden $\|p, r\|$ und $\|q; y\|$.

Nach dem letzten Ergebnis ist es leicht, für die Größen $\frac{\bar{Q}}{B}$ und $\frac{Q}{B}$ eine geometrische Deutung anzugeben: Bewegt man sich nämlich längs der Asymptotenlinie $d\bar{\Psi} = 0$ der Fläche x, so beschreibt $W\mathfrak{d}$ eine uneigentliche Kurve, deren zum betrachteten Punkt gehörige Tangente die Gerade u im Punkt a schneide (s. Fig. 6). Auf u kennt man dann vier Punkte $y; p; a$ und den Schnittpunkt von u mit $\|q; r\|$. Das Doppelverhältnis dieser vier Punkte ist gerade gleich $\frac{\bar{Q}}{B}$. Geht man dagegen auf der Fläche x

längs einer Kurve $d\Psi = 0$, so erhält man entsprechend vier Punkte auf der Geraden $\mathfrak{v}$, deren Doppelverhältnis gleich $\frac{Q}{B}$ ist.

Mit dem letzten Paragraphen hat die vorliegende Untersuchung ihren natürlichen Abschluß erreicht. Es galt, die Affin-Geometrie der Flächen und parabolischen Strahlensysteme aufzubauen. Der analytische Teil des Problems verlangte die Aufstellung eines *vollständigen Systems affiner Invarianten.* Daran schließt sich der schwierigere geometrische Teil, der die Aufgabe hat, ein einfaches (algebraisches) geometrisches Gebilde zu konstruieren, welches invariant mit der betrachteten Stelle der Fläche bzw. der Strahlensysteme verbunden ist. An diesem Gebilde mußten die Ergebnisse des analytischen Teiles ihre geometrische Interpretation erfahren.

(Eingegangen am 26. Februar 1930.)

Eine Bemerkung über ganze Funktionen.

Von

S. Wigert in Stockholm.

Es sei $G(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu x^\nu$ eine ganze Funktion mit $G(0) = 0$. Dann stellt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} G\left(\frac{x}{n}\right)$ wieder eine ganze Funktion dar:

$$\bar{G}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \zeta(\nu+1) x^\nu,$$

indem ζ wie gewöhnlich die Riemannsche Funktion bedeutet. Machen wir nun die Annahme $G(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ für $x \to +\infty$, wo α eine positive Zahl ist, so ergibt sich sofort, daß $\bar{G}(x)$ für $x \to +\infty$ *beschränkt* ist. Denn

$$\begin{cases} \left| \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} G\left(\frac{x}{n}\right) \right| < \frac{C_1}{x^\alpha} \sum_{n \leqq x} n^{\alpha-1} = O(1), \\ \left| \sum_{n > x} \frac{1}{n} G\left(\frac{x}{n}\right) \right| < C_2 x \sum_{n > x} \frac{1}{n^2} = O(1). \end{cases}$$

Wenn also $\bar{G}(x)$ nicht beschränkt ist, so kann $G(x)$ nicht von einer Größenordnung $x^{-\alpha}$ sein. — Nicht so leicht war es aber festzustellen, ob die beschränkte Funktion $G(x)$ auch für $x \to +\infty$ gegen Null streben oder gar von einer Ordnung $x^{-\alpha}$ sein kann. Ein Beispiel dafür, daß dies möglich ist, liefert uns der folgende

Satz. *Die ganze Funktion* $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ *habe die Eigenschaft* $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, *und es sei ferner* $g(x) \to 0$ *für* $x \to +\infty$. *Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g(nx)$ *für* $x > 0$ *und stellt eine ganze Funktion von* x *dar.*

Beweis[1]). Es ist für $y > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}g(nx)e^{-ny} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-ny}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu n^\nu x^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^\nu e^{-ny} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu x^\nu \frac{d^\nu}{dy^\nu}\frac{1}{e^y+1}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{\lfloor\mu}(1-2^{\mu+\nu+1})\zeta(-\mu-\nu)y^\mu.$$

Auf der linken Seite steht bekanntlich eine ganze Funktion von $\frac{1}{1+e^{-y}}$. Sie ist also regulär für $y=0$, und da $g(nx)\to 0$ für $n\to\infty$, so folgt nach dem Satze von Fatou die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}g(nx)$. Auf der rechten Seite erhalten wir für $y=0$:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(1-2^{\nu+1})\zeta(-\nu)x^\nu = h(x).$$

Dies ist aber eine ganze Funktion, weil $\zeta(-n) = -\frac{2\sin\frac{\pi n}{2}\lfloor n\,\zeta(n+1)}{(2\pi)^{n+1}}$ und $n\sqrt[n]{|a_n|}\to 0$ für $n\to\infty$.

Wir wenden jetzt diesen Satz auf den folgenden Fall an:

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^\nu}{\lfloor\nu-1\lfloor\nu+3} = \frac{1}{x}J_4(2\sqrt{x}),$$

wo $J_4(x)$ die Besselsche Funktion mit dem Parameter 4 bezeichnet. Man hat daher $g(x) = O\left(x^{-\frac{5}{4}}\right)$ für $x\to+\infty$, und die ganze Funktion $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}g(nx)$ wird auch von dieser Größenordnung sein. Nach einfachen Rechnungen ergibt sich ferner die Reihenentwicklung

$$h(x) = 2\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\frac{(2\mu-1)(2^{2\mu}-1)\zeta(2\mu)}{(2\pi)^{2\mu}\lfloor 2\mu+2}x^{2\mu-1}.$$

Wählen wir nun

$$G(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\frac{(2\mu-1)x^{2\mu-1}}{\lfloor 2\mu+2} = \frac{x-\sin x}{x^2} + \frac{3\left(1-\frac{x^2}{2}-\cos x\right)}{x^3},$$

so ist $G(0)=0$ und $G(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x\to\infty$. Ich behaupte, daß $\bar{G}(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\frac{(2\mu-1)\zeta(2\mu)}{\lfloor 2\mu+2}x^{2\mu-1}$ auch $= O\left(\frac{1}{x}\right)$ ist für $x\to\infty$.

[1]) Es ist leicht zu zeigen, daß die beim Beweise ausgeführten Operationen erlaubt sind. Vgl. meine Arbeit: Un théorème sur les fonctions entières (Arkiv för Matematik etc., 15, Stockholm 1920), wo von einer ähnlichen Transformation die Rede ist.

In der Tat ist

$$h(x) = \frac{1}{\pi}\left\{2\,\bar{G}\left(\frac{x}{\pi}\right) - \bar{G}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right\},$$

oder

$$\bar{G}\left(\frac{x}{\pi}\right) - \frac{1}{2}\,\bar{G}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{\pi}{2}\,h(x),$$

woraus

$$\bar{G}\left(\frac{x}{\pi}\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\,\bar{G}\left(\frac{x}{2^{n+1}\pi}\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{2^\nu}\,h\left(\frac{x}{2^\nu}\right)$$

und

$$\bar{G}\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\,h\left(\frac{x}{2^\nu}\right).$$

Es ist aber für $k = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$:

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\displaystyle\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{2^\nu}\,h\left(\frac{x}{2^\nu}\right)\right| < c'\,x^{-\frac{5}{4}}\sum_{\nu=0}^{k}2^{\frac{\nu}{4}} = c'\,x^{-\frac{5}{4}}\,\frac{2^{\frac{k+1}{4}}-1}{2^{\frac{1}{4}}-1} = O\left(\frac{1}{x}\right), \\ \left|\displaystyle\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\,h\left(\frac{x}{2^\nu}\right)\right| < c''\,x\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2\nu}} = \frac{c''x}{2^{2k+1}} = O\left(\frac{1}{x}\right). \end{array}\right.$$

Als zweites Beispiel betrachten wir die Funktion

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}x^\nu}{\lfloor\nu\,\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\zeta(\nu+1)}.$$

Sie kann dargestellt werden durch das Integral $-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(s)\,ds}{x^s\,\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\zeta(1-s)}$ über die imaginäre Achse genommen; es folgt daraus $g(x)\to 0$ für $x\to+\infty$[2]). Falls $\zeta(s)$ in einem Parallelstreifen links von der Gerade $R(s)=1$ von Null verschieden sein sollte, so gibt es sogar eine positive Zahl α derart, daß $g(x) = O(x^{-\alpha})$ für $x\to+\infty$ ist. Mit dieser Annahme steht übrigens die Tatsache $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,g\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}x^\nu}{\lfloor\nu\,\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)} = O(1)$ in Einklang[3]). Dieser Satz läßt sich auch umkehren. Wenn wir, einem Gedanken des Herrn M. Riesz folgend[4]), das Integral

$$\int_0^\infty\frac{g(x)\,dx}{x^s}$$

---

[2]) Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen **1**, S. 265.

[3]) Wigert, Sur une nouvelle fonction entière etc., Math. Annalen **96** (1926), Heft 3/4. Mit den dort angewandten Bezeichnungen ist die oben erhaltene Funktion $= 1 - g_{2,0}(x) = \int_0^x g_{2,\frac{1}{2}}(t)\,dt$, und es gilt: $g_{2,\frac{1}{2}}(x) = O\left(e^{-\sqrt{\pi}\sqrt[3]{x}}\right)$.

[4]) Sur l'hypothèse de Riemann, Acta Math. **40**.

bilden, so konvergiert es unter der Annahme $g(x) = O(x^{-\alpha})$ absolut und gleichmäßig für $2 > R(s) > 1 - \alpha$. Man bekommt aber für $R(s) > 1$:

$$\int_0^\infty \frac{g(x)\,dx}{x^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \int_0^\infty \frac{dx}{x^s} \int_0^x g_{2,\frac{1}{2}}(t)\,dt = \frac{1}{\zeta(s)} \int_0^\infty g_{2,\frac{1}{2}}(t)\,dt \int_t^\infty \frac{dx}{x^s}$$

$$= \frac{1}{(s-1)\zeta(s)} \int_0^\infty t^{1-s} g_{2,\frac{1}{2}}(t)\,dt = \frac{1}{(s-1)\zeta(s)} \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)},$$

wonach $\zeta(s) \neq 0$ sein muß für $R(s) > 1 - \alpha$. Unserem Satze gemäß bekommt man hier

$$h(x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} g(nx) = \frac{1}{\pi}\left\{2H\left(\frac{x}{\pi}\right) - H\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right\},$$

wo

$$H(x) = \sum_{\mu=1}^\infty \frac{(-1)^{\mu-1} x^{2\mu-1}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\mu=1}^\infty (-1)^{\mu-1} \frac{(2x)^{2\mu-1}\,\underline{|\mu-1}}{\underline{|2\mu-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} \sin(2x\sqrt{t})\,\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} \sin(2xz)\,dz.$$

Bekanntlich ist das letzte Integral $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$, und weil

$$2x^3 e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt - x^2 \to \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

so wird $H(x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$, woraus schließlich $h(x) = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

Es ist wohl leider aussichtslos, aus der Gleichung $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} g(nx) = h(x)$ irgendeinen Schluß über die Größenordnung von $g(x)$ ziehen zu versuchen. Die formale Umkehrung dieser Gleichung: $g(x) = \sum_{n=1}^\infty \theta(n) h(nx)$, wo $\theta(n)$ die Koeffizienten der Dirichletschen Reihe für $\frac{1}{(1-2^{1-s})\zeta(s)}$ sind[5]), ist offenbar unerlaubt. Man kann nur behaupten, daß der Funktion $\varphi(x) = g(x) - \sum_{n=1}^\infty \theta(n) h(nx)$ die Eigenschaft $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \varphi(nx) = 0$ zukommt.

[5]) Wenn $\mu(n)$ der Möbiussche Faktor bedeutet, so ist

$$\theta(n) = \begin{cases} \mu(n) & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ 2^{k-1}\mu(n') & \text{für } n = 2^k n' \quad (k \geqq 1,\ n' \text{ ungerade}). \end{cases}$$

(Eingegangen am 28. Mai 1930.)

Untersuchungen zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz.

Von

Wolfgang Franz in Kiel.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung	275
1. Irreduzibilitätssatz für mehrere Unbestimmte	276
2. Normierung der zu betrachtenden Polynome	280
3. Notwendiges und hinreichendes Kriterium	281
4. Irreduzibilitätssatz bei endlicher Erweiterung	283
5. Potenzreihenentwicklung	285
6. Irreduzibilitätssatz in $\Omega(u)$	291

Einleitung.

Der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz[1]) besagt im einfachsten Fall: Ist $f(x, t)$ ein über dem Körper der rationalen Zahlen irreduzibles Polynom in den beiden Unbestimmten x und t mit ganz-rationalen Koeffizienten, so gibt es unendlich viele ganz-rationale Zahlen t^*, so daß auch $f(x, t^*)$ irreduzibel ist. Im folgenden wird die Frage aufgeworfen, inwieweit ein analoger Satz gilt, wenn man die Koeffizienten von $f(x, t)$ einem beliebigen abstrakten Körper angehören läßt. Genauer: Es wird gefragt, für welche Körper K die folgende im Anschluß an Hilbert gleich auf mehrere Polynome erweiterte (im folgenden stets schlechthin als H. I. bezeichnete) Aussage gilt:

$$f(x, t) = \prod_{i=1}^{l} f_i(x, t)$$

sei die Primfaktorzerlegung in $\mathsf{K}(t)$ *eines Polynoms* $f(x, t)$ *über* K *in den beiden Unbestimmten* x *und* t. *Dann gibt es unendlich viele Elemente* t^* *in* K, *nach deren Einsetzung für* t *alle* $f_i(x, t^*)$ *ebenfalls irreduzibel sind.*

Aus der Hilbertschen Untersuchung folgt die Gültigkeit des Satzes außer für den Körper der rationalen Zahlen noch für seine rein transzen-

[1]) D. Hilbert, Über die Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten, Crelles Journal **110** (1892), S. 104 ff.

denten Erweiterungen. Für algebraisch abgeschlossene Körper gilt der Satz dagegen offenbar nicht. Weitere Körper, in denen er nicht gilt, sind folgende: Körper von endlichem Index unter ihrem algebraischen algebraisch abgeschlossenen Körper; Körper, die mit jedem Element auch eine seiner n-ten Wurzeln enthalten, unter n eine feste natürliche Zahl verstanden, denn das Polynom $x^n - t$ bildet ein Gegenbeispiel; der Körper der p-adischen Zahlen und der Körper der darin enthaltenen absolut algebraischen Zahlen, denn über beiden ist jede Gleichung auflösbar, während aus der Gültigkeit des H. I. die Existenz von Gleichungen ohne Affekt in bekannter Weise folgte. In vollkommenen Körpern gilt daher der Satz jedenfalls in der angegebenen Formulierung nicht; jedes über $\mathsf{K}(t)$ irreduzible Polynom, das in x von zweiter Art ist, bildet ein Gegenbeispiel. In endlichen Körpern gibt es auch irreduzible Polynome $f(x, t)$, die in x von erster Art sind, die bei *jeder* Einsetzung t^* für t zerfallen. Das gilt z. B. im Körper von p^f Elementen für das Polynom $x^2 + 2tx + t^{p^f+1}$; für jedes t^* aus dem Grundkörper wird $x^2 + 2t^*x + t^{*p^f+1} = x^2 + 2t^* + t^{*2} = (x + t^*)^2$. Die Grundkörper K werden daher im folgenden stets als unendlich angenommen.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine ebenfalls von Hilbert angegebene Fassung eines analogen Satzes für mehrere Unbestimmte und mehrere Parameter in abstrakten Körpern untersucht. Es zeigt sich, daß die beiden Formen des Satzes in genau den gleichen Körpern gelten. Im Abschnitt 3 wird ein etwas einfacher zu übersehendes Kriterium, das für die Gültigkeit des H. I. in einem Körper notwendig und hinreichend ist, angegeben. Weiter wird gezeigt, daß der H. I. beim Übergang von einem Körper zu einer endlichen Erweiterung erster Art erhalten bleibt. Ob eine analoge Aussage für endliche Erweiterungen zweiter Art gemacht werden kann, muß offen bleiben. Endlich wird der H. I. für eine spezielle Klasse von Körpern, solche, die aus einem unendlichen Unterkörper durch rein transzendente Erweiterung erhalten werden können, bewiesen. Vorher werden die dazu notwendigen Hilfsmittel, die Potenzreihendarstellungen, die im Falle der Primzahlcharakteristik nicht mehr den gewöhnlichen Darstellungen über Zahlkörpern analog sind, im einfachsten Fall entwickelt und etwas weiter verfolgt, als es für das Spätere notwendig ist.

1. Irreduzibilitätssatz für mehrere Unbestimmte.

Wir betrachten die Menge der Potenzprodukte $x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{i_r}$ in r Unbestimmten $x_1, \ldots, x_r$, die in jeder der Unbestimmten höchstens bis zum Grade n aufsteigen, $(n+1)^r$ an der Zahl. Setzen wir dann[2]) mit einer

[2]) Vgl. L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, Kummer-Festschrift, Berlin 1882, S. 11 = Crelles Journal 92 (1882), S. 11.

neuen Unbestimmten x

$$d = n+1, \qquad x_i = x^{d^{r-i}} \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

so geht jedes in eine Potenz von x über

$$x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{i_r} \to x^{i_1 d^{r-1} + \ldots + i_{r-1} d + i_r},$$

deren Exponent höchstens $n d^{r-1} + \ldots + n d + n = d^r - 1$ ist. Diese Beziehung zwischen der Menge jener Potenzprodukte und der der Potenzen in x bis zum $(d^r - 1)$-ten Grade ist eineindeutig. Denn einerseits entspricht wirklich jeder Potenz ein Potenzprodukt; man hat nur den Exponenten der Potenz in eine d-adische Zahl zu entwickeln, um aus dieser Entwicklung die Exponenten für das zugehörige Potenzprodukt ablesen zu können. Andrerseits stimmen beide Mengen in der Zahl der Elemente überein. Dabei entspricht dem Produkt zweier Potenzprodukte, wenn es noch zur betrachteten Menge gehört, das Produkt der entsprechenden Potenzen.

Ist daher K ein beliebiger Körper, so ist auch die durch die gleiche Substitution vermittelte Beziehung zwischen den Polynomen in $x_1, \ldots, x_r$ über K, die in jeder Unbestimmten höchstens bis zum Grade n aufsteigen, und den Polynomen in x bis zum $(d^r - 1)$-ten Grade eineindeutig; es entsprechen sich jeweils die Polynome

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_r} x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{i_r}$$

und

$$f(x^{d^{r-1}}, \ldots, x) = f(x) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_r} x^{i_1 d^{r-1} + i_2 d^{r-2} + \ldots + i_r},$$

und wieder entspricht dem Produkt zweier der betrachteten Polynome in $x_1, \ldots, x_r$, sofern nur das Produkt selbst noch zur betrachteten Menge gehört, das Produkt der entsprechenden Polynome in x.

Daraus ergibt sich ein Kriterium, durch das man die Irreduzibilität eines $f(x_1, \ldots, x_r)$ aus dem Verhalten des zugehörigen $f(x)$ erkennen kann: $f(x_1, \ldots, x_r)$ ist dann und nur dann irreduzibel, wenn $f(x)$ nicht derart in Faktoren zerlegt werden kann, daß die Faktoren als Polynome in $x^{d^{r-1}}, x^{d^{r-2}}, \ldots, x$ aufgefaßt werden können, so daß das Produkt in jeder dieser Unbestimmten höchstens vom Grade n ist, wenn, wie wir für diesen Tatbestand in diesem Abschnitt kurz sagen wollen, für $f(x)$ die Kroneckersche Irreduzibilitätsbedingung erfüllt ist.

Jetzt sei K ein Körper, in dem der H. I. in der in der Einleitung angegebenen Formulierung für eine Unbestimmte und einen Parameter gilt.

$$f(x_1, \ldots, x_r; t) = \prod_{i=1}^{l} f_i(x_1, \ldots, x_r; t)$$

sei die Primfaktorzerlegung in $\mathsf{K}(t)$ eines Polynoms $f(x_1, \ldots, x_r; t)$ mit Koeffizienten aus K. Ist n der Maximalgrad, den einer der Faktoren in einer

der Unbestimmten $x_1, \ldots, x_r$ hat, so führe man die Kroneckersche Substitution

$$d = n+1, \qquad x_i = x^{d^{r-i}} \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

ein, wodurch jedes $f_i(x_1, \ldots, x_r; t)$ in ein $f_i(x, t)$ übergeht. Man zerlege weiter die $f_i(x, t)$ in ihre in $\mathsf{K}(t)$ irreduziblen Faktoren:

$$f_i(x, t) = \prod_k f_{ik}(x, t) \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

und stelle aus diesen Primfaktoren für jedes $f_i(x, t)$ sämtliche Zerlegungsmöglichkeiten in je zwei Faktoren her. Da die $f_i(x_1, \ldots, x_r; t)$ über $\mathsf{K}(t)$ irreduzibel sind, ist dabei für die $f_i(x, t)$ die Kroneckersche Irreduzibilitätsbedingung erfüllt. — Jetzt wähle man, gemäß dem vorausgesetzten H. I. für eine Unbestimmte und einen Parameter, in K unendlich viele t^*, so daß alle $f_{ik}(x, t^*)$ irreduzibel bleiben. Nach Einsetzung von t^* für t sind dann die eben aufgestellten Zerlegungen der $f_i(x, t)$ auch sämtliche Zerlegungen der $f_i(x, t^*)$ in je zwei Faktoren. Es fragt sich nun, ob die Kroneckersche Irreduzibilitätsbedingung bei der Einsetzung erhalten bleibt. Da sie aber nur von den wirklich auftretenden Potenzen von x abhängt, und da nur für *endlich* viele der t^* einige der in den $f_{ik}(x, t)$ wirklich auftretenden Potenzen von x verschwinden können, erkennt man, daß für die unendlich vielen übrigen t^* die Irreduzibilitätsbedingung erhalten bleibt, so daß also für diese t^* alle $f(x_1, \ldots, x_r; t^*)$ irreduzibel werden. — Damit ist der erste Teil des weiteren Irreduzibilitätssatzes gewonnen.

Sei weiter

$$f(x_1, \ldots, x_r; t_1, \ldots, t_s) = \prod_{i=1}^{l} f_i(x_1, \ldots, x_r; t_1, \ldots, t_s)$$

die Primfaktorzerlegung in $\mathsf{K}(t_1, \ldots, t_s)$ eines Polynoms $f(x_1, \ldots, t_s)$ über K. In K gilt dann eine Zerlegung

$$f(x_1, \ldots, x_r; t_1, \ldots, t_s) = g(t_1, \ldots, t_s) \cdot \prod_{i=1}^{l} \bar{f}_i(x_1, \ldots, x_r; t_1, \ldots, t_s)$$

mit in $x_1, \ldots, t_s$ irreduziblen $\bar{f}_i(x_1, \ldots, t_s)$, die sich von den $f_i(x_1, \ldots, t_s)$ nur um Polynome in $t_1, \ldots, t_s$ unterscheiden. Nach dem eben Bewiesenen kann man zunächst unendlich viele t_s^* in K finden, nach deren Einsetzung an die Stelle von t_s alle $\bar{f}_i(x_1, \ldots, t_s)$ irreduzibel bleiben, darauf unendlich viele t_{s-1}^* in K, nach deren weiterer Einsetzung ebenfalls alle $\bar{f}_i(x_1, \ldots, t_s)$ irreduzibel bleiben, u.s.f. Es lassen sich also unendlich viele Systeme $(t_1^*, \ldots, t_s^*)$ von Elementen aus K bestimmen, so daß alle $\bar{f}_i(x_1, \ldots, x_r; t_1^*, \ldots, t_r^*)$ und damit auch alle $f_i(x_1, \ldots, x_r; t_1^*, \ldots, t_s^*)$ irreduzibel werden. — Damit ist für den zugrunde gelegten Körper K bewiesen, wenn man berücksichtigt, daß die Reihenfolge, in der die Parameter $t_1, \ldots, t_s$ im letzten Schritt in die

Betrachtung gezogen werden, gleichgültig ist:

$$f(x_1, \ldots, x_r; t_1, \ldots, t_s) = \prod_{i=1}^{l} f_i(x_1, \ldots, x_r; t_1, \ldots, t_s)$$

sei die Primfaktorzerlegung in $\mathsf{K}(t_1, \ldots, t_s)$ *eines Polynoms über* K. *Dann gibt es unendlich viele Systeme* $t_1^*, \ldots, t_s^*$ *von Elementen in* K, *nach deren Einsetzung alle* $f_i(x_1, \ldots, x_r; t_1^*, \ldots, t_s^*)$ *ebenfalls irreduzibel sind. Die Menge der derartigen Systeme hat überdies die Eigenschaft, daß es zu jedem der Parameter* t_k *unendlich viele solche Systeme gibt, die sich nur im Element* t_k^* *voneinander unterscheiden.*

Für die weiteren Betrachtungen brauchen wir folgenden

Hilfssatz. Ist $f(x)$ über dem unendlichen Körper K irreduzibel und sind $x_1, \ldots, x_r$ Unbestimmte über K, so ist auch $f(x_1 + \ldots + x_r)$, und wenn $f(x)$ nicht von der Form $c \cdot x$ ist, auch $f(x_1 \cdot \ldots \cdot x_r)$ über K irreduzibel.

Beweis. Angenommen, der Satz sei für $r < n$ bereits bewiesen. Wäre dann $f(x_1 + \ldots + x_n)$ bzw. $f(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)$ reduzibel, etwa gleich $g(x_1, \ldots, x_n) \cdot h(x_1, \ldots, x_n)$, so müßte bei allen Einsetzungen von Elementen x_n^* aus K für x_n ein Faktor eine Konstante werden, denn mit $f(x)$ ist auch jedes ganz linear transformierte $f(ax + b)$ mit Elementen $a \neq 0, b$ aus K über K irreduzibel. Für unendlich viele x_n^* muß also einer der Faktoren, etwa $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^*)$, konstant sein. Denkt man sich nun $g(x_1, \ldots, x_n)$ nach Potenzprodukten von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ geordnet, so daß die Koeffizienten Polynome in x_n sind, so müssen diese Koeffizienten bis auf das absolute Glied für unendlich viele x_n^* verschwinden; also müssen sie identisch verschwinden, d. h. $g(x_1, \ldots, x_n)$ hängt nur von x_n ab. Aus den gleichen Gründen muß einer der beiden Faktoren nur x_{n-1} enthalten, einer nur x_{n-2}, u. s. f. Für $n > 2$ ist damit der Hilfssatz bewiesen. Für $n = 2$ folgt $f(x_1 + x_2)$ bzw. $f(x_1 \cdot x_2)$ ist gleich $C \cdot f(x_1) \cdot f(x_2)$. — Ist nun $f(x)$ vom Grade m, so haben die Glieder von $f(x_1 + x_2)$ höchstens die Dimension m, während $f(x_1) \cdot f(x_2)$ solche von der Dimension $2m$ enthält; das ist ein Widerspruch. — Ist $f(x) = a_m x^m + \ldots + a_0$, so muß $a_0 \neq 0$ sein, da $f(x)$ irreduzibel und nicht von der Form $c \cdot x$ sein soll. Nun treten in $f(x_1) \cdot f(x_2)$ folgende x_1 allein enthaltende Glieder auf, die sich nicht gegen andere fortheben können, also sämtlich Null sein müssen, wenn $f(x_1 \cdot x_2) = C f(x_1) f(x_2)$ gelten soll: $a_0 a_m x_1^m$, $a_0 a_{m-1} x_1^{m-1}$, $\ldots$, $a_0 a_1 x_1$. Es folgt $a_m = a_{m-1} = \ldots = a_1 = 0$. — Da der Hilfssatz für $r = 1$ trivial ist, ist er hiermit allgemein bewiesen.

Jetzt sei K ein Körper, in dem der H. I. für eine Unbestimmte und einen Parameter *nicht* gilt. Es gibt also über K ein Produkt von Polynomen,

$$f(x, t) = \prod_{i=1}^{l} f_i(x, t),$$

die über $\mathsf{K}(t)$ irreduzibel sind, die sich aber für jedes t^* aus K mit eventuell endlich vielen Ausnahmen noch weiter zerlegen lassen. Bildet man dann mit neuen Unbestimmten $x_1, \ldots, x_r$

$$f(x_1 + \ldots + x_r; t) = \prod_{i=1}^{l} f_i(x_1 + \ldots + x_r; t),$$

so sind auch diese Faktoren sämtlich über $\mathsf{K}(t)$ irreduzibel, aber nach Einsetzung von Elementen t^* aus K für t sind sie, endlich viele t^* eventuell ausgenommen, weiter zerlegbar. Ebenso erkennt man, daß

$$f(x_1 + \ldots + x_r; t_1 + \ldots + t_s) = \prod_{i=1}^{l} f_i(x_1, \ldots, x_r; t_1 + \ldots + t_s)$$

ein Gegenbeispiel gegen die Gültigkeit des Irreduzibilitätssatzes für mehrere Unbestimmte und mehrere Parameter in der auf S. 279 angegebenen Fassung bildet; da die Faktoren von $f(x, t)$ höchstens für endlich viele t^* aus K irreduzibel bleiben, kann die Menge der Systeme $t_1^*, \ldots, t_s^*$ aus K, für die die Faktoren von $f(x_1 + \ldots + x_r; t_1 + \ldots + t_s)$ irreduzibel bleiben, nicht die dort angegebene Dichtigkeitsaussage erfüllen. — In analoger Weise kann man den andern Teil des Hilfssatzes für die Konstruktion von Gegenbeispielen ausnutzen.

Wir können das Ergebnis dieses Abschnittes wie folgt zusammenfassen:

Der Irreduzibilitätssatz für mehrere Unbestimmte und mehrere Parameter gilt in allen und nur den Körpern, in denen der H. I. für eine Unbestimmte und einen Parameter gilt.

2. Normierung der zu betrachtenden Polynome.

K sei ein beliebiger unendlicher Körper, Γ ein Teilintegritätsbereich derart, daß K Quotientenkörper zu Γ ist. Dann genügt es zum Beweise des H. I. in K, den Satz für Polynome $f(x, t)$ mit Koeffizienten aus Γ nachzuweisen. Gehören nämlich die Koeffizienten von $g(x, t)$ nicht von vornherein zu Γ, so ist das doch bei geeigneter Wahl eines a in Γ mit $a \cdot g(x, t)$ der Fall; sowohl $g(x, t)$ und $a \cdot g(x, t)$, wie auch $g(x, t^*)$ und $a \cdot g(x, t^*)$ mit t^* aus K oder Γ zerfallen aber in $\mathsf{K}(t)$ bzw. in K bis auf einen konstanten Faktor in gleicher Weise.

Es genügt weiter, den H. I. für Polynome $f(x, t)$ mit in x höchstem Koeffizienten 1 zu beweisen. Ist nämlich $g(x, t)$ ein beliebiges Polynom über Γ,

$$g(x, t) = b_n(t)\, x^n + b_{n-1}(t)\, x^{n-1} + \ldots + b_0(t)$$

mit Polynomen $b_i(t)$ über Γ, $b_n(t) \not\equiv 0$, so erkennt man leicht, daß

$$b_n(t)^{n-1} \cdot g(x, t) = [b_n(t) \cdot x]^n + b_{n-1}(t)\, [b_n(t) \cdot x]^{n-1} + \ldots + b_n(t)^{n-1} b_0(t)$$

als Polynomen in $y = b_n(t) \cdot x$ über $\mathsf{K}(t)$ aufgefaßt,

$$b_n(t)^{n-1} \cdot g(x,t) = \bar{g}(y,t) = y^n + b_{n-1}(t)\, y^{n-1} + \ldots + b_n(t)^{n-1} b_0(t),$$

bis auf Faktoren aus $\Gamma(t)$ in gleicher Weise zerfällt wie $g(x,t)$. Nimmt man den H. I. für Polynome $f(x,t)$ mit höchstem Koeffizienten 1 in K als gültig an, so folgt, daß es in K unendlich viele t^* gibt, so daß alle in y irreduziblen Faktoren von $\bar{g}(y,t)$ auch nach der Einsetzung von t^* für t irreduzibel bleiben. Für alle diese t^*, abgesehen von den endlich vielen, die $b_n(t)$ zu Null machen, bleiben dann ersichtlich auch die in x irreduziblen Faktoren von

$$g(x,t) = \frac{\bar{g}(b_n(t) \cdot x, t)}{b_n(t)^{n-1}}$$

nach Einsetzung von t^* irreduzibel.

Im folgenden werden die beiden eben besprochenen Vereinfachungen stets stillschweigend zugrunde gelegt werden, wenn dadurch Vereinfachungen der Beweise erzielt werden können.

3. Notwendiges und hinreichendes Kriterium.

Es soll jetzt gezeigt werden:

Hinreichend (und natürlich auch notwendig) für die Gültigkeit des H. I. in einem Körper K ist folgendes:

Hat das Polynom $g(x,t)$ über K keine Nullstelle in $\mathsf{K}(t)$, so gibt es unendlich viele t^* in K, so daß $g(x, t^*)$ in K ebenfalls keine Nullstelle hat[3]).

Beweis. Es sei

$$f(x,t) = \prod_{i=1}^{l} f_i(x,t)$$

die Primfaktorzerlegung in $\mathsf{K}(t)$ eines Polynoms über K, und zwar sei $f(x,t)$ in x vom höchsten Koeffizienten 1, so daß nach einem bekannten Satz von Gauß bzw. seiner Verallgemeinerung das gleiche für die Faktoren angenommen werden darf. Die Grade der Faktoren in x seien für $i = 1, \ldots, l$ gleich n_i, die Wurzeln $x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n_i)}$. (Falls einige der $f_i(x,t)$ in x von zweiter Art sind, sind für diese i nicht alle Wurzeln voneinander verschieden.) Für jedes i und jedes $m = 1, \ldots, n_i - 1$ bilde man dann

$$F_i^{(m)}(z,x;t) = \prod_{(\nu_1, \ldots, \nu_m)} \{z - (x - x_i^{(\nu_1)})(x - x_i^{(\nu_2)}) \ldots (x - x_i^{(\nu_m)})\},$$

[3]) Vgl. F. Mertens, Über die Zerfällung einer ganzen Funktion einer Veränderlichen in zwei Faktoren, Sitzungsber. d. Wiener Akademie 120 (1911), IIa, 2. — Dort wird für den Fall des rationalen Zahlkörpers als Grundkörper die gleiche, auf einem Gedanken von Gauß fußende Reduktion für den Beweis des H. I. benutzt. Die vorliegende allgemeine Betrachtung ist jedoch einfacher und kürzer.

wobei z eine neue Unbestimmte ist und das Produkt über alle Kombinationen der Wurzeln $x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n_i)}$ zu je m, $\binom{n_i}{m}$ an der Zahl, zu erstrecken ist. Wegen der Symmetrie dieser Funktionen in den $x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n_i)}$ gehören die Koeffizienten zu $\mathsf{K}(t)$. Keine dieser Funktionen, als solche in z über $\mathsf{K}(t, x)$ aufgefaßt, kann einen Linearfaktor über $\mathsf{K}(t, x)$ haben, denn das würde bedeuten, daß die zugehörige Funktion $f_i(x, t)$ einen Faktor m-ten Grades in $\mathsf{K}(t)$ hätte, während sie doch in $\mathsf{K}(t)$ als irreduzibel vorausgesetzt war.

Setzen wir jetzt für x Elemente x^* aus K ein, so kann eventuell eine der Funktionen $F_i^{(m)}(z, x^*; t)$ in $\mathsf{K}(t)$ einen Linearfaktor bekommen; jedenfalls aber kann das nur für endlich viele x^* geschehen, denn andernfalls müßte mindestens eins der Polynome $(x - x_i^{(\nu_1)}) \cdot \ldots \cdot (x - x_i^{(\nu_m)})$ für unendlich viele x^* Elemente von $\mathsf{K}(t)$ darstellen, so daß alle Koeffizienten des (ausmultipliziert gedachten) Polynoms zu $\mathsf{K}(t)$ gehören müßten, wieder entgegen der Voraussetzung. Da K, wie stets vom Grundkörper vorausgesetzt ist, unendlich ist, lassen sich also x^* in K bestimmen, so daß keins der $F_i^{(m)}(z, x^*; t)$, also auch nicht das über alle i und m erstreckte Produkt

$$\prod_{i,m} F_i^{(m)}(z, x^*; t),$$

in $\mathsf{K}(t)$ einen Linearfaktor hat.

Dies Produkt erfüllt also die Voraussetzung des für die Gültigkeit des H. I. in K als hinreichend zu erweisenden Kriteriums dieses Abschnittes. Wendet man das Kriterium an, so ergibt sich also die Existenz unendlich vieler t^* in K, so daß

$$\prod_{i,m} F_i^{(m)}(z, x^*; t^*)$$

in K keinen Linearfaktor hat. Dann kann aber auch das Produkt

$$f(x, t^*) = \prod_{i=1}^{l} f_i(x, t^*)$$

nicht weiter zerfallen. Denn andernfalls hätte nach der Bildungsweise der Funktionen $F_i^{(m)}(z, x; t)$ wenigstens eine der Funktionen $F_i^{(m)}(z, x; t^*)$, als Funktion in z über $\mathsf{K}(x)$ aufgefaßt, einen Linearfaktor in $\mathsf{K}(x)$, während eben die Existenz von Elementen x^* in K nachgewiesen wurde, so daß keins der $F_i^{(m)}(z, x^*; t^*)$ in K einen Linearfaktor hat. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Es sei noch folgendes angemerkt: Der Beweis zeigt, daß es, ähnlich wie früher, genügt, das Polynom $g(x, t)$ unseres Kriteriums als in x vom höchsten Koeffizienten 1 und mit Koeffizienten aus einem Integritätsbereich Γ, zu dem K Quotientenkörper ist, anzunehmen.

4. Irreduzibilitätssatz bei endlicher Erweiterung.

Die folgende Betrachtung benutzt den

Hilfssatz. Ist $f(x)$ ein Polynom über der endlichen Erweiterung Λ erster Art des (unendlichen) Körpers K und vom Grade $n \geqq 1$, so gibt es in Λ Elemente c, so daß die transformierte Funktion $f(x+c)$ von allen ihren bezüglich K konjugierten verschieden ist.

Beweis. Das Absolutglied von $f(x+c)$ ist $f(c)$; es genügt daher zu zeigen, daß $f(c)$ bei passender Wahl von c in Λ von allen konjugierten Elementen verschieden ist.

Es sei Λ über K vom Grade n, $\Lambda = \mathsf{K}(\vartheta)$ und $\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(n)}$ die (sämtlich voneinander verschiedenen) konjugierten Elemente zu ϑ, endlich $\mathsf{N} = \mathsf{K}(\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(n)})$. Sind $f^{(1)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ die entsprechenden Konjugierten zu $f(x)$, so bilde man mit Unbestimmten $x_0, \ldots, x_{n-1}$ für $i = 1, \ldots, n$

$$f^{(i)} = f^{(i)}(x_0 + x_1 \vartheta^{(i)} + \ldots + x_{n-1} \vartheta^{(i)n-1}).$$

Diese n Polynome sind voneinander verschieden. Angenommen nämlich, es sei etwa $f^{(r)} = f^{(s)}$. Dann sind die beiden Elemente

$$a_r = x_0 + x_1 \vartheta^{(r)} + \ldots + x_{n-1} \vartheta^{(r)n-1}, \quad a_s = x_0 + x_1 \vartheta^{(s)} + \ldots + x_{n-1} \vartheta^{(s)n-1}$$

über $\mathsf{N}(f^{(r)}) = \mathsf{N}(f^{(s)})$ algebraisch, und das gleiche gilt also für ihre Differenz

$$a_r - a_s = x_1(\vartheta^{(r)} - \vartheta^{(s)}) + \ldots + x_{n-1}(\vartheta^{(r)n-1} - \vartheta^{(s)n-1}).$$

Diese muß also in $\mathsf{N}(f^{(r)})$ einer Gleichung $G(x) = 0$ genügen, deren Koeffizienten Polynome in $f^{(r)}$ über N sind. Faßt man aber $G(x)$ als Polynom in $x, x_0, \ldots, x_{n-1}$ über N auf, so erkennt man, daß die höchste Potenz von x_0 als Koeffizienten ein nicht identisch verschwindendes Polynom *nur* in x hat. Setzt man daher für x das nicht identisch verschwindende Polynom $a_r - a_s$ (es ist ja $\vartheta^{(r)} - \vartheta^{(s)} \neq 0$) ein, so kann auch $G(a_r - a_s)$ nicht identisch verschwinden. Unsere Annahme war also falsch, die $f^{(i)}$ sind sämtlich voneinander verschieden. — Es folgt nun, daß auch das Differenzenprodukt der $f^{(i)}$ nicht identisch verschwindet, so daß man in K Elemente $x_0^*, \ldots, x_{n-1}^*$ finden kann, nach deren Einsetzung für $x_1, \ldots, x_{n-1}$ dieses Differenzenprodukt von Null verschieden ist. Dann liefert aber

$$c = x_0^* + x_1^* \vartheta + \ldots + x_{n-1}^* \vartheta^{n-1}$$

ein Element aus Λ mit der verlangten Eigenschaft, da $f(x_0^* + \ldots + x_{n-1}^* \vartheta^{n-1})$ von allen Konjugierten verschieden ist. —

Es soll jetzt von der Gültigkeit des H. I. in K auf die Gültigkeit in Λ geschlossen werden. Die eben eingeführten Bezeichnungen mögen beibehalten werden.

Es sei demgemäß

$$f(x,t) = \prod_{i=0}^{l} f_i(x,t)$$

die Primfaktorzerlegung in $\Lambda(t)$ eines Polynoms über Λ. Weiter sei

$$f(x,t) = \prod_{i=1}^{m} g_i(x,t)$$

die entsprechende Zerlegung in $\mathsf{N}(t)$. Dann lassen sich nach dem Hilfssatz m Elemente c_i $(i = 1, \ldots, m)$ in N bestimmen, so daß die bezüglich K konjugierten zu jeder der Funktionen $g_i(x - c_i, t)$, nämlich $g_i^{(\nu)}(x - c_i^{(\nu)}, t)$ $(\nu = 1, \ldots, q$, wenn $[\mathsf{N}:\mathsf{K}] = q)$, sämtlich untereinander verschieden sind. Für jedes feste i haben die $g_i^{(\nu)}(x - c_i^{(\nu)}, t)$ ersichtlich lauter voneinander verschiedene Wurzeln, da sie irreduzibel und verschieden sind. Über $\mathsf{K}(t)$ aber sind alle diese Wurzeln miteinander konjugiert, denn man erkennt leicht, daß es Automorphismen gibt, die eine vorgegebene Wurzel in eine vorgegebene andere überführen. Das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{q} g_i^{(\nu)}(x - c_i^{(\nu)}, t) = G_i(x,t)$$

ist daher ein *irreduzibles* Polynom über $\mathsf{K}(t)$. Da nun der H. I. über K gelten soll, lassen sich in K unendlich viele t^* bestimmen, so daß *alle* $G_i(x,t^*)$ in K irreduzibel werden. Dann müssen aber auch alle $g_i(x - c_i, t^*)$ in N irreduzibel werden; denn aus einer Zerlegung in N folgte eine entsprechende Zerlegung aller Konjugierten $g_i^{(\nu)}(x - c_i^{(\nu)}, t^*)$ und daraus sofort eine solche von $G_i(x,t^*)$. — Mit $g_i(x - c_i, t^*)$ sind nun auch alle $g_i(x,t^*)$ in N irreduzibel, da Funktion und ganz linear Transformierte stets gleichzeitig reduzibel und irreduzibel sind.

Für alle der ausgewählten t^* mit höchstens endlich vielen Ausnahmen läßt sich nun auch, behaupten wir, in Λ

$$f(x,t^*) = \prod_{i=1}^{l} f_i(x,t^*)$$

nicht weiter zerlegen. Nehmen wir das Gegenteil an: Für unendlich viele dieser t^* tritt ein weiterer Zerfall ein. Dann muß einer der Faktoren, etwa $f_r(x,t^*)$ für unendlich viele dieser t^* weiter zerfallen. Sei nun

$$f_r(x,t) = \prod_{i=1}^{v} \bar{g}_i(x,t)$$

die Primfaktorzerlegung von $f_r(x,t)$ in $\mathsf{N}(t)$, so daß also die $\bar{g}_i(x,t)$ gewisse der $g_i(x,t)$ sind. Da alle $\bar{g}_i(x,t^*)$ in N irreduzibel sind, kann ein Faktor von $f_r(x,t^*)$ nur ein Teilprodukt von Polynomen $\bar{g}_i(x,t^*)$, etwa $\prod_i' \bar{g}_i(x,t^*)$, erstreckt über gewisse i, sein. Das Polynom $\prod_i' \bar{g}_i(x,t)$ in x über $\mathsf{N}(t)$ ist dann für unendlich viele t^* ein solches über Λ. Daraus

folgt, daß die Koeffizienten selbst Polynome in t über Λ sind, d. h. daß $\Pi' \bar{g}_i(x,t)$ Polynom über $\Lambda(t)$ ist, während doch $f_r(x,t)$ in $\Lambda(t)$ keine echten Teiler haben sollte. — Damit ist unsere Behauptung bewiesen und wir können formulieren:

Gilt der H. I. im Körper K, *so gilt er auch in jeder endlichen Erweiterung erster Art von* K.

Inwieweit ein analoger Satz für endliche Erweiterungen zweiter Art oder sogar für Wurzelkörper mit endlichem Exponenten gilt, muß offen bleiben. Wir bemerken nur folgendes: Ist K von der Charakteristik p (Primzahl) und bezeichnet in üblicher Weise K^p den Körper aller p-ten Potenzen der Elemente von K, so ergibt sich für den Fall, daß $[\mathsf{K}:\mathsf{K}^p]=p$, sofort die analoge Behauptung für Erweiterungen zweiter Art. Ist nämlich Λ eine solche, so gibt es einen Zwischenkörper Z zwischen K und Λ, so daß Z über K von erster Art, Λ über Z Wurzelkörper und zwar von endlichem Exponenten f ist (sofern Λ über K überhaupt endlich ist). Gilt nun der H. I. in K, so gilt er nach dem eben Bewiesenen auch in Z. Λ aber ist mit Z isomorph, da $\mathsf{Z}^{p^{-f}}$ ersichtlich Λ umfaßt und $[\Lambda:\mathsf{Z}]=[\mathsf{Z}^{p^{-f}}:\mathsf{Z}]=[\mathsf{K}^{p^{-f}}:\mathsf{K}]=p^f$, also $\Lambda=\mathsf{Z}^{p^{-f}}$ ist; $\mathsf{Z}^{p^{-f}}$ aber ist bekanntlich mit Z isomorph.

5. Potenzreihenentwicklung.

Ω sei ein unendlicher Körper, t ein transzendentes Element darüber. Im folgenden sollen für die algebraischen Elemente erster Art (und damit übrigens auch für die von zweiter Art) über $\mathsf{K}=\Omega(t)$ systematische Darstellungen, insbesondere Potenzreihen, angegeben werden.

Sei $f(x)$ ein irreduzibles Polynom erster Art über K vom Grade n; als Polynom in x und t über Ω aufgefaßt, sei es als $f(x,t)$ bezeichnet. Seine Diskriminante ist eine nicht identisch verschwindende rationale Funktion von t über Ω. Da Ω unendlich ist, lassen sich darin Elemente t_0 angeben, so daß die Diskriminante von $f(x,t_0)$ einen endlichen Wert hat und von Null verschieden ist. Ein solches Element t_0 heißt ein *reguläres Element* für $f(x)$, und t_0 bezeichne im folgenden ein solches. $f(x,t_0)$ hat dann also n verschiedene Nullstellen.

Wir setzen nun $t=t_0+t'$, $f(x,t_0+t')=f'(x,t')$, so daß jetzt also $f'(x,t')$ für $t'=0$ n verschiedene Wurzeln hat, und legen an Stelle von $\mathsf{K}=\Omega(t)$ den transzendenten Erweiterungskörper $\bar{\mathsf{K}}=\Omega\{t'\}$ aller Potenzreihen

$$\sum_{\nu=\varrho}^{+\infty} c_\nu t'^{\nu}$$

zugrunde, wobei der Index ϱ des ersten von Null verschiedenen Koeffizienten c_ϱ eine ganze rationale Zahl, die *Ordnung* des Elementes von $\bar{\mathsf{K}}$, ist und die c_ν Elemente von Ω sind. K ist ja in $\bar{\mathsf{K}}$ als Teilkörper enthalten.

Die Elemente von $\overline{\mathsf{K}}$ mit nicht negativer Ordnung heißen ganz, die mit der Ordnung Null Einheiten. Nennt man zwei Elemente von $\overline{\mathsf{K}}$ kongruent modulo einer Potenz t'^r, wenn ihre Differenz mindestens die Ordnung r hat, so gelten die üblichen Gesetze für das Rechnen mit Kongruenzen. Die Restklassen $\bmod t'$ bilden einen Körper, der durch Ω repräsentiert werden kann. Es gilt weiter der folgende

Hilfssatz[4]). Zerfällt das Polynom $f(x)$ mit ganzen Koeffizienten aus $\overline{\mathsf{K}}$ $\bmod t'$ in teilerfremde Faktoren,

$$f(x) \equiv g_0(x) \cdot h_0(x) \bmod t',$$

so zerfällt $f(x)$ in $\overline{\mathsf{K}}$ ebenfalls in teilerfremde Faktoren,

$$f(x) = g(x) \cdot h(x),$$

und zwar in der Weise, daß

$$g(x) \equiv g_0(x),$$
$$h(x) \equiv h_0(x) \bmod t'.$$

Beweis. Da $g_0(x)$ und $h_0(x)$ $\bmod t'$ teilerfremd sind, lassen sich Polynome $h_1(x)$, $g_1(x)$ bestimmen, so daß

$$g_0(x)\,h_1(x) + h_0(x)\,g_1(x) \equiv \frac{f(x) - g_0(x)\,h_0(x)}{t'} \bmod t'.$$

Sind $f(x), h_0(x)$ von den Graden n, r, so darf der Grad von $h_1(x)$ bekanntlich kleiner als r angenommen werden. Es folgt

$$f(x) \equiv g_0(x)\,h_0(x) + t'(g_0(x)\,h_1(x) + h_0(x)\,g_1(x)) \bmod t'^2$$
$$\equiv (g_0(x) + t'g_1(x))(h_0(x) + t'h_1(x)) \bmod t'^2.$$

Weiter lassen sich $h_2(x), g_2(x)$ bestimmen, $h_2(x)$ wieder von geringerem als r-tem Grade, so daß

$$g_0(x)\,h_2(x) + h_0(x)\,g_2(x) \equiv \frac{f(x) - (g_0(x) + t'g_1(x))(h_0(x) + t'h_1(x))}{t'^2} \bmod t',$$

und es folgt

$$f(x) \equiv (g_0(x) + t'g_1(x) + t'^2 g_2(x))(h_0(x) + t'h_1(x) + t'^2 h_2(x)) \bmod t'^3.$$

Fährt man in gleicher Weise fort, so erhält man tatsächlich eine Zerlegung von $f(x)$ in $\overline{\mathsf{K}}(x)$, denn die Ordnungszahlen der Koeffizienten der nacheinander erhaltenen Polynome nehmen stets zu und die Grade der $h(x)$ bleiben stets unter r, so daß das komplementäre Polynom den Grad $n - r$ bekommen wird. —

Sei nun α eine Wurzel von $f'(x, 0) = 0$. Dann hat $f'(x, t') \bmod t'$ den Linearfaktor $x - \alpha$, und der Komplementärfaktor ist nach unseren obigen Überlegungen dazu $\bmod t'$ relativ prim. Es sind also, wenn wir

[4]) Vgl. Hensel, Theorie der algebraischen Zahlen, Kap. IV.

noch durch Multiplikation mit einer hinreichend hohen Potenz von t' dafür sorgen, daß $f'(x, t')$ ganze Koeffizienten bekommt, die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt, wenn nur $\Omega(\alpha)$ als Grundkörper angenommen wird. Es ergibt sich also aus dem Hilfssatz, daß $f'(x, t')$ in $\Omega(\alpha)\{t'\}$ eine Wurzel hat, eine Potenzreihe, deren erstes Glied α ist und deren folgende Koeffizienten zu $\Omega(\alpha)$ gehören. Allgemein ergibt sich: $f'(x, t')$ zerfällt im Körper $\mathsf{W}\{t'\}$, wo W *den* endlichen Erweiterungskörper von Ω bezeichnet, in dem $f'(x, 0)$ ganz zerfällt, in Linearfaktoren. Die Wurzeln sind von der Form

$$x^{(\lambda)} = \sum_{\nu=\varrho_\lambda \geqq 0}^{+\infty} c_\nu^{(\lambda)} t'^{\nu} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n),$$

wobei für jedes λ die Koeffizienten $c_\nu^{(\lambda)}$ dem Körper $\Omega(c_0^{(\lambda)})$ angehören.

Wendet man das erhaltene Resultat zweimal an, so erhält man das im nächsten Abschnitt zu benutzende Ergebnis:

$f(x) = f(x, t, u)$ sei Polynom in den drei Unbestimmten x, t, u über dem (unendlichen) Körper Ω. Dann lassen sich auf unendlich viele Arten „reguläre" Stellenpaare t_0, u_0 für $f(x)$ in Ω finden, so daß $f(x, t_0, u_0)$ nur einfache Wurzeln bekommt, sofern $f(x)$ über $\Omega(u, t)$ von erster Art ist. Setzt man dann $t = t_0 + t'$, $u = u_0 + u'$, so lassen sich die Wurzeln von $f(x)$ darstellen als Potenzreihen

$$x^{(\lambda)} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} c_{\mu\nu}^{(\lambda)} t'^{\mu} u'^{\nu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} c_{\mu\nu}^{(\lambda)} (t - t_0)^{\mu} (u - u_0)^{\nu} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n),$$

wobei die $c_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ einem endlichen Erweiterungskörper von Ω angehören und zwar in der Weise, daß für jedes feste λ alle $c_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ dem Körper $\Omega(c_{00}^{(\lambda)})$ entnommen sind. —

Im folgenden sollen allgemein die endlichen Erweiterungen erster Art eines Potenzreihenkörpers $\Omega\{t\}$ mit vollkommenem Ω noch etwas näher untersucht werden. Wir setzen dabei die Grundlagen der Bewertungstheorie voraus, wie sie von J. Kürschák, A. Ostrowski und K. Rychlík[5]) entwickelt worden sind. Diese Entwicklungen werden jedoch später nicht benutzt werden; wir dürfen uns daher etwas kürzer fassen.

Ω sei ein beliebiger vollkommener, eventuell auch endlicher Körper, $\mathsf{K} = \Omega\{t\}$ sei der Körper aller Potenzreihen $\sum_{\nu=\varrho}^{+\infty} c_\nu t^\nu$ in einer Unbestimmten t mit Koeffizienten aus Ω. Gibt man einem Element aus K mit der Ordnung ϱ den Betrag C^ϱ, wo C eine feste positive Zahl mit $0 < C < 1$

[5]) J. Kürschák, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, Crelles Journal **142** (1913), S. 211. A. Ostrowski, Über sogenannte perfekte Körper, Crelles Journal **147** (1917), S. 191; Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie, Crelles Journal **143** (1194), S. 255. K. Rychlík, Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper, Crelles Journal **153** (1924), S. 94.

ist, so wird dadurch eine Bewertung von K geliefert. Sie ist diskret und K ist bezüglich dieser Bewertung perfekt.

Die Elemente mit einer Bewertung $\leqq 1$ heißen ganze Elemente; insbesondere ist t ganz und überdies Primelement für diese Bewertung. Die Restklassen mod t bilden einen Körper, der durch Ω repräsentiert werden kann.

Da K bezüglich seiner Bewertung perfekt ist, läßt sich die Bewertung auf jede algebraische Erweiterung eindeutig fortsetzen. Ist α algebraisch über K und $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ die irreduzible Gleichung, der α in K genügt, so muß α durch den Betrag $|\alpha| = \sqrt[n]{|a_0|}$ bewertet werden. Algebraisch ganz heißen die Elemente α, für die alle Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_0$ ganz sind. Es sind wieder genau die Elemente mit einer Bewertung $\leqq 1$. Die ganzen Elemente bilden einen Integritätsbereich, zu dem K Quotientenkörper ist; von den beiden Elementen α und $\frac{1}{\alpha}$ ist stets eines ganz; sind beide ganz, so heißt α Einheit. — Alles dies entnehmen wir der allgemeinen Bewertungstheorie. —

Jetzt sei N eine endliche normale Erweiterung erster Art von K vom Grade n. τ sei ein ganzes Nichteinheitselement von maximaler Bewertung; ein solches existiert ersichtlich, und jedes andere Element von N hat eine Potenz von $|\tau|$ zur Bewertung, d. h. N ist ebenfalls diskret bewertet und τ ist Primelement. Insbesondere sei

$$t = \varepsilon \cdot \tau^e, \qquad |N(\tau)| = C^f,$$

wo ε eine Einheit in N bezeichnet und die Norm $N(\alpha)$ eines Elementes α von N in üblicher Weise definiert ist als das Produkt der bezüglich K konjugierten Elemente zu α. Aus der dann gültigen Normengleichung $N(\alpha) \cdot N(\beta) = N(\alpha\beta)$ folgt dann

$$|N(t)| = |t^n| = C^n = |N(\tau^e)| = |N(\tau)|^e = C^{ef},$$

also $n = e \cdot f$.

$\mathfrak{G}$ sei die Galoissche Gruppe von N über K. Wir wollen die in bekannter Weise definierte Körperkette zwischen K und N, Zerlegungskörper, Trägheitskörper und Verzweigungskörper für das Primelement t, charakterisieren[6]).

Da alle zu τ konjugierten Elemente die gleiche Bewertung besitzen, also die gleiche Nullrestklasse definieren, ist K sein eigener Zerlegungskörper.

N besitzt eine Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so daß jedes seiner Elemente in der Form $x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$ mit $x_1, \ldots, x_n$ aus K dargestellt werden kann.

[6]) Vgl. dazu: K. Hensel, Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 433.

Wie üblich zeigt man, daß auch ganzzahlige Basen existieren und daß diejenigen mit maximalem Diskriminantenbetrag ein Fundamentalsystem $\omega_1, \ldots, \omega_n$ bilden, durch das jedes ganze Element von N in der Form $x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n$ mit ganzen $x_1, \ldots, x_n$ aus K dargestellt werden kann, und zwar genau einmal. Dann und nur dann ist also ein so dargestelltes Element durch t teilbar, wenn alle $x_1, \ldots, x_n$ es sind. Der Restklassenring mod t in N ist also eine Erweiterung n-ten Grades des Restklassenringes mod t in K (der übrigens ein Körper ist).

In der Form $x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n$ erhält man mit ganzen $x_1, \ldots, x_n$ a fortiori alle Restklassen mod τ. Eventuell aber erhält man eine Klasse mehrmals; dann läßt sich die Nullklasse durch $a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n$ mit nicht sämtlich verschwindenden ganzen $a_1, \ldots, a_n$ aus K darstellen. Ist etwa $a_n \neq 0$, so bekommt man schon in der Form $x_1\omega_1 + \ldots + x_{n-1}\omega_{n-1}$ alle Klassen mod τ. Durch Fortsetzung dieser Überlegung kommt man zu einem System $\omega_1, \ldots, \omega_\mathfrak{f}$, aus dem man jede Restklasse mod τ genau einmal kombinieren kann. Dann ist also der Restklassenkörper mod τ in N eine algebraische Erweiterung $\mathfrak{f}$-ten Grades des Restklassenkörpers mod τ in K.

Ist nun $\varkappa$ eine natürliche Zahl, so bekommt man ein volles Restsystem mod $\tau^\varkappa$, wenn man in $r_0 + r_1\tau + \ldots + r_{\varkappa-1}\tau^{\varkappa-1}$ die $r_0, \ldots, r_{\varkappa-1}$ unabhängig voneinander ein volles Restsystem mod τ durchlaufen läßt. Der Restklassenring mod $\tau^\varkappa$ ist also Erweiterung $\varkappa$-ten Grades des Ringes mod τ. Speziell ist also der Ring mod τ^e, d. h. mod t, Erweiterung e-ten Grades des Ringes mod τ, also Erweiterung $e\cdot\mathfrak{f}$-ten Grades des Restklassenkörpers mod t in K. Nun war aber diese Erweiterung schon als solche vom $e\cdot f$-ten Grade erkannt worden, so daß sich ergibt $e\cdot\mathfrak{f} = e\cdot f$, also $\mathfrak{f} = f$.

Nun gilt in N, wie in jedem perfekten Primelementkörper (und N ist, wie man leicht sieht, wirklich perfekt), der dem Hilfssatz von S. 286 entsprechende Satz: Zerfällt ein ganzzahliges Polynom $f(x)$ mod τ in teilerfremde Faktoren, $f(x) \equiv g_0(x)\cdot h_0(x) \bmod \tau$, so zerfällt $f(x)$ auch in N, $f(x) = g(x)\cdot h(x)$ in teilerfremde Faktoren, und zwar gilt $g(x) \equiv g_0(x)$, $h(x) \equiv h_0(x) \bmod \tau$. — Jede Restklasse mod τ genügt aber im Restklassenkörper mod t in K, den wir durch Ω repräsentiert denken, einer irreduziblen Kongruenz $\varphi(x) \equiv 0 \bmod t$, und zwar hat diese Kongruenz wegen der Vollkommenheit von Ω lauter verschiedene Nullstellen. Ist α_0 Repräsentant einer solchen Restklasse, so gilt also in N:

$$\varphi(x) \equiv (x - x_0)\cdot\bar{\varphi}(x) \bmod \tau$$

mit

$$((x - \alpha_0), \bar{\varphi}_0(x)) = 1.$$

Nach dem eben zitierten Satz existiert also in N eine Zerlegung $\varphi(x) = (x - \alpha)\cdot\bar{\varphi}(x)$ mit $\alpha \equiv \alpha_0 \bmod \tau$, so daß demnach α, ein über Ω algebraisches Element, die Restklasse von α_0 repräsentieren kann. Allgemein

kann daher der Restklassenkörper mod τ durch eine algebraische Erweiterung Λ (von erster Art) über Ω repräsentiert werden. Λ läßt sich übrigens charakterisieren als Körper aller in N enthaltenen, in bezug auf Ω algebraischen Elemente, denn ein solches Element $\neq 0$ hat nach Definition der Bewertung den Betrag 1, so daß zwei derartige Elemente nicht mod τ kongruent sein können.

Man erkennt jetzt, daß $\Lambda\{t\}$ der Trägheitskörper ist. Ein Automorphismus von N bzgl. K nämlich, der alle Restklassen mod τ festhält, muß die Elemente von Λ festhalten und damit die von $\Lambda\{t\}$, denn über Ω algebraische Elemente gehen dabei in ebensolche über. — Andrerseits ergibt sich durch Gradvergleichungen, daß $[\mathsf{N} : \Lambda\{t\}] = e$. Es folgt, da die Primelemente von N über $\Lambda\{t\}$ vom Grade e sind, daß sie alle primitiv über $\Lambda\{t\}$ sind. Nun sei die Gleichung für τ in $\Lambda\{t\}$: $g(x) = (x-\tau^{(1)})\cdot(x-\tau^{(2)})\cdot\ldots\cdot(x-\tau^{(e)})$. Bei den Automorphismen von N bezüglich $\Lambda\{t\}$ geht dann ein Element $a_0+a_1\tau+\ldots+a_{e-1}\tau^{e-1}$ mit $a_0, \ldots, a_{e-1}$ aus $\Lambda\{t\}$ über in $a_0+a_1\tau^{(i)}+\ldots+a_{e-1}\tau^{(i)\,e-1}$, woraus man sieht, daß dabei die Klassen mod τ erhalten bleiben. $\Lambda\{t\}$ ist demnach Trägheitskörper.

Wir betrachten endlich die Reihe der Verzweigungskörper. Die zu τ konjugierten Elemente lassen sich wie folgt in Reihen darstellen: $\tau^{(i)} = c_1^{(i)}\tau + c_2^{(i)}\tau^2 + \ldots$ mit Elementen $c_\varkappa^{(i)}$ aus Λ und nach obigem $c_1^{(i)} \neq 0$. Wenn nun ein Automorphismus σ für ein natürliches $\varkappa$ die Eigenschaft $\sigma\tau \equiv \tau \bmod \tau^{\varkappa+1}$ hat, so gilt für alle ganzen γ aus N: $\sigma\gamma \equiv \gamma \bmod \tau^{\varkappa+1}$, d. h. σ gehört zur $\varkappa$-ten Verzweigungsgruppe. Man hat also nur das Kongruenzverhalten der $\tau^{(i)}$ zu untersuchen. — Sofort ergibt sich noch, daß von einem gewissen Werte von $\varkappa$ an N selbst $\varkappa$-ter Verzweigungskörper ist, da alle $\tau^{(i)}$ voneinander verschieden sind und demgemäß nicht für beliebig hohe Potenzen $\tau^\varkappa$ kongruent sein können.

Jetzt bezeichne der Index ν bei $\sigma_i^{(\nu)}$ die Zugehörigkeit des Automorphismus zur ν-ten Verzweigungsgruppe, so daß die Elemente der Trägheitsgruppe mit $\sigma_i^{(0)}$ zu bezeichnen wären. Dann gilt:

$$\sigma_i^{(0)}\tau \equiv c_1^{(i)}\tau;\ \sigma_\varkappa^{(0)}\tau \equiv c_1^{(\varkappa)}\tau \bmod \tau^2, \text{ also } \sigma_i^{(0)}\sigma_\varkappa^{(0)}\tau \equiv c_1^{(i)}c_1^{(\varkappa)}\tau \equiv \sigma_\varkappa^{(0)}\sigma_i^{(0)}\tau \bmod \tau^2.$$

Weiter ist $\sigma_l^{(1)}\tau \equiv \tau \bmod \tau^2$, also $\sigma_i^{(0)-1}\sigma_l^{(1)}\sigma_i^{(0)}\tau \equiv \tau \bmod \tau^2$. Daraus erkennt man, daß die erste Verzweigungsgruppe Normalteiler ist mit Abelscher Faktorgruppe.

Ganz analog erkennt man aus den Kongruenzen ($\lambda \geqq 2$)

$$\sigma_i^{(\lambda-1)}\tau \equiv \tau + c_\lambda^{(i)}\tau^\lambda;\ \sigma_\varkappa^{(\lambda-1)}\tau \equiv \tau + c_\lambda^{(\varkappa)}\tau^\lambda \bmod \tau^{\lambda+1},$$

also

$$\sigma_i^{(\lambda-1)}\sigma_\varkappa^{(\lambda-1)}\tau \equiv \tau + (c_\lambda^{(i)} + c_\lambda^{(\varkappa)})\,\tau^\lambda \equiv \sigma_\varkappa^{(\lambda-1)}\sigma_i^{(\lambda-1)}\tau \bmod \tau^{\lambda-1}$$

und der Folgerung $\sigma_i^{(\lambda-1)^{-1}} \sigma^{(\lambda)} \sigma_i^{(\lambda-1)} \tau \equiv \tau \bmod \tau^{\lambda+1}$, daß die λ-te Verzweigungsgruppe Normalteiler in der $(\lambda-1)$-ten Verzweigungsgruppe ist mit Abelscher Faktorgruppe. Man erkennt so, daß der Körper N über $\Lambda\{t\}$ auflösbar ist.

6. Irreduzibilitätssatz in $\Omega(u)$.

Jetzt sei K ein Körper, der aus einem unendlichen Unterkörper durch rein transzendente Erweiterung erhalten werden kann. Man darf offenbar annehmen, daß K aus einem unendlichen Unterkörper Ω durch *einfache* transzendente Erweiterung entsteht, $K = \Omega(u)$. Für diesen Körper K soll jetzt der H. I. bewiesen werden. Es genügt dazu, das Kriterium von Abschnitt 3 als gültig nachzuweisen.

Es sei also $f(x,t)$ ein Polynom über K, und zwar, wie man nach einer früheren Bemerkung für den Beweis annehmen darf, mit Koeffizienten aus $\Omega[u]$, das in $K(t)$ keine Nullstelle hat. Die Primfaktorzerlegung in $K(t)$ sei

$$f(x,t) = \prod_{i=1}^{l} f_i(x,t) \cdot \prod_{i=1}^{m} g_i(x,t) \cdot \prod_{i=1}^{n} h_i(x,t),$$

wobei in das erste Produkt alle Faktoren von erster Art über $K(t)$, in das dritte alle Binome $x^{p^f} - \varphi_i(t)$ zweiter Art und in das zweite alle übrigen Faktoren zweiter Art aufgenommen sind. Wenn $g_i(x,t)$ Polynom von x^{p^ν}, aber nicht von $x^{p^{\nu+1}}$ ist, so ist $g_i(x,t) = \bar{g}_i(x^{p^\nu}, t)$ und $\bar{g}_i(x,t)$ von erster Art. Wir weisen nun zunächst nach, daß es in K unendlich viele t^* gibt, so daß alle $f_i(x,t^*)$ und $\bar{g}_i(x,t^*)$ in K keine Nullstellen haben. Die $g_i(x,t^*)$ haben dann in K a fortiori keine Nullstellen, da ihre Wurzeln die p^f-ten Wurzeln der entsprechenden Nullstellen der $\bar{g}_i(x,t^*)$ sind. Am Schluß werden wir zeigen, daß unter den ausgewählten t^* unendlich viele vorkommen, für die auch die $h_i(x,t^*)$ keine Nullstellen in K haben.

Gemäß den Entwicklungen des vorigen Abschnittes bestimmen wir nun zwei Elemente u_0, t_0 in Ω, die ein reguläres Stellenpaar gleichzeitig für alle $f_i(x,t)$ und $\bar{g}_i(x,t)$ bilden, wie es wegen der Unendlichkeit von Ω möglich ist, und stellen die sämtlichen Wurzeln in der oben angegebenen Weise als Potenzreihen dar:

$$x^{(\lambda)} = \sum_{i,k=0}^{+\infty} c_{ik}^{(\lambda)} (u-u_0)^i (t-t_0)^k,$$

wo $\lambda = 1, \ldots, l+m$.[7]) Die Reihenfolge sei so gewählt, daß die ersten r unter den Wurzeln $(0 \leqq r \leqq l+m)$ absolute Glieder $c_{00}^{(\lambda)}$ aus Ω haben, daß aber für $\lambda > r$ die $c_{00}^{(\lambda)}$ außerhalb von Ω liegen. Dann können die ersten r Reihen nicht im Endlichen abbrechen, denn bei ihnen gehören

[7]) Vgl. D. Hilbert, a. a. Ort, S. 112f.

alle $c_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ zu Ω. Aus dem Abbrechen einer dieser Reihen würde sich ergeben, daß die betreffende Funktion $f_i(x,t)$ oder $\bar{g}_i(x,t)$ in $\Omega(u,t) = \mathsf{K}(t)$ einen Linearfaktor hätte; das erste ist gegen die Voraussetzung, aus dem zweiten würde folgen, daß das zugehörige Polynom $g_i(x,t)$ ein Binom der Form $x^{\nu'} - \varphi(t)$ als Teiler hätte, also wegen seiner Irreduzibilität selbst Binom wäre, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist.

Jetzt sei s eine natürliche Zahl. Wir denken uns in jeder der r ersten Reihen die Glieder gleicher Dimension zu Teilsummen zusammengefaßt, indem wir $u - u_0$ als eindimensional, $t - t_0$ als s-dimensional ansetzen. Jede der so entstehenden Teilsummen hat nur endlich viele Summanden; die Teilsummen verschwinden also nicht etwa von einer Stelle an sämtlich. Man kann daher in jeder der r ersten Reihen eine dieser Teilsummen herausgreifen, deren Dimension größer ist als die von $f(x,t)$ in t und u, wieder u als ein- und t als s-dimensional angesetzt, und die nicht identisch verschwindet. Das Produkt dieser r Teilsummen ist daher ein ebenfalls nicht identisch verschwindendes Polynom in $u - u_0$, $t - t_0$ über Ω,

$$\varphi[u - u_0, t - t_0] \not\equiv 0.$$

Setzen wir nun mit zunächst noch unbestimmtem c für $t - t_0$ ein:

$$t^* - t_0 = c \cdot (u - u_0)^s,$$

so verschwindet auch dann φ nicht identisch, so daß wir c in K so bestimmen können, daß

$$\varphi[u - u_0, c \cdot (u - u_0)^s] \neq 0.$$

Bei dieser Einsetzung gehen die Wurzeln der $f_i(x,t)$, $\bar{g}_i(x,t)$ in die von $f_i(x, c\cdot(u-u_0)^s + t_0)$, $\bar{g}_i(x, c\cdot(u-u_0)^s + t_0)$ über. Da aber diese r ersten Wurzeln Glieder von höherer Dimension enthalten, als die Dimension von $f(x, c\cdot(u-u_0)^s + t_0)$ in $u - u_0$, so können die Reihen überhaupt nicht abbrechen; denn das Abbrechen würde zeigen, daß $f(x, c\cdot(u-u_0)^s + t_0)$ einen entsprechenden Linearfaktor hat, was wegen dieser Dimensionsbeziehung unmöglich ist.

Damit hat sich ergeben, daß bei der Ersetzung von t durch $c\cdot(u-u_0)^s + t_0$ die ersten r Wurzeln nicht in K liegen. Aber auch die folgenden $l + m - r$ Wurzeln können nach der Einsetzung nicht in K liegen, da das schon für ihre absoluten Glieder nicht der Fall ist, die ja bei jener Einsetzung nicht berührt werden. Nach dem oben Bemerkten heißt das, daß für $t^* = c\cdot(u-u_0)^s + t_0$, wo nach dem Beweis für c und t_0 nur endlich viele Elemente von Ω ausgeschlossen sind, alle $f_i(x,t^*)$ und $g_i(x,t^*)$ keinen Linearfaktor haben.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß unter diesen t^* unendlich viele vorkommen, so daß auch die Binome $h_i(x,t^*)$ keinen Linearfaktor be-

kommen. Es genügt dazu nachzuweisen, daß unter den t^* solche vorkommen, für die keines der Polynome $\varphi(t)$, die ja nicht p-te Potenzen sind, eine p-te Potenz wird (p bezeichnet immer die Charakteristik von K, die ja im Falle, daß überhaupt Polynome zweiter Art auftreten, eine Primzahl ist). Sei nun

$$\varphi(t) = a_q t^q + a_{q-1} t^{q-1} + \ldots + a_0$$

eins der Polynome $\varphi_i(t)$ und nehmen wir an, daß es für fast alle der ausgewählten t^* p-te Potenz wird. Da unter diesen t^* unendlich viele p-te Potenzen vorkommen, ergibt sich zunächst durch deren Einsetzung und Auflösung nach den $a_q, \ldots, a_0$, daß diese Koeffizienten sämtlich p-te Potenzen sind. Sei ferner $\bar{t}$ eins der t^*, das nicht p-te Potenz ist; dann gehören unendlich viele $t' \cdot \bar{t}$, wo die t' p-te Potenzen sind, zu den t^*. Bilden wir nun

$$\bar{\varphi}(t) = \varphi(\bar{t} \cdot t) = b_q t^q + b_{q-1} t^{q-1} + \ldots + b_0,$$

so ergibt sich wie oben, daß die $b_q, \ldots, b_0$ p-te Potenzen sind. Da aber

$$\varphi(t) = \bar{\varphi}\left(\frac{t}{\bar{t}}\right) = \frac{b_q}{\bar{t}^q} t^q + \frac{b_{q-1}}{\bar{t}^{q-1}} t^{q-1} + \ldots + b_0$$

ist, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich für $i = 0, \ldots, q$

$$\frac{b_i}{\bar{t}^i} = a_i,$$

also, wenn $a_i \neq 0$,

$$\bar{t}^i = \frac{b_i}{a_i}.$$

Danach wären $\bar{t}^i$ p-te Potenz, was aber doch nur für $i \equiv 0 \bmod p$ der Fall ist. Für $i \not\equiv 0 \bmod p$ ist daher $a_i = 0$, d. h. $\varphi(t)$ ist p-te Potenz. —

Damit ist auf indirektem Wege der noch fehlende Nachweis erbracht und somit vollständig bewiesen:

In einem Körper, der durch rein transzendente Erweiterung aus einem unendlichen Teilkörper erhalten werden kann, gilt der H. I. —

Zum Schluß möchte ich Herrn Professor Hasse für Anregung und Förderung dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank sagen.

(Eingegangen am 24. Juni 1930.)

Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze.

Von

J. Karamata in Belgrad.

Die Herren Hardy und Littlewood[1]) haben folgende zwei Sätze bewiesen:

Satz A. *Es sei*

$$a_n \geqq 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

$$f(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \quad \textit{konvergent für} \quad r < 1$$

und

$$\varphi(x) = a x^\sigma (\lg x)^{\sigma_1} (\lg \lg x)^{\sigma_2} \ldots (\lg_k x)^{\sigma_k}, \qquad \sigma > 0; \tag{2}$$

aus

$$f(r) \sim \varphi\left(\frac{1}{1-r}\right) \quad \textit{für} \quad r \to 1$$

folgt dann

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(n) \quad \textit{für} \quad n \to \infty.$$

Satz B. *Es sei*

$$a_n \geqq 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty, \quad \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 \quad \textit{für} \quad n \to \infty,$$

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s} \quad \textit{konvergent für} \quad s > 0$$

und

$$\varphi(x) = a x^\sigma, \qquad \sigma > 0;$$

aus

$$f(s) \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \quad \textit{für} \quad s \to 0$$

[1]) Hardy-Littlewood, Tauberian Theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, Proc. of the London Math. Soc. (2), **13** (1914), S. 174–191 (S. 180); Some theorems concerning Dirichlet's series, Messenger of Math. **43** (1914), S. 134–147.

folgt dann

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)}\varphi(\lambda_n) \quad \textit{für} \quad n \to \infty.$$

Was den Satz A betrifft, so wurde dieser von Herrn R. Schmidt[2]) weitgehend verallgemeinert, indem er erstens die Bedingung (1) durch eine allgemeinere ersetzt, zweitens die Funktion $\varphi(x)$, durch die, in seiner Arbeit so genannten gestrahlten Funktionen (Folgen) ersetzt, welche (2) als Spezialfall enthalten. Im Falle $a_\nu \geqq 0$ habe ich den Satz von Herrn R. Schmidt (im Referat des ersten Kongreß der Rumänischen Mathematiker, Cluj, April 1929, noch nicht erschienen) in einfacherer Form bewiesen. Die dabei vorkommenden Funktionen $\varphi(x)$ habe ich „regulär wachsende Funktionen" genannt, diese stimmen für $\sigma > 0$ mit der von Herrn Schmidt eingeführten gestrahlten Funktionen überein, für $\sigma = 0$ aber enthalten sie die gestrahlten Funktionen, was ich an einer anderen Stelle[3]) eingehend behandelte.

Der Satz B wurde anderseits von Herrn O. Szász[4]) verallgemeinert, indem er die Bedingung $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1$ wegließ und statt Dirichletscher Reihen Integrale von der Form $\int_0^\infty A(x)e^{-sx}dx$, wo $A(x)$ nicht abnimmt, betrachtete (die schon die Herren Landau[5]) und Doetsch[6]) in speziellen Fällen betrachteten[7]). Die Funktion $\varphi(x)$ behält aber die spezielle Form $a \cdot x^\sigma$.

In dieser Arbeit behalte ich die Annahme $a_n \geqq 0$ bei, verallgemeinere aber die beiden oben angeführten Sätze, indem ich den einer allgemeineren Funktion $\varphi(x)$ entsprechenden Integralsatz beweise. Anstatt Integrale obiger Form betrachte ich Stieltjessche Integrale der Form $\int_0^\infty e^{-sx}d\{A(x)\}$ mit

---

[2]) R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, Math. Zeitschr. **22** (1925), S. 89–152 (S. 151).

[3]) J. Karamata, Sur le mode de croissance régulière des fonctions, Mathematica (Cluj, Roumanie) **4** (1930), S. 38–53.

[4]) O. Szász, Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberischen Art, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. (1929), S. 325–340 (S. 326).

[5]) E. Landau, Monatsh. f. Math. u. Phys. 1907, S. 8–28.

[6]) Doetsch, Math. Annalen **82** (1920), S. 68–82.

[7]) Ebenfalls haben die Herren Hardy und Littlewood in der Note: Notes on the theory of series (XI): In Tauberian theorems, Proc. of the Lond. math. Soc. (2) **30** (1929), S. 23–37 (Theorem 1) den analogen Satz für Integrale von der Form

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt, \quad f(t) \geqq 0,$$

bewiesen; diese Integrale wie auch diejenigen, die Herr Szász betrachtet, sind aber in dem Stieltjesschen Integrale

$$\int_0^\infty e^{-st}d[A(t)], \quad A(t) \text{ nicht abnehmend,}$$

enthalten.

der nicht abnehmenden Funktion $A(x)$, da diese die Dirichletschen Reihen direkt als Spezialfall enthalten; denn es ist

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, d\{A(x)\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s},$$

wenn

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \lambda_1, \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n & \text{„ } \lambda_n < x \leqq \lambda_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

gesetzt wird.

Die Funktion $\varphi(x)$ setze ich als „regulär wachsend" voraus. Diesen Begriff habe ich in meiner unter [3]) zitierten Arbeit eingeführt, weshalb ich hier nur die Definition und die Haupteigenschaft ohne Beweis angebe.

Die stetige und positive Funktion $\varphi(x)$, welche mit x ins Unendliche wächst (welcher Fall uns hier nur interessiert), wird *regulär wachsend* genannt, wenn

$$(3) \qquad \frac{1}{x\varphi(x)} \int_0^x \varphi(t)\, dt \to \frac{1}{\sigma+1}, \quad \sigma \geqq 0 \text{ für } x \to \infty,$$

und dann wird

$$(4) \qquad \varphi(x) = x^\sigma L(x),$$

wo $L(x)$ eine *langsam wachsende, abfallende oder oszillierende* Funktion genannt wird und folgende Eigenschaft hat:

$$(5) \qquad L(xr)/L(r) \to 1 \quad \text{bei} \quad r \to \infty \text{ für jedes } x > 0.$$

Umgekehrt folgt (3) aus (4) und (5).

Die erwähnte Verallgemeinerung lautet:

Satz 1. *Es sei $A(x)$ nicht abnehmend, $\varphi(x)$ regulär wachsend,*

$$\varphi(x) = x^\sigma L(x) \to \infty, \quad \textit{wenn } x \to \infty, \quad \sigma \geqq 0,$$

sei ferner das Integral

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\{A(t)\} \quad \textit{für } s > 0 \textit{ konvergent};$$

aus

$$f(s) \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \quad \textit{für } s \to 0$$

folgt dann

$$A(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(x) \quad \textit{für } x \to \infty.$$

Diesen Satz folgere ich aus dem folgenden

Hauptsatz. *Sei*

$$(6) \qquad \varphi(x) = x^\sigma L(x) \to \infty, \quad \textit{wenn } x \to \infty, \quad \sigma \geqq 0,$$

$$(5) \qquad L(xr)/L(r) \to 1 \textit{ bei } r \to \infty \textit{ für jedes } x > 0;$$ [8])

[8]) Im Falle, wo $L(x)$ nicht abnimmt, genügt schon, wie Herr Landau (Bull. Acad. Belgique 1911, S. 443) gezeigt hat, daß $L(2r)/L(r) \to 1$ bei $r \to \infty$.

sei ferner das Integral

$$\int_0^\infty e^{-st}\,d\{A(t)\} \quad \textit{für } s>0 \textit{ konvergent}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-st}\,|d\{A(t)\}| = O\left\{\varphi\left(\frac{1}{s}\right)\right\}. \tag{7}$$

Aus

$$\int_0^\infty e^{-st}\,d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \quad \textit{bei } s\to 0 \tag{8}$$

folgt dann

$$\int_0^\infty e^{-st}\,g(e^{-st})\,d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right)\frac{1}{\Gamma(\sigma+1)}\int_0^\infty e^{-t}\,g(e^{-t})\,d\{t^\sigma\} \quad \textit{bei } s\to 0$$

für jede im Intervalle $(0,1)$ *stetige Funktion* $g(x)$. (*Für* $\sigma=0$ *hat man unter* t^σ *diejenige Funktion zu verstehen, die* $=0$ *für* $t=0$, *sonst* $=1$ *ist.*)

Beweis. Setzt man in (8) $(k+1)s$ $(k=0,1,2,\ldots)$ statt s, so folgt wegen (5) und (6)

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{-kst}\,d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\frac{1}{(k+1)s}\right) \sim \frac{1}{(k+1)^\sigma}\varphi\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{s}\right)\frac{1}{\Gamma(\sigma+1)}\int_0^\infty e^{-t}e^{-kt}\,d\{t^\sigma\},$$

also ist

$$\int_0^\infty e^{-st}\,P(e^{-st})\,d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right)\frac{1}{\Gamma(\sigma+1)}\int_0^\infty e^{-t}\,P(e^{-t})\,d\{t^\sigma\},$$

wo $P(x)$ ein beliebiges Polynom ist. Da jede stetige Funktion durch Polynome gleichmäßig approximiert werden kann, ist wegen (7) der Hauptsatz bewiesen.

Um aus dem Hauptsatze den Satz 1 zu erschließen, setze ich zuerst

$$e^{-t}g(e^{-t}) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0\leqq t\leqq 1,\\ \dfrac{1+\varepsilon-t}{\varepsilon} & \text{„ } 1\leqq t\leqq 1+\varepsilon, \quad \varepsilon>0,\\ 0 & \text{„ } 1+\varepsilon\leqq t. \end{cases}$$

Dann folgt, wenn man $1/s=x$ setzt,

$$A(x)+\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x(1+\varepsilon)}(1+\varepsilon-st)\,d\{A(t)\}$$

$$\sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)}\varphi(x)+\frac{1}{\Gamma(\sigma+1)}\varphi(x)\frac{1}{\varepsilon}\int_1^{1+\varepsilon}(1+\varepsilon-t)\,d\{t^\sigma\}. \tag{9}$$

Setzt man weiter

$$e^{-t}g(e^{-t}) = g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1-\varepsilon, \\ \frac{t-1+\varepsilon}{\varepsilon} & \text{„} \quad 1-\varepsilon \leqq t \leqq 1, \\ \frac{1+\varepsilon-t}{\varepsilon} & \text{„} \quad 1 \leqq t \leqq 1+\varepsilon, \\ 0 & \text{„} \quad 1+\varepsilon \leqq t, \end{cases}$$

so ist, da $A(x)$ nicht abnimmt,

$$0 < \frac{1}{\varphi(x)} \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x(1+\varepsilon)} (1+\varepsilon-st)\, d\{A(t)\}$$

$$\leqq \frac{1}{\varphi(x)} \int_{x(1-\varepsilon)}^{x(1+\varepsilon)} g_\varepsilon(st)\, d\{A(t)\} \to \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} g_\varepsilon(t)\, d\{t^\sigma\} = \frac{1}{\Gamma(\sigma+2)} \cdot \frac{(1+\varepsilon)^{\sigma+1}+(1-\varepsilon)^{\sigma+1}}{\varepsilon}$$

woraus nach (9) Satz 1 folgt.

Bemerkung. Nach Satz 1 ist leicht zu ersehen, daß folgender Satz gilt:

Satz 2. *Sei $A(x)$ eine nicht abnehmende Funktion derart, daß*

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}}\, d\{A(t)\} = \varphi(x) \to \infty \quad \textit{für} \quad x \to \infty$$

eine regulär wachsende Funktion ist[9]*, ferner sei $a(x)$ eine stetige und einseitig beschränkte Funktion; aus*

$$\int_0^\infty e^{-st}\, a(t)\, d\{A(t)\} \sim a \int_0^\infty e^{-st}\, d\{A(t)\}, \quad s \to 0,$$

folgt dann

$$\int_0^x a(t)\, d\{A(t)\} \sim a\, A(x).$$

Ist

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \lambda_1, \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n & \text{„} \quad \lambda_n < x \leqq \lambda_{n+1}, \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

dann folgt aus diesem Satz ein Resultat, welches ich im Referat des ersten Kongresses der slawischen Mathematiker, Warschau 1929, bewiesen habe und welches lautet:

---

[9]) Damit $\varphi(x)$ eine regulär wachsende Funktion sei, ist nach Satz 1 notwendig und hinreichend, daß es $A(x)$ ist, also wegen (3), daß

$$\frac{1}{x \cdot A(x)} \int_0^x A(t)\, dt$$

einen Grenzwert für $x = \infty$ besitzt.

$A(x)$ erfülle die Bedingungen des Satzes 2.[10]) *Aus*

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu p_\nu e^{-\lambda_\nu s}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu e^{-\lambda_\nu s}} \to a \quad \text{bei} \quad s \to 0$$

und

$$a_n > O(1)$$

folgt dann

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu} \to a \quad \text{bei} \quad n \to \infty$$

(wo $a(\lambda_n) = a_n$ gesetzt ist).

---

[10]) D. h., wegen [9]), daß der Ausdruck

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \frac{\lambda_\nu}{x}}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}, \quad \lambda_n < x \leqq \lambda_{n+1},$$

einen Grenzwert besitzt, wenn $x \to \infty$.

(Eingegangen am 25. Juni 1930.)

Ein Beitrag zur mathematischen Theorie der Gestalt der Himmelskörper*).

Von

Karl Maruhn in Leipzig.

Einleitung.

Schon Poincaré[1]) hat im Anschluß an seine Studien über die „birnenförmigen" Gleichgewichtsfiguren einer homogenen Flüssigkeit auf die Möglichkeit hingewiesen, über die lineare Reihe birnenförmiger Figuren zu einer aus zwei getrennten Massen bestehenden Gleichgewichtsfigur zu gelangen.

Angeregt durch die Untersuchungen von Poincaré hat sich auch Darwin mit Figuren dieser Art beschäftigt und kam so auch dazu, eine aus zwei Einzelmassen, die nur einen Punkt gemeinsam haben, bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten zu betrachten[2]). Ein strenger Existenzbeweis wird von ihm allerdings nicht gegeben.

Bei diesen Betrachtungen handelt es sich um Gleichgewichtsfiguren homogener Flüssigkeiten. Legt man nun inhomogene Flüssigkeiten zugrunde, was der Wirklichkeit eigentlich näher kommt, so gelingt es, unter geeigneten Voraussetzungen über die Dichte, zu exakten Ergebnissen zu gelangen. Vor kurzer Zeit bewies Herr Lichtenstein unter Zugrundelegung eines zweidimensionalen Modells die Existenz einer aus zwei Einzelmassen, die nur einen Punkt gemeinsam haben, bestehenden Gleichgewichtsfigur einer inhomogenen Flüssigkeit[3]). Das Modell besteht aus zwei Massenpunkten, um die herum sich eine inhomogene Flüssigkeit geringer Dichte ausbreitet. Die Dichte nimmt nach dem Rande hin gegen Null ab. In der folgenden

---

*) Als Inaugural-Dissertation von der philosophischen Fakultät der Universität Leipzig zugelassen.

[1]) Vgl. H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta mathematica 7 (1885), S. 259–380.

[2]) Vgl. G. H. Darwin, Scientific papers **3**, insbesondere S. 436–524.

[3]) Vgl. L. Lichtenstein, Kosmogonische Untersuchungen I, Berichte über die Verhandlungen der Sächs. Akad. der Wissenschaften **80**, I (1928), S. 35–68.

Arbeit wird, in Ausführung eines von Herrn Lichtenstein in seiner Vorlesung über „Kosmogonische Hypothesen" W.-S. 1928/29 entwickelten Programms, (im Dreidimensionalen) die Existenz einer stetigen Schar von Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der singulären Figur bewiesen. Auch hier sind zwei Massenpunkte von inhomogener Flüssigkeit geringer Dichte umgeben, die auf dem Rande durchgehends gleich Null angenommen wird. *Es wird also die Existenz einer linearen Reihe gezeigt, die von einem zusammenhängenden Körper zu zwei getrennten Massen führt.* Wir können dies als das Modell eines im Sinne von Poincaré und Darwin sich entwickelnden Doppelsternpaares auffassen. Die Atmosphären der beiden Komponenten hängen zunächst zusammen, im Falle der singulären Figur sind sie gerade im Begriff, sich zu trennen, schließlich sind sie vollständig getrennt.

Der Existenzbeweis wird durch sukzessive Approximationen erbracht. Wir bedienen uns dabei durchweg der Methoden, die Herrn Lichtenstein in seiner oben genannten, grundlegenden Arbeit zum Ziele führten. An einigen Stellen gelang es, die Betrachtungen zu vereinfachen.

Zum Schluß wird auf gewisse Fälle hingewiesen, in denen das Verschwinden der Randdichte nicht vorausgesetzt zu werden braucht. Ferner wird bemerkt, daß statt der punktförmigen Attraktionszentra auch kleine flüssige Körper eingeführt werden dürfen.

§ 1.

Problemstellung.

Es mögen sich in den Punkten $P_1(-a, 0, 0)$ und $P(a, 0, 0)$ des Raumes $(x\text{-}y\text{-}z)$ zwei punktförmige Attraktionszentra der Masse M befinden. Das Ganze rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_0 = \left(\frac{\varkappa M}{4a^3}\right)^{1/2} \tag{1}$$

um die z-Achse. Die Gravitations- und die Zentrifugalkräfte an P_1 und P halten sich dabei das Gleichgewicht. Das Gesamtpotential ist

$$V^{(0)} = \varkappa M\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) + \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2),$$
$$r_1^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2;\quad r^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2, \tag{2}$$

und es ist weiter

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial x} &= -\varkappa M\left(\frac{x-a}{r^3} + \frac{x+a}{r_1^3}\right) + \omega_0^2 x, \\ \frac{\partial V^{(0)}}{\partial y} &= -\varkappa M\left(\frac{y}{r^3} + \frac{y}{r_1^3}\right) + \omega_0^2 y, \\ \frac{\partial V^{(0)}}{\partial z} &= -\varkappa M\left(\frac{z}{r^3} + \frac{z}{r_1^3}\right); \end{aligned}\right. \tag{3a}$$

$$(3b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial x^2} = -\varkappa M\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3(x-a)^2}{r^5} + \dfrac{1}{r_1^3} - \dfrac{3(x+a)^2}{r_1^5}\right) + \omega_0^2, \\ \dfrac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial y^2} = -\varkappa M\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3y^2}{r^5} + \dfrac{1}{r_1^3} - \dfrac{3y^2}{r_1^5}\right) + \omega_0^2, \\ \dfrac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial z^2} = -\varkappa M\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3z^2}{r^5} + \dfrac{1}{r_1^3} - \dfrac{3z^2}{r_1^5}\right). \end{cases}$$

Da aus Symmetriegründen im Punkte $(0, 0, 0)$ die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung und alle Ableitungen dritter Ordnung von $V^{(0)}$ verschwinden, so erhalten wir in der Umgebung des Koordinatenursprungs für $V^{(0)}$ folgende Entwicklung:

$$(4)\quad V^{(0)}(x, y, z) = V^{(0)}(0, 0, 0) + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 V^{(0)}(0,0,0)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2 V^{(0)}(0,0,0)}{\partial y^2} + \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2 V^{(0)}(0,0,0)}{\partial z^2} + O(\mathfrak{r}^4)$$

$$= \frac{2\varkappa M}{a} + \frac{\varkappa M}{8a^3}(17x^2 - 7y^2 - 8z^2) + O(\mathfrak{r}^4),$$

wenn nur $\mathfrak{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ hinreichend klein, also etwa $\mathfrak{r} < \mathfrak{r}_0$ ist.

Die Niveaufläche $\bar{S}^{(0)}$ (Fig. 1)

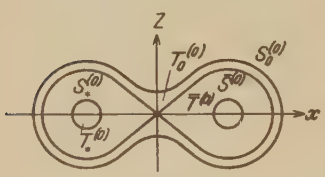

Fig. 1.

$$(5)\qquad V^{(0)} = \frac{2\varkappa M}{a}$$

ist eine in bezug auf die drei Koordinatenebenen symmetrische, analytische und reguläre Fläche, die im Koordinatenanfangspunkt einen konischen Punkt besitzt. Sie begrenzt zwei Gebiete $\bar{T}^{(0)}$, die entsprechend P_1 und P enthalten. Nach (4) ist die Gleichung des Berührungskegels im Nullpunkt

$$(6)\qquad 17x^2 - 7y^2 - 8z^2 = 0.$$

Dies ist ein gerader, elliptischer Kegel, dessen Achse die x-Achse ist.

Nun zu den übrigen Niveauflächen.

I. Es sei

$$V^{(0)} = C^{(0)} < \frac{2\varkappa M}{a}.$$

Diese Niveaufläche ist in bezug auf die drei Koordinatenebenen symmetrisch, analytisch und regulär. Für hinreichend kleines $\frac{2\varkappa M}{a} - C^{(0)}$ sind die zu den verschiedenen Werten von $C^{(0)}$ gehörenden Niveauflächen ineinandergeschachtelt und umschließen alle die Fläche $\bar{S}^{(0)}$.

II. Es sei

$$V^{(0)} = C^{(0)} > \frac{2\varkappa M}{a}.$$

Wir erhalten jetzt zwei in bezug auf die Koordinatenebenen symmetrische, analytische und reguläre Flächen, die von $\bar{S}^{(0)}$ umschlossen sind und ihrerseits P_1 und P umschließen. Die zu verschiedenen Werten von $C^{(0)}$ gehörenden Niveauflächen sind auch hier ineinandergeschachtelt und nähern sich mit wachsendem $C^{(0)}$ gleichmäßig den Punkten P_1 und P.

Diese Behauptungen werden alle im nächsten Abschnitt bewiesen werden.

Unter allen diesen Niveauflächen greifen wir nun eine bestimmte heraus. Sie heiße $S_0^{(0)}$, umschließe den Körper $T_0^{(0)}$ und gehöre zum Werte $C_0^{(0)}$ (Fig. 1).

Wir denken uns jetzt $T_0^{(0)}$ mit einer Flüssigkeit der Dichte Null erfüllt und nehmen den Außendruck gleich Null an. Das Kraftfeld ändert sich hierdurch nicht; da $S_0^{(0)}$ eine Niveaufläche ist, so kann das Ganze als eine Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit angesehen werden. Wir fragen:

Gibt es in der Nachbarschaft dieser Gleichgewichtsfigur eine ähnlich gestaltete Gleichgewichtsfigur mit nicht verschwindender Dichte?

Es handele sich um eine nichthomogene, inkompressible Flüssigkeit, die einen wie $T_0^{(0)}$ beschaffenen Körper T_0 erfüllt. Die Dichte soll nach außen hin abnehmen und am Rande verschwinden. Es möge nun $V(x, y, z)$ das Gesamtpotential im Punkte (x, y, z), C_0 den Wert von $V(x, y, z)$ für alle auf S_0, der Randfläche von T_0, gelegenen Punkte bezeichnen, und es sei

$$C_0 - V(0, 0, 0) = m$$

gesetzt. Weiterhin sei uns eine Funktion $\Psi(u)$ gegeben, die folgende Eigenschaften habe:

Sie ist in $\langle m, \infty)$ stetig, zweimal stetig differentiierbar und wächst in dem angegebenen Intervall monoton. Ferner ist $\Psi(m) = 0$.

Die Dichte in T_0 soll nun außerhalb gewisser einfach zusammenhängender Gebiete T_* um P_1 und P den Wert

$$\mu(x, y, z) = \varepsilon \Psi(V(x, y, z) - V(0, 0, 0)) \qquad (\varepsilon \text{ konstant})$$

haben, in T_* aber konstant sein.

Fassen wir jetzt die Schar der zu allen erlaubten $C_0^{(0)}$ gehörigen Flächen $S_0^{(0)}$ ins Auge, die augenscheinlich eine stetige Schar ist; hierbei interessieren uns hauptsächlich die in der Nachbarschaft von $\bar{S}^{(0)}$ gelegenen Flächen. Wir fragen: Bilden die zu jeder der Flächen $S_0^{(0)}$ gehörigen Flächen S_0 wieder eine stetige Schar? Jetzt hängt die Dichte in einem bestimmten Punkte noch von dem Werte $C_0^{(0)}$ ab, der uns die Randfläche der Ausgangsfigur lieferte. Wir haben:

$$\mu(x, y, z; C_0^{(0)}) = \varepsilon \Psi(V(x, y, z) - V(0, 0, 0); C_0^{(0)}),$$

wobei Ψ also jetzt auch noch von dem Parameter $C_0^{(0)}$ stetig abhängen möge. Es ist stets: $\Psi(C_0 - V(0, 0, 0); C_0^{(0)}) = 0$.

§ 2.
Das Feld $V^{(0)}$.

Es sei (x, y, z) irgendein Punkt. Betrachten wir die durch diesen Punkt verlaufende Niveaufläche. Die Richtungskosinus der Normale ν_0 zu dieser Fläche in (x, y, z) sind

$$\cos\alpha = \pm\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x}N^{-1}, \quad \cos\beta = \pm\frac{\partial V^{(0)}}{\partial y}N^{-1}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{\partial V^{(0)}}{\partial z}N^{-1},$$

$$N^2 = \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial z}\right)^2 \qquad (N > 0). \tag{7}$$

Es ist demnach die Normalableitung

$$\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \nu_0} = \frac{\partial V^{(0)}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V^{(0)}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V^{(0)}}{\partial z}\cos\gamma = N > 0, \tag{8}$$

wenn es sich wie in dem folgenden um die durch das positive Vorzeichen charakterisierte Normalenrichtung handelt. Um also zu beweisen, daß die Normalkomponente der auf (x, y, z) wirkenden Kräfte nach innen gerichtet ist, genügt es zu zeigen, daß diejenige Normalenrichtung, die zu dem positiven Vorzeichen der Richtungskosinus (7) gehört, in das Innere der Fläche weist. Können wir nun nachweisen, daß in einem gewissen Bereich B in der beiderseitigen Umgebung unserer Niveaufläche (abgesehen vom Nullpunkt) N nie verschwindet, so brauchen wir nur in einem Punkt der Fläche zu zeigen, daß die Normale nach innen gerichtet ist. Aus Gründen der Stetigkeit folgt dann, daß die Normale überall nach innen zeigt.

Den Bereich B definieren wir jetzt folgendermaßen: Wir nehmen (Fig. 2)

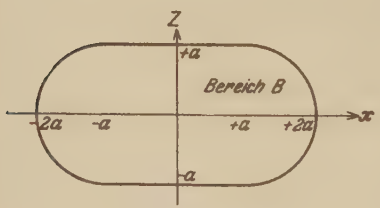

Fig. 2.

für $-a \leqq x \leqq a$ den geraden Kreiszylinder mit der Grundfläche $y^2 + z^2 = a^2$,

für $a \leqq x \leqq 2a$ die Halbkugel $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

für $-a \geqq x \geqq -2a$ die Halbkugel $(x+a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Aus (3a) erkennt man, daß ein Verschwinden von N nur in der $(x$-$y)$-Ebene in Frage kommt. Ferner ist in dem von B aus der $(x$-$y)$-Ebene ausgeschnitten ebenen Bereich B'

$$\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_1^3} \geqq \frac{1}{(a\sqrt{2})^3} + \frac{1}{(3a)^3} > \frac{1}{4a^3},$$

wenn man zunächst nur die Halbebene $x > 0$ in Betracht zieht. Aus Symmetriegründen ergibt sich dann für die andere Halbebene dieselbe Ungleichung.

Da $\omega_0^2 = \frac{\varkappa M}{4a^3}$ gilt, so ist in B' gewiß $\frac{\partial V^{(0)}}{\partial y} \neq 0$, wofern wir uns nicht auf der x-Achse befinden. Auf der x-Achse aber ist (in der Halbebene $x > 0$)

$$\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x} < \left(-\frac{1}{a^2} - \frac{1}{9a^2}\right) + \frac{\varkappa M}{2a^3} < 0 \quad \text{für} \quad a < x \leqq 2a,$$

$$\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x} = \varkappa M\left(\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2}\right) + \frac{\varkappa M}{4a^3}\, x = \varkappa M \cdot \frac{4ax}{(a^2-x^2)^2} + \varkappa M \cdot \frac{x}{4a^3} > 0$$

$$\text{für} \quad 0 < x < a.$$

Für $x < 0$ bekommen wir die entgegengesetzten Ungleichheiten. Im Punkte $x = y = z = 0$ verschwindet N, sonst aber nirgends in ganz B. Für $x \to a + 0$ gilt $\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x} \to -\infty$, für $x \to a - 0$ aber $\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x} \to +\infty$.

Hiermit ist zugleich gezeigt, daß in den Punkten, in denen die x-Achse die in B enthaltenen Flächen durchstößt, die Normale nach innen gerichtet ist.

Nun ist noch zu zeigen, daß B wirklich Flächen ganz in seinem Innern enthält, die uns interessieren, d. h. vor allem solche, die zu einem $C^{(0)} < \frac{2\varkappa M}{a}$ gehören. Es ist zu zeigen, daß auf der Oberfläche von B stets gilt:

$$V^{(0)} \leqq b < \frac{2\varkappa M}{a}.$$

Betrachten wir den Halbraum $x > 0$ und fassen wir die Halbkugel, die auf S. 304 angegeben wurde, ins Auge. Für alle Punkte auf dieser ist $r = a$, $r_1 \geqq a\sqrt{5}$, $x^2 + y^2 \leqq 4a^2$. Auf dem Zylinder ist ferner $r \geqq a$, $r_1 \geqq a\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 \leqq 2a^2$. Also ist auf

der Halbkugel: $V^{(0)} \leqq \varkappa M\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a\sqrt{5}} + \frac{1}{2a}\right) = \frac{\varkappa M}{a}\left(1{,}5 + \frac{1}{5}\sqrt{5}\right) < \frac{1{,}85\,\varkappa M}{a}$,

dem Zylinder: $V^{(0)} \leqq \varkappa M\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{4a}\right) = \frac{\varkappa M}{a}\left(1{,}25 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) < \frac{1{,}96\,\varkappa M}{a} = b.$

§ 3.

Sukzessive Approximationen.

Es sei $C_*^{(0)}$ irgendeine feste Zahl $> \frac{2\varkappa M}{a}$. Die Niveauflächen $V^{(0)} = C_*^{(0)}$ begrenzen zwei Gebiete $T_*^{(0)}$ in der Umgebung der Punkte $(-a, 0, 0)$ und $(a, 0, 0)$. Wir denken uns, unter ε eine hinreichend kleine positive Zahl verstanden, das Gebiet $T_0^{(0)} - T_*^{(0)}$ mit einer inhomogenen inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte $\mu_1 = \varepsilon\Psi\left(V^{(0)} - \frac{2\varkappa M}{a};\ C_0^{(0)}\right)$ erfüllt.

In $T_*^{(0)}$ sei die Dichte $\mu_1^* = \varepsilon \Psi\left(C_*^{(0)} - \frac{2\varkappa M}{a};\ C_0^{(0)}\right)$ konstant, und es sei

$$m = C_0^{(0)} - \frac{2\varkappa M}{a} \leqq V^{(0)} - \frac{2\varkappa M}{a} \leqq C_*^{(0)} - \frac{2\varkappa M}{a};\ b \leqq C_0^{(0)} \leqq C_*^{(0)};\ \Psi\left(C_0^{(0)} - \frac{2\varkappa M}{a};\ C_0^{(0)}\right)$$

Außerhalb von $T_0^{(0)}$ sei schließlich die Dichte gleich Null. Augenscheinlich ist die Dichte μ_1 überall stetig; sie hat stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen, die nur beim Passieren von $S_0^{(0)}$ und $S_*^{(0)}$ Sprünge erleiden können.

Es sei $F^{(1)}$ die nach P_1 hin gerichtete Resultierende der auf P nunmehr wirkenden Gravitationskräfte. Rotiert jetzt das System mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = \left(\frac{F^{(1)}}{Ma}\right)^{1/2},$$

so befinden sich die Massenpunkte P_1 und P im Gleichgewicht. Die Niveauflächen der neuen Massenverteilung werden für hinreichend kleines ε von demselben Charakter sein wie die Flächen $V^{(0)} = C^{(0)}$. Das soll jetzt gezeigt werden.

Es sei $\varkappa W^{(1)}$ das Gravitationspotential der soeben neu eingeführten Flüssigkeitsmassen. In einem jeden Punkte (x, y, z) ist offenbar

$$\begin{aligned}\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{T_0^{(0)}} \mu_1' \cdot \frac{1}{\hat{r}}\, d\tau' = \int\limits_{T_0^{(0)}} \mu_1' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\tau' = -\int\limits_{T_0^{(0)}} \mu_1' \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\tau' \\ &= \int\limits_{T_0^{(0)} - T_*^{(0)}} \frac{\partial \mu_1'}{\partial x'} \cdot \frac{1}{\hat{r}}\, d\tau'; \qquad \hat{r}^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2;\end{aligned} \tag{9}$$

ferner ist

$$\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial x^2} = -\int\limits_{T_0^{(0)} - T_*^{(0)}} \frac{\partial \mu_1'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\tau'; \tag{10}$$

$\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial x^2}$ ist überall stetig und genügt einer H-Bedingung zum Exponenten λ: $(0 < \lambda < 1)$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^2 W^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W^{(1)}(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})}{\partial x^2}\right| < C(\lambda)\, d_{1,2}^{\lambda}, \\ &d_{1,2}^2 = (x^{(1)} - x^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2 + (z^{(1)} - z^{(2)})^2;\end{aligned} \tag{11}$$

$C(\lambda)$ ist ein nur von λ abhängiger Wert.

Es sei nun weiter

$$V^{(1)} = \varkappa W^{(1)} + \varkappa M\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) + \frac{\omega_1^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Außer in P_1 und P ist $V^{(1)}$ stetig und hat stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

Es sei $\bar{C}^{(1)}$ der Wert von $V^{(1)}$ im Punkte $(0, 0, 0)$, Aus Symmetriegründen ist dort

$$(12) \qquad \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial y \partial z} = 0.$$

Betrachten wir zunächst die Niveaufläche $\bar{S}^{(1)}$:

$$V^{(1)} - \bar{C}^{(1)} = 0.$$

Für hinreichend kleine ε ist sie eine wie $\bar{S}^{(0)}$ gestaltete, in bezug auf die drei Koordinatenebenen symmetrische Fläche mit stetiger Normale, die im Koordinatenursprung einen konischen Punkt hat; $\bar{S}^{(1)}$ begrenzt zwei Gebiete $\bar{T}^{(1)}$, die entsprechend P_1 und P enthalten und in dem Anfangspunkt zusammenhängen.

In der Umgebung des Punktes $(0, 0, 0)$ gilt aus Gründen der Stetigkeit wegen (12) und den oben erwähnten Eigenschaften von $V^{(1)}$ die Entwicklung

$$(13) \qquad V^{(1)} - \bar{C}^{(1)} = \alpha_1 x^2 - \beta_1 y^2 - \gamma_1 z^2 + O(\mathfrak{r}^{2+\lambda})$$

mit

$$(14) \qquad \alpha_1 = \frac{17}{8} \cdot \frac{\varkappa M}{a^3} + R_1, \quad \beta_1 = \frac{7}{8} \cdot \frac{\varkappa M}{a^3} + R_2, \quad \gamma_1 = \frac{\varkappa M}{a^3} + R_3;$$

$$R_1 \to 0, \quad R_2 \to 0, \quad R_3 \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Wir setzen nun

$$C_0^{(1)} = \bar{C}^{(0)} + C_0^{(0)} - \frac{2\varkappa M}{a}$$

und betrachten die Niveaufläche $S_0^{(1)}$: $V^{(1)} = C_0^{(1)}$. Sie begrenze den Körper $T_0^{(1)}$. Ist $C_0^{(1)} < \bar{C}^{(1)}$ und gilt $C_0^{(1)} < C^{(1)} < \bar{C}^{(1)}$, so bilden die Flächen $V^{(1)} = C^{(1)}$ für hinreichend kleines ε eine Schar ineinandergeschachtelter, geschlossener, doppelpunktfreier, stetig gekrümmter Flächen, die von $S_0^{(1)}$ umschlossen sind und ihrerseits $\bar{S}^{(1)}$ umschließen. Für $C^{(1)} > \bar{C}^{(1)}$ haben wir zwei Scharen von Flächen derselben Eigenschaften, die P_1 und P umschließen und von $\bar{S}^{(1)}$ umschlossen werden.

Dies alles werden wir allgemeiner beweisen, indem wir ein Feld $\hat{V} = V^{(0)} + \varepsilon \hat{\Phi}$ betrachten, das von der Anziehung der in P_1 und P befindlichen Massen, von der zu der Winkelgeschwindigkeit ω_0 gehörigen Zentrifugalkraft und von einem Zusatzpotential $\varepsilon \hat{\Phi}(x, y, z)$ herrührt; $\hat{\Phi}(x, y, z)$ ist dabei eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. Sie ist stetig und hat stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung (die wir mit $D_1 \hat{\Phi}$ und $D_2 \hat{\Phi}$ bezeichnen). Die partiellen Ableitungen $D_2 \hat{\Phi}$ erfüllen eine H-Bedingung.

2. In $(0, 0, 0)$ sind $D_1 \hat{\Phi}$ und $\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z \partial y}$, $\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x \partial z}$ gleich 0.

3. In ganz B gelten die Abschätzungen:

$$|D_1\hat{\Phi}(x,y,z)| \leqq \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_1, \qquad |D_2\hat{\Phi}(x,y,z)| \leqq \mathfrak{a}_2. \tag{15}$$

Es sei $\hat{V}(0,0,0) = \hat{C}_0$. In einer Umgebung des Nullpunktes, etwa für $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{r}_0$, findet man nach der Taylorschen Formel

$$\begin{aligned}\hat{V} - \hat{C}_0 = {} & \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{V}(\vartheta x,\vartheta y,\vartheta z) + \frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{V}(\vartheta x,\vartheta y,\vartheta z)\\ & + \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\hat{V}(\vartheta x,\vartheta y,\vartheta z) + xy\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\hat{V}(\vartheta x,\vartheta y,\vartheta z)\\ & + xz\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\hat{V}(\vartheta x,\vartheta y,\vartheta z) + yz\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\hat{V}(\vartheta x,\vartheta y,\vartheta z)\\ = {} & \hat{\alpha}x^2 - \hat{\beta}y^2 - \hat{\gamma}z^2 + \hat{\alpha}_1x^3 + \hat{\beta}_1y^2 + \hat{\gamma}_1z^2 + \hat{\alpha}_2xy + \hat{\alpha}_3xz\\ & + \hat{\alpha}_4yz, \qquad (0<\vartheta<1).\end{aligned} \tag{16}$$

Hierbei ist

$$\left\{\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V^{(0)}(0,0,0) + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{\Phi}(0,0,0),\\ \hat{\beta} &= -\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}V^{(0)}(0,0,0) + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{\Phi}(0,0,0)\right],\\ \hat{\gamma} &= -\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}V^{(0)}(0,0,0) + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial z^2}\hat{\Phi}(0,0,0)\right];\end{aligned}\right. \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\left|\hat{\alpha} - \frac{17}{8}\frac{\varkappa M}{a^3}\right|, \quad \left|\hat{\beta} - \frac{7}{8}\frac{\varkappa M}{a^3}\right|, \quad \left|\hat{\gamma} - \frac{\varkappa M}{a^3}\right| < \varepsilon\,\mathfrak{b}_1;\\ &|\hat{\alpha}_1|, |\hat{\beta}_1|, |\hat{\gamma}_1|, |\hat{\alpha}_2|, |\hat{\alpha}_3|, |\hat{\alpha}_4| \leqq \mathfrak{b}_2\mathfrak{r}^{\lambda}.\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Alsdann gilt in der Umgebung des Koordinatenursprungs:

$$\hat{V} - \hat{C}_0 = \hat{\alpha}x^2 - \hat{\beta}y^2 - \hat{\gamma}z^2 + O(\mathfrak{r}^{2+\lambda}).$$

Es wäre nun noch zu zeigen, daß die Komponente der Feldstärke in der Richtung ν_0 des Ausgangsfeldes $V^{(0)}$ ebenfalls nach innen gerichtet ist. Alsdann wird nämlich jede der neuen Niveauflächen von der zum Feld $V^{(0)}$ gehörigen Schar von orthogonalen Trajektorien in nur einem Punkte und unter einem von Null verschiedenen Winkel geschnitten werden. Es ist

$$\frac{\partial\hat{V}}{\partial\nu_0} = \frac{\partial V^{(0)}}{\partial\nu_0} + \varepsilon\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\nu_0}. \tag{19}$$

Aus (8) und (4) ergibt sich in der Umgebung des Nullpunktes

$$\frac{\partial V^{(0)}}{\partial\nu_0} = \left[\left(\frac{\varkappa M}{4a^3}\right)^2(289x^2 + 49y^2 + 64z^2) + O(\mathfrak{r}^4)\right]^{1/2}.$$

Man ersieht so, daß folgende Ungleichung gilt:

$$\left|\frac{\partial V^{(0)}}{\partial\nu_0}\right| \geqq \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{r}, \qquad (\mathfrak{r}^2 = x^2+y^2+z^2). \tag{20}$$

Außerdem folgt aus (15)

$$\left|\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \nu_0}\right| \leqq \mathfrak{a}_4 \mathfrak{r}. \tag{21}$$

Für hinreichend kleines ε, etwa $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$ gilt sonach

$$\left|\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \nu_0}\right| \geqq \mathfrak{a}_3 \mathfrak{r} > \varepsilon \mathfrak{a}_4 \mathfrak{r} \geqq \left|\varepsilon \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \nu_0}\right|. \tag{22}$$

Also hat aus Stetigkeitsgründen $\frac{\partial \hat{V}}{\partial \nu_0}$ dasselbe Vorzeichen wie $\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \nu_0}$.

Wir gehen nun zur zweiten Approximation über. Die Niveauflächen $V^{(1)} = C_*^{(1)} = \bar{C}^{(1)} = C_*^{(0)} - \frac{2\varkappa M}{a}$ begrenzen zwei Gebiete $T_*^{(1)}$ in der Umgebung der Punkte $(-a, 0, 0)$ und $(a, 0, 0)$. Es sei $T_*^{(1)}$ mit einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte $\mu_2^* = \varepsilon \Psi(C_*^{(1)} - \bar{C}^{(1)}; C_0^{(0)}) = \varepsilon \Psi\left(C_*^{(0)} - \frac{2\varkappa M}{a}; C_0^{(0)}\right)$, $T_0^{(1)} - T_*^{(1)}$ mit einer inhomogenen inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte $\mu_2 = \varepsilon \Psi(V^{(1)} - \bar{C}^{(1)}; C_0^{(0)})$ erfüllt. Außerhalb von $T_0^{(1)}$ sei schließlich die Dichte gleich Null. Augenscheinlich hat μ_2 und seine Ableitungen erster und zweiter Ordnung ganz analoge Eigenschaften wie μ_1. Lassen wir nun das ganze System mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 = \left(\frac{F^{(2)}}{Ma}\right)^{1/2} \tag{23}$$

rotieren ($F^{(2)}$ ist die Resultierende der auf P jetzt wirkenden Gravitationskräfte), so erhalten wir ein Potential $V^{(2)}$ der neuen Massenverteilung, das in allen Stücken ähnliche Eigenschaften wie $V^{(1)}$ aufweist, ebenso die neuen Niveauflächen.

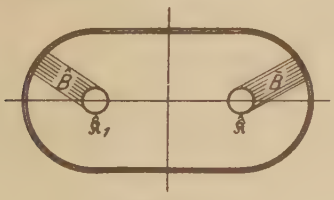

Fig. 3.

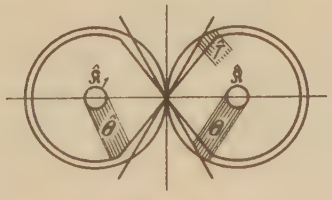

Fig. 4.

Nun noch einige Bezeichnungen (vgl. Fig. 3, 4). Es seien $\hat{\mathfrak{K}}_1$ und $\hat{\mathfrak{K}}$ die Kreisflächen mit dem Radius $\frac{1}{2}\hat{\mathfrak{r}}$ um P_1 und P ($\hat{\mathfrak{r}}$ ist der Abstand des Punktes P von $S_*^{(0)}$). Wir betrachten ferner das Gebiet $\bar{B} = B - \hat{\mathfrak{K}}_1 - \hat{\mathfrak{K}}$, und es bezeichne $\hat{B}$ das Gebiet, das entsteht, wenn man aus $\bar{B}$ alle Punkte entfernt, die vom Außenrande von B um weniger als β^0 entfernt sind. Dabei wird $\beta^0 > 0$ so klein gewählt, daß $T_0^{(0)} - T_*^{(0)}$ ganz im Innern von $\hat{B}$ liegt und der Abstand eines Punktes auf $S_0^{(0)}$ von dem Außenrande von $\hat{B}$ gewiß $\geqq \hat{\beta}$ ist ($\hat{\beta} > 0$ hinreichend klein). Wir betrachten ferner einen Kreiskegel, dessen Spitze im Nullpunkt liegt und dessen Achse mit der

x-Achse zusammenfällt. Er soll den durch (6) charakterisierten Kegel außer im Nullpunkt ganz in seinem Innern enthalten. Es seien $\hat{T}$ die beiden Gebiete, die unserem Kreiskegel und zugleich den Kugeln

$$\mathfrak{K}: (x-a)^2+y^2+z^2=a^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1: (x+a)^2+y^2+z^2=a^2$$

angehören. Es möge ferner $\Theta = \hat{T} - \mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}$ sein und $\hat{\Theta}$ die beiden Gebiete bezeichnen, die entstehen, wenn man aus Θ alle Punkte entfernt, die von dem Außenrande um weniger als $\alpha^0 \mathfrak{r}$ entfernt sind. Dabei wird $\alpha^0 > 0$ so klein gewählt, daß $\bar{T}^{(0)} - T_*^{(0)}$ ganz im Innern von $\hat{\Theta}$ enthalten ist und der Abstand eines Punktes auf $\bar{S}^{(0)}$ von dem Außenrand von $\hat{\Theta}$ gewiß $\geqq \hat{\vartheta}\mathfrak{r}$ ($\hat{\vartheta} > 0$ hinreichend klein) ist. ($\mathfrak{r}$ ist der Abstand des betrachteten Punktes auf $\bar{S}^{(0)}$ vom Koordinatenanfangspunkt.)

§ 4.

Konvergenzbeweis.

Wir schließen uns bei dem folgenden Konvergenzbeweis eng an die Entwicklungen von Herrn Lichtenstein an[4]). Beim Übergang von der n-ten zur $(n+1)$-ten Näherung ordnen wir einem Punkte A_{n-1} in $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ allemal denjenigen Punkt A_n auf der durch A_{n-1} verlaufenden orthogonalen Trajektorie des Systems der Flächen $S^{(0)}$ zu, in dem die Dichte den gleichen Wert hat:

$$\mu_n(A_{n-1}) = \mu_{n+1}(A_n).$$

Wir haben so eine topologische Abbildung der Gebiete $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ auf $T_0^{(n)} - T_*^{(n)}$. Sie sei definiert durch

$$(24) \qquad x_n = x_{n-1} + \xi_{n-1}, \quad y_n = y_{n-1} + \eta_{n-1}, \quad z_n = z_{n-1} - \zeta_{n-1}.$$

Dabei sind, wie wir zunächst annehmen wollen, ξ_{n-1}, η_{n-1}, ζ_{n-1} in $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ erklärte stetige Funktionen von $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$, die dort stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen und überdies folgende Eigenschaften haben: 1. Im Punkte $(0,0,0)$ gilt

$$\xi_{n-1} = \eta_{n-1} = \zeta_{n-1} = 0.$$

2. Es gelten die Ungleichheitsbeziehungen:

$$(25) \quad |\xi_{n-1}|, |\eta_{n-1}|, |\zeta_{n-1}| \leqq \vartheta_2 \Omega \mathfrak{r}_{n-1}; \quad \left|\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\right| \leqq \vartheta_2^* \Omega;$$

$$(\mathfrak{r}_{n-1}^2 = x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 + z_{n+1}^2).$$

Wir denken uns die vorhin erklärte Abbildung (24) irgendwie über den Rand von $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ hinaus in B_{n-1} (d. h. das im $(x_{n-1} - y_{n-1} - z_{n-1})$-Raum ausgebreitete Gebiet B) fortgesetzt, so daß die nunmehr in B_{n-1}

[4]) Vgl. die in Fußnote [3]) genannte Arbeit von L. Lichtenstein, S. 50ff.

erklärte topologische Abbildung dieses Gebiet auf sich selbst bezieht. Es sei ferner h_n die Bogenlänge des zwischen $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ und (x_n, y_n, z_n) befindlichen Kurvenstückes der orthogonalen Trajektorie. Auf dieser sei die Richtung, die von P bzw. P_1 fortweist, als positiv definiert. Wir haben ferner 3.:

$$|h_n| \leqq \vartheta_1 \Omega \tau_{n-1} \tag{26}$$

und

$$\left|\frac{\partial h_n}{\partial x_{n-1}}\right|, \left|\frac{\partial h_n}{\partial y_{n-1}}\right|, \left|\frac{\partial h_n}{\partial z_{n-1}}\right| \leqq \Omega. \tag{27}$$

Wir betrachten nun die Potentiale

$$\begin{aligned} W^{(n)}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) &= \int\limits_{T_0^{(n-1)}} \mu'_n \cdot \frac{1}{\hat{r}_{n-1}} d\tau'_{n-1}, \\ W^{(n+1)}(x_n, y_n, z_n) &= \int\limits_{T_0^{(n)}} \mu'_{n+1} \cdot \frac{1}{\hat{r}_n} d\tau'_n; \end{aligned} \tag{28}$$

$$\hat{r}^2_{n-1} = (x_{n-1} - x'_{n-1})^2 + \ldots + (z_{n-1} - z'_{n-1})^2;$$

$$\hat{r}_n = (x_n - x'_n)^2 + \ldots + (z_n - z'_n)^2;$$

$$d\tau'_{n-1} = dx'_{n-1}\, dy'_{n-1}\, dz'_{n-1}; \qquad d\tau'_n = dx'_n\, dy'_n\, dz'_n;$$

und versuchen die Differenzen

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_n} W^{(n+1)}(x_n, y_n, z_n) - \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} W^{(n)}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})\right|,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_n} W^{(n+1)}(x_n, y_n, z_n) - \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} W^{(n)}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})\right|,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_n} W^{(n+1)}(x_n, y_n, z_n) - \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} W^{(n)}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})\right|$$

abzuschätzen. Nach (9) ist

$$\frac{\partial W^{(n)}}{\partial x_{n-1}} = \int\limits_{T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}} \frac{\partial \mu'_n}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{1}{\hat{r}_{n-1}} d\tau'_{n-1}. \tag{29}$$

Die Methoden, die Herr Lichtenstein vor einiger Zeit entwickelt hat[5]), gestatten die benötigte Abschätzung zu finden.

Wir schalten zwischen $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ und $T_0^{(n)} - T_*^{(n)}$ eine von einem Parameter δ abhängige stetige Schar von Gebieten $\mathfrak{T}_\delta$, deren Rand $\mathfrak{S}_\delta$ heiße, durch die Beziehungen:

$$x_\delta = x_{n-1} + \frac{\delta}{\Omega}\xi_{n-1}, \qquad y_\delta = y_{n-1} + \frac{\delta}{\Omega}\eta_{n-1}, \qquad z_\delta = z_{n-1} + \frac{\delta}{\Omega}\zeta_{n-1} \tag{30}$$

---

[5]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie I, Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 72—88.

ein. Für $\delta = 0$ ist $\mathfrak{T}_\delta$ mit $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$, für $\delta = \Omega$ mit $T_0^{(n)} - T_*^{(n)}$ identisch. Diese Gebiete liegen alle in $\hat{B}$.

Nun wählen wir eine feste Zahl Ω_0 so klein und $\Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0$, daß die Abbildung (30) für alle $|\delta| \leqq \Omega_0$ topologisch ist. Wir setzen

$$Q_\delta(x_\delta, y_\delta, z_\delta) = \int\limits_{T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}} \frac{\partial \mu_n'}{\partial x_\delta'} \cdot \frac{1}{\hat{r}_\delta} \cdot \frac{\partial(x_\delta', y_\delta', z_\delta')}{\partial(x_{n-1}', y_{n-1}', z_{n-1}')}\, d\tau_{n-1}',$$

$$r_\delta^2 = (x_\delta - x_\delta')^2 + (y_\delta - y_\delta')^2 + (z_\delta - z_\delta')^2, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \mu_n'}{\partial x_\delta'} = \frac{\partial \mu_n'}{\partial x_{n-1}'} \cdot \frac{\partial x_{n-1}'}{\partial x_\delta'} + \ldots + \frac{\partial \mu_n'}{\partial z_{n-1}'} \cdot \frac{\partial z_{n-1}'}{\partial x_\delta'}.$$

Man sieht, daß

$$\text{für } \delta = 0 \qquad Q_\delta(x_\delta, y_\delta, z_\delta) = \frac{\partial W^{(n)}}{\partial x_{n-1}},$$

$$\text{für } \delta = \Omega \qquad Q_\delta(x_\delta, y_\delta, z_\delta) = \frac{\partial W^{(n+1)}}{\partial x_n} \tag{32}$$

ist. Er gilt weiter

$$\frac{1}{\hat{r}_\delta} = \frac{1}{\hat{r}_{n-1}} \Big(1 + 2 \sum \frac{\delta}{\Omega} \cdot \frac{1}{\hat{r}_{n-1}^2} (x_{n-1} - x_{n-1}')(\xi_{n-1} - \xi_{n-1}') + \sum \frac{\delta^2}{\Omega^2} \cdot \frac{1}{\hat{r}_{n-1}^2} (\xi_{n-1} - \xi_{n-1}')^2\Big)^{-\frac{1}{2}}. \tag{33}$$

Für $|\delta| \leqq \Omega_0$ ist der zweite Faktor rechts in bezug auf δ analytisch und regulär, auch wenn wir δ komplexe Werte erteilen. Also hat Q_δ bei hinreichend kleinem Ω_0 dieselbe Eigenschaft.

Aus Symmetriegründen verschwindet $Q_\delta(x_\delta, y_\delta, z_\delta)$ im Koordinatenursprung. Es sei Γ der Kreis $|\delta| = \Omega_0$ in der komplexen Ebene δ. Der Cauchysche Integralsatz liefert für alle δ mit $|\delta| < \Omega_0$

$$Q_\delta(x_\delta, y_\delta, z_\delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{Q_{\bar\delta}(x_{\bar\delta}, y_{\bar\delta}, z_{\bar\delta})}{\bar\delta - \delta}\, d\bar\delta,$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} Q_\delta(x_\delta, y_\delta, z_\delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{Q_{\bar\delta}(x_{\bar\delta}, y_{\bar\delta}, z_{\bar\delta})}{(\bar\delta - \delta)^2}\, d\bar\delta. \tag{34}$$

Für alle $|\bar\delta| = \Omega_0$ und alle $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ im Innern und auf dem Rande von $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ gleichmäßig gilt nun

$$|Q_{\bar\delta}(x_{\bar\delta}, y_{\bar\delta}, z_{\bar\delta})| \leqq \vartheta_3 c r_{n-1}, \tag{35}$$

wenn

$$|\mu_n|, \left|\frac{\partial \mu_n}{\partial x_{n-1}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \mu_n}{\partial z_{n-1}}\right| \leqq c \tag{36}$$

gilt. Also ist in $0 \leqq \delta \leqq \Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \delta} Q_\delta(x_\delta, y_\delta, z_\delta)\right| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\Omega_0 \cdot \frac{4}{\Omega_0^2} \vartheta_3 c r_{n-1} = 4\vartheta_3 c r_{n-1} \cdot \Omega_0^{-1} = 4\vartheta_3' c r_{n-1}. \tag{37}$$

Nun ist

$$(38)\quad \frac{\partial}{\partial x_n} W^{(n+1)}(x_n, y_n, z_n) - \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} W^{(n)}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) = \int_0^{\Omega} \frac{\partial}{\partial \delta} Q_\delta(x_\delta, y_\delta, z_\delta)\, d\delta,$$

woraus folgt:

$$(39)\quad \left| \frac{\partial}{\partial x_n} W^{(n+1)}(x_n, y_n, z_n) - \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} W^{(n)}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \right| \leqq 4\,\vartheta_3'\,\Omega\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_{n-1}.$$

Entsprechende Ergebnisse erhalten wir bei den anderen beiden Ableitungen erster Ordnung.

Durch dieselbe Methode ergibt sich:

$$(39')\quad \left| \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} W^{(n+1)}(x_n, y_n, z_n) - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} W^{(n)}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \right| \leqq \vartheta_4\,\Omega\,\mathfrak{c}, \ldots.$$

Weiterhin haben wir wegen (26) und da die Abschätzungen

$$\left| \frac{\partial^2 W^{(n)}(x, y, z)}{\partial x^2} \right|, \ldots, \left| \frac{\partial^2 W^{(n)}(x, y, z)}{\partial z^2} \right| \leqq \vartheta_4'\,\mathfrak{c}$$

gelten,

$$(40)\quad \left| \frac{\partial}{\partial x_n} W^{(n)}(x_n, y_n, z_n) - \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} W^{(n)}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \right| = \left| \int_{x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}}^{x_n, y_n, z_n} \frac{\partial^2 W^{(n)}(x, y, z)}{\partial x\, \partial s}\, ds \right| \leqq \vartheta_5\,\Omega\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_{n-1},$$

wobei die Integration längs der durch $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ und (x_n, y_n, z_n) verlaufenden orthogonalen Trajektorie erfolgt und s auf dieser die Bogenlänge bedeutet. So erhalten wir

$$(41)\quad \left| \frac{\partial}{\partial x_n} W^{(n+1)}(x_n, y_n, z_n) - \frac{\partial}{\partial x_n} W^{(n)}(x_n, y_n, z_n) \right| \leqq \vartheta_6\,\Omega\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_n,$$

oder aber einfacher

$$(42)\quad \left| \frac{\partial}{\partial x} W^{(n+1)}(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} W^{(n)}(x, y, z) \right| \leqq \vartheta_6\,\Omega\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}, \qquad (\mathfrak{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

Hierbei ist (x, y, z) irgendein Punkt in B. Für die anderen Ableitungen erster Ordnung erhalten wir entsprechende Abschätzungen.

Bezeichnen wir jetzt mit C die Verbindungsstrecke $(0, 0, 0) \to (x, y, z)$, so finden wir

$$\left| (W^{(n+1)}(x, y, z) - W^{(n+1)}(0, 0, 0)) - (W^{(n)}(x, y, z) - W^{(n)}(0, 0, 0)) \right| = \left| \int_C \frac{\partial}{\partial x}(W^{(n+1)}(x, y, z) - W^{(n)}(x, y, z))\, dx + \frac{\partial}{\partial y}(W^{(n+1)}(x, y, z) - W^{(n)}(x, y, z))\, dy + \frac{\partial}{\partial z}(W^{(n+1)}(x, y, z) - W^{(n)}(x, y, z))\, dz \right| \leqq \vartheta_7\,\Omega\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}^2.$$

Wir hatten ferner (vgl. S. 306)

$$F^{(n)} = \frac{\varkappa M^2}{4a^2} - \varkappa M \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} W^{(n)}(a,0,0), \quad F^{(n+1)} = \frac{\varkappa M^2}{4a^2} - \varkappa M \frac{\partial}{\partial x_n} W^{(n+1)}(a,0$$

(44)
$$\omega_n^2 = \frac{F^{(n)}}{Ma}, \quad \omega_{n+1}^2 = \frac{F^{(n+1)}}{Ma}.$$

Also ist

(45) $$|\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2| \leqq \varkappa \vartheta_6 \cdot \frac{1}{a} \cdot \Omega \mathfrak{c} a = \varkappa \vartheta_6 \Omega \mathfrak{c}.$$

Des weiteren war

(46)
$$V^{(n)}(x,y,z) = \varkappa W^{(n)}(x,y,z) + \frac{\omega_n^2}{2}(x^2+y^2) + \varkappa M\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right),$$
$$V^{(n+1)}(x,y,z) = \varkappa W^{(n+1)}(x,y,z) + \frac{\omega_{n+1}^2}{2}(x^2+y^2) + \varkappa M\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right),$$

also bekommen wir

(47) $$|(V^{(n+1)}(x,y,z) - V^{(n+1)}(0,0,0)) - (V^{(n)}(x,y,z) - V^{(n)}(0,0,0))| \leqq \vartheta_8 \Omega$$

(48) $$\left|\frac{\partial}{\partial x} V^{(n+1)}(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x} V^{(n)}(x,y,z)\right| \leqq \vartheta_9 \Omega \mathfrak{c} \mathfrak{r}, \ldots .$$

Es möge jetzt (x,y,z) speziell im Innern von $T_0^{(n)} - T_*^{(n)}$ liegen. Wir suchen den Punkt (ξ,η,ζ) in $T_0^{(n+1)} - T_*^{(n+1)}$ so auf der durch (x,y,z) verlaufenden, zum System der Ausgangsniveauflächen gehörigen orthogonalen Trajektorie zu bestimmen, daß

(49) $$V^{(n+1)}(\xi,\eta,\zeta) - V^{(n+1)}(0,0,0) = V^{(n)}(x,y,z) - V^{(n)}(0,0,0)$$

wird. Dann setzen wir

(50) $$(V^{(n+1)}(x,y,z) - V^{(n+1)}(0,0,0)) - (V^{(n)}(x,y,z) - V^{(n)}(0,0,0)) = \hat{\Psi}(x,y$$

(51) $$- V^{(n+1)}(x,y,z) = \Xi(x,y,z).$$

Aus (49) folgt dann

(52) $$\hat{\Psi}(x,y,z) = \Xi(\xi,\eta,\zeta) - \Xi(x,y,z).$$

Es bezeichne nun $\mathfrak{h}$ die Bogenlänge des zwischen (x,y,z) und (ξ,η,ζ) gelegenen Kurvenstückes. Wir können dann schreiben:

(53) $$\Xi(\xi,\eta,\zeta) = \Xi^*(x,y,z;\mathfrak{h}),$$

da durch (x,y,z) die orthogonale Trajektorie und durch $\mathfrak{h}$ die Lage des Punktes (ξ,η,ζ) auf dieser bestimmt ist. Hierbei ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(x,y,z)$. Wir bekommen so

(54) $$\mathfrak{h} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{h}} \Xi^*(x,y,z;\lambda\mathfrak{h}) = \hat{\Psi}(x,y,z) \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Wegen (8) und (22) ist

(55) $$\left|\frac{\partial}{\partial \mathfrak{h}} \Xi^*(x,y,z;\lambda\mathfrak{h})\right| \geqq \vartheta_{10} \mathfrak{r}$$

sofern beispielsweise feststeht, daß $(x, y, z; \mathfrak{h})$ von dem Ursprung einen Abstand $\geqq \frac{\mathfrak{r}}{2}$ hat, und wenn $\mathfrak{c}$ hinreichend klein ist. Die Gleichung (52) hat bei vorgegebenem $\Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0$ und hinreichend kleinem $\mathfrak{c}$ eine und nur eine mit $\mathfrak{c}\Omega$ zugleich verschwindende Lösung. Wegen (50), (47) und (55) ist

$$|\mathfrak{h}| \leqq \vartheta_{11}\Omega\mathfrak{c}\mathfrak{r}. \tag{56}$$

Die zusätzliche Bedingung betreffs $\mathfrak{h}$ ist gewiß erfüllt, wenn $\mathfrak{c}$ hinreichend klein ist. Wir erhalten ferner wegen (49), da wir

$$V^{(n+1)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = V_*^{(n+1)}(x, y, z; \mathfrak{h}) \tag{57}$$

setzen können,

$$\frac{\partial}{\partial x}V_*^{(n+1)}(x, y, z; \mathfrak{h}) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{h}}V_*^{(n+1)}(x, y, z; \mathfrak{h}) \cdot \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial x} = \frac{\partial V^{(n)}(x, y, z)}{\partial x}. \tag{58}$$

Im Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ist

$$\frac{\partial V_*^{(n+1)}(x, y, z; \mathfrak{h})}{\partial \mathfrak{h}} \geqq \vartheta_{12}\mathfrak{r}, \tag{59}$$

wofern nur $\vartheta_{11}\Omega\mathfrak{c} < 1$ ist, weiterhin, wenn $V^{(n)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = V_*^{(n)}(x, y, z; \mathfrak{h})$ gesetzt wird,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}V_*^{(n+1)}(x, y, z; \mathfrak{h}) - \frac{\partial}{\partial x}V^{(n)}(x, y, z)\right| \leqq \left|\frac{\partial}{\partial x}V_*^{(n+1)}(x, y, z; \mathfrak{h}) - \frac{\partial}{\partial x}V_*^{(n)}(x, y, z; \mathfrak{h})\right|$$
$$+ \left|\frac{\partial}{\partial x}V_*^{(n)}(x, y, z; \mathfrak{h}) - \frac{\partial}{\partial x}V_*^{(n)}(x, y, z; 0)\right|$$
$$= \left|\frac{\partial}{\partial x}V_*^{(n+1)}(x, y, z; \mathfrak{h}) - \frac{\partial}{\partial x}V_*^{(n)}(x, y, z; \mathfrak{h})\right| + |\mathfrak{h}|\left|\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \mathfrak{h}}V_*^{(n)}(x, y, z; \lambda\mathfrak{h})\right| \leqq \vartheta_{13}\Omega\mathfrak{c}\mathfrak{r}.$$

Also ist

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial x}\right| \leqq \vartheta_{14}\Omega\mathfrak{c}, \tag{61}$$

und entsprechende Ungleichheiten finden sich für $\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial y}$ und $\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial z}$.

Wegen (49) ist nun offenbar

$$\mu_{n+1}(x, y, z) = \mu_{n+3}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}).$$

Es gilt also $\mathfrak{h} = h_{n+1}$, und wir können schreiben:

$$\begin{aligned} &|h_{n+1}| \leqq \vartheta_1\vartheta^*\Omega\mathfrak{c}\mathfrak{r}; \\ &\left|\frac{\partial}{\partial x}h_{n+1}(x, y, z)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}h_{n+1}(x, y, z)\right| \leqq \vartheta^*\Omega\mathfrak{c}, \end{aligned} \tag{62}$$

oder aber wegen (26) und (27)

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}\,|h_{n+1}| \leqq \vartheta^*\mathfrak{c}\,\mathrm{Max}\,|h_n|, \\ &\mathrm{Max}\left|\frac{\partial}{\partial x}h_{n+1}\right| \leqq \vartheta^*\mathfrak{c}\,\mathrm{Max}\left|\frac{\partial}{\partial x}h_n\right|, \ldots. \end{aligned} \tag{63}$$

Ist nun $\vartheta^* c \leqq q < 1$, was sich für hinreichend kleines ε, etwa $\varepsilon \leqq \bar{\varepsilon}$, augenscheinlich immer erreichen läßt, so konvergiert die Reihe

$$h_1 + h_2 + h_3 + \cdots \tag{64}$$

unbedingt und gleichmäßig. Wir wählen speziell $q = \frac{1}{2}$. Bezeichnet dann h die Summe der Reihe (64), so finden wir

$$\begin{aligned} &|h| \leqq 2\,\mathrm{Max}\,|h_1|, \\ &\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right| \leqq 2\,\mathrm{Max}\left|\frac{\partial h_1}{\partial x}\right|, \quad \ldots, \quad \frac{\partial h}{\partial z} \leqq 2\,\mathrm{Max}\left|\frac{\partial h_1}{\partial z}\right|. \end{aligned} \tag{65}$$

Betrachten wir jetzt den Übergang von der 0-ten zur 1-ten Approximation. Wegen $\mu_1 = \varepsilon \Psi\left(V^{(0)} - \frac{2\varkappa M}{a};\ C_0^{(0)}\right)$ ist

$$V^{(1)} = V^{(1)}(x, y, z; C_0^{(0)}), \tag{66}$$

wobei $V^{(1)}$ stetig von dem Parameter $C_0^{(0)}$ abhängt. Dann ist auch h_1 sowie dessen partielle Ableitungen erster Ordnung stetig von $C_0^{(0)}$ abhängig als Lösungen der Gleichungen, die (52) und (58) entsprechen. Wir haben also

$$h_1 = h_1(x, y, z; C_0^{(0)}), \qquad \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} h_1(x, y, z; C_0^{(0)}), \ldots . \tag{67}$$

Wir wollen diese Gleichungen noch aufstellen. Wir haben

$$\omega_1^2 - \omega_0^2 = -\varkappa \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial x} W^{(1)}(a, 0, 0),$$

also

$$|\omega_1^2 - \omega_0^2| \leqq \vartheta_{15} \varepsilon,$$

und in $T_0^{(0)} - T_*^{(0)}$

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial}{\partial x}(V^{(1)} - V^{(0)})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(V^{(1)} - V^{(0)})\right| \leqq \vartheta_{16} \varepsilon \mathfrak{r}, \\ &|(V^{(1)}(x, y, z) - V^{(1)}(0, 0, 0)) - (V^{(0)}(x, y, z) - V^{(0)}(0, 0, 0))| \leqq \vartheta_{17} \varepsilon \mathfrak{r}^2. \end{aligned} \tag{68}$$

Liegt nun (x, y, z) in $T_0^{(0)} - T_*^{(0)}$ und ist auf der durch (x, y, z) verlaufenden orthogonalen Trajektorie (ξ, η, ζ) derjenige Punkt, für den

$$V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) - V^{(1)}(0, 0, 0) = V^{(0)}(x, y, z) - V^{(0)}(0, 0, 0) \tag{69}$$

gilt, so bekommen wir, in entsprechender Berechnungsweise wie in (52) und (58):

$$\begin{aligned} &\hat{\Psi}_0(x, y, z) = \Xi_0^*(x, y, z; h_1) - \Xi_0^*(x, y, z; 0), \\ &\frac{\partial}{\partial x} V_*^{(1)}(x, y, z; h_1) + \frac{\partial}{\partial h_1} V_*^{(1)}(x, y, z; h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} V^{(0)}(x, y, z). \end{aligned} \tag{70}$$

Hierbei ist

$$\hat{\Psi}_0(x, y, z) = (V^{(1)}(x, y, z) - V^{(1)}(0, 0, 0)) - (V^{(0)}(x, y, z) - V^{(0)}(0, 0, 0)),$$

$$\Xi_0^*(x, y, z; h_1) = -V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta), \qquad \Xi_0^*(x, y, z; 0) = -V^{(1)}(x, y, z).$$

Wir finden, entsprechend (56) und (61),

$$|h_1| \leqq \vartheta_1 \vartheta^{\mathrm{I}} \varepsilon \mathfrak{r}, \qquad \left|\frac{\partial h_1}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial h_1}{\partial z}\right| \leqq \vartheta^{\mathrm{I}} \varepsilon. \tag{71}$$

Weiterhin ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß in $T_0^{(1)} - T_*^{(1)} \ldots$ $\mu_2 = \varepsilon \Psi(V^{(1)} - \bar{C}^{(1)}; C_0^{(0)})$ ist,

$$\begin{gathered} V^{(2)} = V^{(2)}(x, y, z; C_0^{(0)}), \\ h_2 = h_2(x, y, z; C_0^{(0)}), \qquad \frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} h_2(x, y, z; C_0^{(0)}), \ldots . \end{gathered} \tag{72}$$

So können wir nun weiterschließen und finden wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (64)

$$h = h(x, y, z; C_0^{(0)}), \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z; C_0^{(0)}), \quad \ldots, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} h(x, y, z; C_0^{(0)}),$$

ferner wegen (65) und (71)

$$|h| \leqq 2 \vartheta_1 \vartheta^{\mathrm{I}} \varepsilon \mathfrak{r}, \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial h}{\partial z}\right| \leqq 2 \vartheta^{\mathrm{I}} \varepsilon. \tag{74}$$

Ist nun

$$\varepsilon \leqq \varepsilon_0 = \mathrm{Min}\left(\frac{\hat{\beta}}{4 \vartheta_1 \vartheta^{\mathrm{I}} a}, \frac{\hat{\vartheta}}{2 \vartheta_1 \vartheta^{\mathrm{I}}}, \frac{1}{2} \frac{\hat{\mathfrak{r}}}{4 \vartheta_1 \vartheta^{\mathrm{I}} a}, \frac{\Omega_0}{2 \vartheta^{\mathrm{I}}}, \bar{\varepsilon}\right), \tag{75}$$

so ist offenbar jeder der Körper $T_0^{(n)} - T_*^{(n)}$ ganz in $\hat{B}$ enthalten. Bezeichnet $\bar{T}^{(n)}$ den von $\bar{S}^{(n)}$ begrenzten singulären Körper, so liegt wegen (75) dieser ganz in $\hat{\Theta}$.

Es ist nun ohne weiteres klar, daß die Flächen $S_0^{(0)}$, die wir für $b \leqq C_0^{(0)} \leqq C_0^*$ bei variablem $C_0^{(0)}$ erhalten, eine stetige Schar, insbesondere auch in der Umgebung der zu $C_0^{(0)} = \frac{2 \varkappa M}{a}$ gehörigen Fläche bilden. Wegen (73) und (74) ist dann aber auch die gesuchte Schar von Gleichgewichtsfiguren stetig. Ferner konvergiert gleichmäßig

$$\begin{gathered} W^{(n-1)}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}; C_0^{(0)}) \to W(x, y, z; C_0^{(0)}), \\ D_1 W^{(n-1)}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}; C_0^{(0)}) \to D_1 W(x, y, z; C_0^{(0)}), \\ \mu_n(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}; C_0^{(0)}) \to \mu(x, y, z; C_0^{(0)}), \\ \omega_n(C_0^{(0)}) \to \omega(C_0^{(0)}). \end{gathered}$$

So haben wir schließlich

$$V(x, y, z; C_0^{(0)}) = \varkappa W(x, y, z; C_0^{(0)}) + \varkappa M\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

mit

$$W(x, y, z; C_0^{(0)}) = \int_T \mu \cdot \frac{1}{\hat{r}} d\tau' \qquad (\hat{r}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2).$$

Offenbar haben wir die lineare Reihe der Gleichgewichtsfiguren vor uns, deren Existenz bewiesen werden sollte.

§ 5.

Erweiterungen.

Fassen wir jetzt speziell eine Ausgangsfigur ins Auge, die zu einem Werte $C_0^{(0)} + \frac{2\varkappa M}{a}$ gehört. Unser Verfahren, die zugehörige Gleichgewichtsfigur zu konstruieren, führt jetzt auch in dem Falle zum Ziele, daß die Dichte auf dem Rande nicht verschwindet. Die Existenz der linearen Reihe in der Umgebung der singulären Figur wird sich freilich auf diesem Wege nicht zeigen lassen. Es möge $\varepsilon c = \varepsilon \Psi\left(C_0^{(0)} - \frac{2\varkappa M}{a}\right) \neq 0$ die Dichte auf dem Rande bedeuten, so erhalten wir an Stelle von (9)

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} = -\int\limits_{T_0^{(0)}} \mu_1' \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\tau' = \int\limits_{T_0^{(0)} - T_*^{(0)}} \frac{\partial \mu_1'}{\partial x'} \cdot \frac{1}{\hat{r}}\, d\tau' + \varepsilon c \int\limits_{S_0^{(0)}} \frac{\cos(n', x)\, d\sigma'}{\hat{r}},$$

$\hat{r}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, n ist die Innennormale.

Nun kann aber der zweite Summand rechter Hand als Potential einer einfachen Flächenbelegung aufgefaßt werden. Es ist also

$$\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial x^2} = -\int\limits_{T_0^{(0)} - T_*^{(0)}} \frac{\partial \mu_1'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\tau' + \varepsilon c \int\limits_{S_0^{(0)}} \cos(n', x) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\sigma'$$

sowohl in $T_0^{(0)} + S_0^{(0)}$ wie auch in dem Außenbereiche stetig. Überdies genügt $\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial x^2}$ in den beiden Bereichen einer H-Bedingung. Beim Durchgang durch $S_0^{(0)}$ wird $\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial x^2}$ im allgemeinen einen Sprung erleiden. Entsprechendes gilt für die anderen Ableitungen zweiter Ordnung von $W^{(1)}$.[6]) Wie man ohne weiteres sieht, haben auch die Ableitungen zweiter Ordnung von $V^{(1)}$ die gleichen Eigenschaften. Also werden die Niveauflächen $V^{(1)} \geqq C_0^{(1)}$

---

[6]) Der hier verwendete Satz lautet genau:

Es sei $T + S$ irgendein beschränkter, integrierbarer dreidimensionaler Bereich, und wir betrachten das Newtonsche Potential

$$W(x, y, z) = \int\limits_T \mathfrak{m}' \cdot \frac{1}{r}\, d\tau', \qquad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Gehört nun S der Klasse Ah (vgl. Fußnote [7])) an und genügt die Dichte $\mathfrak{m}$ im Innern und auf dem Rand von T einer H-Bedingung, so verhalten sich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$ auch noch bei Annäherung an S, und zwar sowohl vom Innern von T als auch von dem Außenraume her, stetig. Sie werden freilich auf S im allgemeinen eine sprungweise Unstetigkeit erleiden. Vgl. z. B. L. Lichtenstein, Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929, S. 69–72; N. M. Günther, Über ein Hauptproblem der Hydrodynamik, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 448–499.

abteilungsweise stetige Krümmung besitzen. Die Richtungskosinus der Normale haben daher sicher beschränkte Differenzenquotienten; also liegen ganz gewiß Flächen der Klasse Ah vor[7]).

Dies brauchen wir, damit die Ableitungen zweiter Ordnung von $W^{(2)}$ und $V^{(2)}$ (also dann auch von $W^{(n)}$ und $V^{(n)}$) überhaupt existieren und dieselben Eigenschaften wie diejenigen von $W^{(1)}$ und $V^{(1)}$ haben.

Im Konvergenzbeweise müssen wir jetzt zu den Ungleichheitsbeziehungen (25) und (27) noch die folgenden hinzufügen:

$$\left|\left(\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)_1 - \left(\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)_2\right|, \ldots, \left|\left(\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\right)_1 - \left(\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\right)_2\right| \leqq \vartheta_2^* \Omega^{(n-1)\lambda}_{12}$$

$$\left|\left(\frac{\partial h_n}{\partial x_{n-1}}\right)_1 - \left(\frac{\partial h_n}{\partial x_{n-1}}\right)_2\right|, \ldots, \left|\left(\frac{\partial h_n}{\partial z_{n-1}}\right)_1 - \left(\frac{\partial h_n}{\partial z_{n-1}}\right)_2\right| \leqq \Omega^{(n-1)\lambda}_{12},$$

wobei z. B. $\left(\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)_1$ den Wert der eingeklammerten Größe in einem Punkte $(x_{n-1}^{(1)}, y_{n-1}^{(1)}, z_{n-1}^{(1)})$ im Innern oder auf dem Rande von $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ bedeutet und ${}^{(n-1)}d_{12}^2 = (x_{n-1}^{(1)} - x_{n-1}^{(2)})^2 + (y_{n-1}^{(1)} - y_{n-1}^{(2)})^2 + (z_{n-1}^{(1)} - z_{n-1}^{(2)})^2$ ist.

Setzen wir jetzt, entsprechend (31),

$$Q_\delta(x_\delta, y_\delta, z_\delta) = \int_{T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}} \frac{\partial \mu_n'}{\partial x_\delta'} \cdot \frac{1}{\hat{r}_\delta} \cdot \frac{\partial (x_\delta', y_\delta', z_\delta')}{\partial (x_{n-1}', y_{n-1}', z_{n-1}')} + \varepsilon c \int_{S_0^{(n-1)}} \frac{\cos(n_\delta' x_\delta)}{\hat{r}_\delta} A_\delta' \, d\sigma_{n-1}',$$

$$A_\delta' = \frac{\Delta_\delta'}{\Delta'} > 0, \qquad \Delta_\delta'^2 = \left(\frac{\partial (x_\delta', y_\delta')}{\partial (\omega, \nu)}\right)^2 + \left(\frac{\partial (y_\delta', z_\delta')}{\partial (\omega, \nu)}\right)^2 + \left(\frac{\partial (z_\delta', x_\delta')}{\partial (\omega, \nu)}\right)^2,$$

$$\Delta'^2 = \left(\frac{\partial (x_{n-1}', y_{n-1}')}{\partial (\omega, \nu)}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial (z_{n-1}', x_{n-1}')}{\partial (\omega, \nu)}\right)^2,$$

wobei ω, ν ein System geeigneter Gaußscher Parameter ist, das zur Darstellung von $S_0^{(n-1)}$ in der Umgebung von $(x_{n-1}', y_{n-1}', z_{n-1}')$ benutzt wurde, so finden wir die Abschätzung (39). Da ferner $S_0^{(n-1)}$ der Klasse Ah angehört, erhalten wir auch (39′).

---

[7]) Bekanntlich läßt sich $S_0^{(0)}$ in Flächenstücke zerlegen, die sicher durch mindestens eine der Beziehungen $z = z(x, y)$, $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$ gegeben sind und die einander „dachziegelartig" überdecken. Es gelte beispielsweise $z = z(x, y)$ und es sei

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} z(x_1, y_1) - \frac{\partial}{\partial x} z(x_2, y_2)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y} z(x_1, y_1) - \frac{\partial}{\partial y} z(x_2, y_2)\right|$$
$$\leqq A\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}^{\frac{\lambda}{2}} \qquad (0 < \lambda < 1)$$

für alle in Betracht kommenden Punktepaare (x_1, y_1) und (x_2, y_2).

Wir nennen A den Hölderschen Koeffizienten, λ den Hölderschen Exponenten. Flächen, die diesen Bedingungen genügen, heißen von der Klasse Ah. In unserem Falle könnte sogar $\lambda = 1$ angenommen werden.

Weiterhin treten jetzt zu (48) noch die Beziehungen

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}V^{(n+1)}(x^{(1)},y^{(1)},z^{(1)})-\frac{\partial}{\partial x}V^{(n+1)}(x^{(2)},y^{(2)},z^{(2)})\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial}{\partial x}V^{(n)}(x^{(1)},y^{(1)},z^{(1)})-\frac{\partial}{\partial x}V^{(n)}(x^{(2)},y^{(2)},z^{(2)})\right)\right| \leqq \vartheta_9 \Omega c d_{12}^{\lambda},$$

. . . . . ,

zu (62)

$$\left|\left(\frac{\partial h_{n+1}}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial h_{n+1}}{\partial x}\right)_2\right|,\ \ldots,\ \left|\left(\frac{\partial h_{n+1}}{\partial z}\right)_1-\left(\frac{\partial h_{n+1}}{\partial z}\right)_2\right| \leqq \vartheta^* \Omega c d_{12}^{\lambda},$$

und zu (71)

$$\left|\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)_2\right|,\ \ldots,\ \left|\left(\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)_1-\left(\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)_2\right| \leqq \vartheta^{\mathrm{I}} \varepsilon d_{12}^{\lambda}.$$

So bekommen wir schließlich, als Ergänzung zu (74),

$$\left|\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_2\right|,\ \ldots,\ \left|\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_1-\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_2\right| \leqq 2\vartheta^{\mathrm{I}} \varepsilon d_{12}^{\lambda},$$

womit alle notwendigen Erweiterungen des Konvergenzbeweises erledigt sind.

Eine andere Erweiterung unserer Aufgabe würde der Fall darstellen, daß an Stelle der punktförmigen Attraktionszentra homogene Flüssigkeitskörper gestellt werden, die sich wenig von Kugeln unterscheiden sollen. Als Ausgangskonfiguration wählen wir die Gleichgewichtsfigur, deren Existenz von Herrn Lichtenstein vor einiger Zeit bewiesen wurde[8]). In ganz analoger Weise wie auf S. 304ff. wird das Kraftfeld betrachtet und nach Auszeichnung einer bestimmten Niveaufläche als Randfläche unter Zugrundelegung der Funktion Ψ eine unseren anfänglichen Erwägungen entsprechende Massenverteilung eingeführt. Wie sich nun ohne wesentliche Schwierigkeit zeigen läßt, existiert zu einer derartigen Massenverteilung, wenn nur ε hinreichend klein ist, eine Gleichgewichtsfigur der Attraktionszentra in der Nachbarschaft der Ausgangsfigur. Konvergiert nun die umgebende Massenverteilung, entsprechend unseren sukzessiven Approximationen, gegen die gesuchte Gleichgewichtsfigur, so konvergieren die Gleichgewichtsfiguren, die die Zentralkörper darstellen, gleichzeitig gegen zwei Körper in der Nachbarschaft der Ausgangskörper, die sich als Gleichgewichtsfiguren erweisen.

---

[8]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Zweite Abhandlung: Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit, Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 201–218.

(Eingegangen am 1. August 1930.)

Beweis und Verallgemeinerung eines Waring-Legendreschen Satzes.

Von

S. Lubelski in Warschau.

Waring[1]) hat gezeigt, wie man aus den Darstellungen der Teiler einer Zahl durch die Form a^2+rb^2 die Darstellungen der Zahl selbst erhalten kann. Und zwar ist zunächst, wenn nur $M=p^2+rq^2$, für $k\geqq 0$

$$M_r^{2k}=\frac{1}{4}(s+t)^2(p^2+rq^2)^{2k-2l}-\frac{1}{4}(s-t)^2(p^2+rq^2)^{2k-2l}$$

$$(l=0,1,2,\ldots,k),$$

wobei $s=(p+q\sqrt{-r})^{2l}$, $t=(p-q\sqrt{-r})^{2l}$; also ist die Zahl M^{2k} oder M^{2k+1} mindestens $k+1$ verschiedene Male durch die Form a^2+rb^2 darstellbar. Es seien ferner die Zahlen $M, N, \ldots$ durch die Form a^2+rb^2 entsprechend $m, n, \ldots$-mal darstellbar. Für die Zahl $M^\alpha N^\beta \ldots$ erhält Waring dann mit Hilfe der Eulerschen Identität $\left(\left[\frac{1}{2}(\alpha+2)\right]\left[\frac{1}{2}(\beta+2)\right]\ldots\right)(mn\ldots)$ Darstellungen durch die Form a^2+rb^2, wo $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ bezeichnet. Beachtet man aber, daß sich bei Anwendung der Eulerschen Identität, nach jeder dabei auftretenden Multiplikation nicht eine, sondern vier Darstellungen für das betreffende Produkt ergeben, so erhält man formal sofort eine noch größere Anzahl von Darstellungen; diese beträgt

$$\text{(I)}\qquad ((\alpha+1)(\beta+1)\ldots)(m\cdot n\ldots).$$

Diese Formel hat Legendre[2]) in der Tat festgestellt. Doch nahm er an, daß $M, N, \ldots$ Primzahlen sind, also unter anderem $m=n=\ldots=1$ ist.

[1]) E. Waring, Meditationes algebraicae (Cambridge 1770), S. 205—206; Ausg. 3 (1782), S. 350—353. S. auch L. Dickson, History of the Theory of Numbers 3 (Washington 1923), S. 5.

[2]) A. Legendre, Théorie des nombres 1, 3. Aufl. (1830), § 238, S. 313—316.

Die Formel (I) dürfte alle Darstellungen, welche aus der Anwendung der Eulerschen Identität entspringen, liefern. Diese Darstellungen sind aber nicht immer voneinander verschieden, und zwar erklärt sich das Zusammenfallen gewisser Darstellungen dadurch, daß mehrere der Faktoren $M, N, \ldots$ einen Primteiler gemein haben können (siehe Bemerkung zum Beweise des Satzes 2). Zieht man nur eigentliche Darstellungen der Zahlen $M, N, \ldots$ in Betracht und nimmt man die Zerlegung speziell in einer solchen Gestalt an, daß die Zahlen $M, N, \ldots$ zueinander relativ prim und die $\alpha, \beta, \ldots$ ungerade Zahlen sind, so gibt, wie wir zeigen werden, die obige Formel die wahre Anzahl der Darstellungen. Unter denselben Voraussetzungen, aber für beliebige natürliche Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ beträgt die wahre Anzahl der (verschiedenen) Darstellungen

$$(\mathrm{I}') \qquad ((\alpha+1)(\beta+1)\ldots)(m\cdot n\ldots) - \Sigma(m'n'\ldots - 1),$$

wobei $(m'n'\ldots)$ alle möglichen Produkte aus den Zahlen der Folge $m, n, \ldots$, für welche der entsprechende Exponent $\alpha, \beta, \ldots$ gerade ist, durchläuft. Wir werden zugleich die folgende Verallgemeinerung beweisen.

Der Waringsche Satz im eben präzisierten Sinne (verbunden mit einer entsprechenden Definition der „Gleichheit zweier Darstellungen“ und des Begriffes „relativ prim“) *gilt auch in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, in welchem die Zahlen $M, N, \ldots$ zu $2r$ teilerfremd sind.*

Unter der Voraussetzung, daß die Zahlen $M, N, \ldots$ voneinander verschiedene Primzahlen sind, stellte schon Legendre fest, daß die Formel (I) (bzw. (I')) die genaue Anzahl der Darstellungen der Zahl $M^\alpha N^\beta \ldots$ angibt. Legendre hat aber nicht bewiesen, daß auch speziell alle die von Waring vermittelst der Eulerschen Identität erhaltenen Darstellungen verschieden sind, also auch nicht, daß dieses Verfahren wirklich alle Darstellungen der Zahl $M^\alpha N^\beta \ldots$ erschöpft[3]). Es wird beim Beweis mit herauskommen, daß dies sowohl im Körper K der rationalen Zahlen als auch in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper wirklich gilt, wofern man die Zahlen $M, N, \ldots$ als „Primzahlen“, d. h. als unzerlegbare Zahlen, die zugleich Primideale sind, annimmt (siehe Satz 3').

Wie ein Beispiel zeigt (siehe Fall 1 des Beweises des Satzes 4), ist der Legendresche Satz (schon im Körper K) nicht umkehrbar. Nun werden

---

[3]) Doch glaubte er diesen Satz wirklich bewiesen zu haben. So schrieb er (l. c., S. 315): *Fermat a indiqué cette solution* (für $r = 1$) *sans en donner de démonstration, dans une de ses Notes sur Diophante, p.* 128. — Es ist interessant, daß Gauß glaubte, er habe als erster diesen Satz (für $r = 1$) formuliert (Disquisitiones arithmeticae, S. 182, Fußnote); z. B. hatte diesen „Gaußschen“ Satz bereits Sommer (Vorlesungen über Zahlentheorie, S. 124) bewiesen.

wir den Legendreschen Satz so weit verallgemeinern, daß diese Verallgemeinerung umkehrbar wird, und zwar gilt der Satz:

Es sei die Form x^2+Dy^2 gegeben. Dafür, daß die zu $2D$ teilerfremde Zahl $M=M_1^{a_1}M_2^{a_2}\dots M_n^{a_n}$, wo die M_s $(s=1,2,\dots,n)$ verschiedene Primzahlen sind, $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)$-mal durch die Form x^2+Dy^2 darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Zahlen M_s^2 $(s=1,2,\dots,n)$ und die Zahl M durch die Form x^2+Dy^2 darstellbar sind, erstere mit teilerfremden Werten von x und y.

Ziehen wir nur reelle Körper in Betracht, so ergibt sich, daß jeder der beiden obigen Sätze als eine entsprechende Verallgemeinerung eines Tschebyscheffschen Satzes[8]) angesehen werden kann. Dieser Tschebyscheffsche Satz lautet (kurz gefaßt):

Hat die Gleichung $x^2-Dy^2=\pm N\,(D>0,\ N>0)$ überhaupt eine Lösung, so hat sie schon im Bereich $0<|x|\leqq\sqrt{\frac{(\bar\alpha\pm1)N}{2}}$, $0<|y|\leqq\sqrt{\frac{(\bar\alpha\mp1)N}{2D}}$ eine Lösung, wobei $\bar\alpha$ durch die kleinstmögliche positive Lösung der Pellschen Gleichung $\alpha^2-D\beta^2=1$ definiert ist. Ist N eine Primzahl, so ist diese Lösung eindeutig bestimmt. — Die angegebene Verallgemeinerung lautet:

In jedem reellen algebraischen Zahlkörper beträgt die genaue Anzahl der Darstellungen einer Zahl mit den Tschebyscheffschen Nebenbedingungen so viel, wie der in Betracht kommende Satz 1, 2 oder 3 liefert[4]) *).

Definition 1. *Eine Zahl des Körpers $\mathsf{K}(Q)$ heißt Primzahl, wenn sie ein Primideal ist.*

Definition 2. *Zwei Darstellungen der Zahl M:*

$$M=x^2+Dy^2,$$
$$M=x_1^2+Dy_1^2,$$

im Körper $\mathsf{K}(Q)$ bezeichnen wir als „identisch" oder „äquivalent" oder „nicht verschieden", wenn zwei Zahlen p, q des Körpers $\mathsf{K}(Q)$ existieren, für die

$$p^2+Dq^2=1$$

und

$$x_1=xp-Dyq,\qquad y_1=xq+yp. \tag{1}$$

---

[4]) Es wird in dieser Arbeit nur der elementare Teil der Idealtheorie benutzt. Für den Körper K kann man nach den angegebenen Methoden alle Sätze fast ganz elementar (ohne Idealtheorie) beweisen.

*) Herrn Dr. W. Weber in Göttingen bin ich für seine liebenswürdigen Ratschläge bei der Durchsicht der vorliegenden Arbeit zu Dank verpflichtet.

Bemerkung. *Dasselbe werden wir oft kürzer schreiben*

$$x_1+\sqrt{-D}\,y_1=(x+\sqrt{-D}\,y)(p+\sqrt{-D}\,q),$$

aber unter der Bedingung, daß damit immer (unabhängig davon, ob $\sqrt{-D}$ *zum Körper* $\mathsf{K}(Q)$ *gehört oder nicht) die Gleichungen* (1) *gemeint werden.*

Definition 3. *Zwei Zahlen* l *und* l_1 *des Körpers* $\mathsf{K}(Q)$ *heißen „relativ prim", wenn* $[l, l_1]$ *das Einheitsideal* $\mathfrak{o}$ *ist.*

Definition 4. *Eine Darstellung* $M=x^2+Dy^2$ *im Körper* $\mathsf{K}(Q)$ *heißt „eigentlich", wenn* $[x, y]$ *das Einheitsideal ist.*

Bezeichnung. *Die korrigierte und verallgemeinerte Waring-Legendresche Formel* (I), (I′) *bezeichnen wir kurz mit „*WL".

Bemerkung. *Die Sätze des ersten und zweiten Teils beziehen sich auf einen beliebigen, aber für den betreffenden Satz festen algebraischen Zahlkörper.*

Erster Teil.

Hilfssatz 1. *Ist* $M=U^2+DV^2$, $M_1=U_1^2+DV_1^2$, *wobei* $[MM_1, 2D]=\mathfrak{o}$, *und bezeichnet man mit* $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ *die Ideale*

$$\mathfrak{u}=[UU_1+DVV_1,\ UV_1-VU_1],$$
$$\mathfrak{v}=[UU_1-DVV_1,\ UV_1+VU_1],$$

so folgt

$$(!)\qquad MM_1=(UU_1\pm DVV_1)^2+D(UV_1\mp VU_1)^2,$$

$$(1)\qquad [\mathfrak{u},\mathfrak{v}]=[U,V][U_1,V_1],$$

$$(\dot{2})\qquad \mathfrak{u}\mathfrak{v}=\left[\frac{M}{[U,V]^2},\frac{M_1}{[U_1,V_1]^2}\right][U,V]^2[U_1,V_1]^2.$$

Beweis. Ist das Ideal $\mathfrak{j}$ ein Teiler der linken Seite der Gleichung (1), so ist

$$UU_1+DVV_1\equiv UV_1-VU_1\equiv UU_1-DVV_1\equiv UV_1+VU_1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{j}),$$

also

$$2UU_1\equiv 2DVV_1\equiv 2UV_1\equiv 2VU_1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{j}).$$

Da (der Eulerschen Identität (!) gemäß) $[\mathfrak{j}, 2D]=\mathfrak{o}$ ist, so ergibt sich

$$UU_1\equiv VV_1\equiv UV_1\equiv VU_1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{j}).$$

Nun ist

$$[UU_1, VU_1, VV_1, UV_1]=[U,V][U_1,V_1];$$

also ist $\mathfrak{j}$ Idealteiler der rechten Seite der Gleichung (1). Es ist leicht ersichtlich, daß auch umgekehrt jedes in dem Ideal $[U,V][U_1,V_1]$ aufgehende Ideal ein Teiler der linken Seite der Gleichung (1) ist. Damit ist die Gleichung (1) bewiesen.

Nun ist die Gleichung (2) der Gleichung

$$(3)\qquad \left[\frac{UU_1+DVV_1}{[U,V][U_1,V_1]}, \frac{UV_1-VU_1}{[U,V][U_1,V_1]}\right]\left[\frac{UU_1-DVV_1}{[U,V][U_1,V_1]}, \frac{UV_1+VU_1}{[U,V][U_1,V_1]}\right] = \left[\left[\frac{M}{[U,V]^2}\right], \left[\frac{M_1}{[U_1,V_1]^2}\right]\right]$$

äquivalent. Diese Gleichung ist wahr. Denn zunächst sind die Faktoren der linken Seite wegen (1) teilerfremd. Ist ferner $\mathfrak{j}_1^k$, wo $\mathfrak{j}_1$ ein Primideal und $k > 0$ ist, ein Teiler des Ideals

$$\left[\frac{UU_1+eDVV_1}{[U,V][U_1,V_1]}, \frac{UV_1-eVU_1}{[U,V][U_1,V_1]}\right],$$

wo $e = \pm 1$, so ist der Eulerschen Identität (!) gemäß das Ideal $[MM_1]$ durch das Ideal $[U,V]^2[U_1,V_1]^2\mathfrak{j}_1^{2k}$ teilbar. Daher ist $\mathfrak{j}_1^k$ ein Teiler des Ideals $\left[\frac{M}{[U,V]^2}\right]$ oder des Ideals $\left[\frac{M_1}{[U_1,V_1]^2}\right]$. Nun gilt

$$(4)\qquad (UV_1+eVU_1)(UV_1-eVU_1) = U^2V_1^2 - V^2U_1^2$$
$$= U^2V_1^2 + DV_1^2V^2 - V^2U_1^2 - DV_1^2V^2 = V_1^2M - V^2M_1.$$

Ist also $\mathfrak{j}_1^k$ z. B. ein Teiler des Ideals $\left[\frac{M}{[U,V]^2}\right]$, so folgt aus

$$(WV_1+eVU_1)(UV_1-eVU_1) - V_1^2M = -V^2M_1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,[U,V]^2[U_1,V_1]^2\mathfrak{j}_1^k),$$

daß

$$\left[\frac{V^2}{[U,V]^2}\right]\left[\frac{M_1}{[U_1,V_1]^2}\right] \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{j}_1^k).$$

Da $\mathfrak{j}_1$, wegen $\left[\frac{U}{[U,V]}, \frac{V}{[U,V]}\right] = 0$, kein Teiler des Ideals $\left[\frac{1}{[U,V]}\right]$ sein kann, so folgt, daß $\mathfrak{j}_1^k$ auch Teiler des Ideals $\left[\frac{M_1}{[U_1,V_1]^2}\right]$ ist, also Teiler der rechten Seite von (3).

Ist umgekehrt $\mathfrak{j}^k$ $(k > 0)$ eine in der rechten Seite von (3) aufgehende Primidealpotenz, so ist $[U,V]^2[U_1,V_1]^2\mathfrak{j}^k$ ein Teiler des Ideals $[V_1^2M - V^2M_1]$, also $\mathfrak{j}^k$ nach (4) ein Teiler des Produktes der beiden Ideale $\left[\frac{UV_1+eVU_1}{[U,V][U_1,V_1]}\right]$ $(e = \pm 1)$. Diese Ideale können aber nicht beide durch $\mathfrak{j}$ teilbar sein; denn andernfalls würde, da $\mathfrak{j}$ in $\left[\frac{MM_1}{[U,V]^2[U_1,V_1]^2}\right]$ aufgeht, aus der Eulerschen Identität (!) folgen, daß $\mathfrak{j}$ auch in den beiden Idealen $\left[\frac{UU_1-eDVV_1}{[U,V][U_1,V_1]}\right]$ $(e = \pm 1)$ aufginge, somit in beiden Faktoren der linken Seite von (3). Es ist also das eine der beiden Ideale $\left[\frac{UV_1+eVU_1}{[U,V][U_1,V_1]}\right]$ durch $\mathfrak{j}^k$ teilbar. Da $\mathfrak{j}^{2k}$ in $\left[\frac{MM_1}{[U,V]^2[U_1,V_1]^2}\right]$ aufgeht, so geht $\mathfrak{j}^k$ nach (!) auch in dem betreffenden $\left[\frac{UU_1-eDVV_1}{[U,V][U_1,V_1]}\right]$ auf, also in der linken Seite von (3). — Der Beweis des Hilfssatzes ist damit erbracht.

Definition 5. *Unter dem symbolischen Produkte zweier Darstellungen*

$$M_1 = R^2 + DS^2, \quad M_2 = r^2 + Ds^2$$

versteht man eine Darstellung, welche zu der Darstellung

$$M_1 M_2 = t^2 + DU^2,$$

wo

$$t = Rr - DSs, \quad u = Rs + Sr, \tag{1}$$

äquivalent ist.

Bemerkung. *Dasselbe werden wir oft kürzer schreiben*

$$t + \sqrt{-D}U = (R + \sqrt{-D}S)(r + \sqrt{-D}s),$$

aber unter der Bedingung, daß damit immer (unabhängig davon, ob $\sqrt{-D}$ zum Körper $\mathsf{K}(Q)$ gehört oder nicht) die Gleichungen (1) gemeint werden.

Die symbolische Multiplikation ist eindeutig bestimmt und, wie man unschwer ausrechnet, hat sie die Eigenschaften der Assoziativität und Kommutativität. Man kann also von symbolischen Produkten mehrerer Darstellungen reden. Ein symbolisches Produkt von Darstellungen $M_s = x_s^2 + Dy_s^2$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ erhält man bis auf Äquivalenz aus

$$t + \sqrt{-D}u = \prod_{s=1}^{n}(x_s + \sqrt{-D}y_s).$$

Insbesondere kann man von symbolischen Potenzen einer Darstellung reden. Man erhält die allgemeinste symbolische a-te Potenz $M^a = X_a^2 + DY_a^2$ einer Darstellung $M = x^2 + Dy^2$ durch den Ansatz

$$X_a + \sqrt{-D}Y_a = (x + \sqrt{-D})^a,$$

d. h. durch die rekurrierenden Formeln:

$$X_a = xX_{a-1} - DyY_{a-1}, \quad Y_a = xY_{a-1} + yX_{a-1}.$$

Satz 1. *Es sei $M = M_1^{a_1} \ldots M_n^{a_n}$, wo die M_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ zueinander relativ prim sind und $[M, 2D] = 0$ ist. Es seien je m_s verschiedene Darstellungen von M_s gegeben: $M_s = x_s^2 + Dy_s^2$. Multipliziert man dann symbolisch auf alle möglichen Arten die a_s-ten Potenzen der Darstellungen $M_s = x_s^2 + Dy_s^2$, so sind die entstehenden $m_1 m_2 \ldots m_n$ Darstellungen $M = x^2 + Dy^2$ alle verschieden, und jedesmal ist*

$$[x, y] = [x_1, y_1]^{a_1} \ldots [x_n, y_n]^{a_n}. \tag{1}$$

Beweis. Für $n = 1$ [5]) ergibt sich der Satz folgendermaßen: Ist $M_1 = x_1^2 + Dy_1^2$ eine Darstellung von M_1 und bildet man für eine natür-

[5]) Für den rationalen Körper K hat diesen Fall P. G. L. Dirichlet bewiesen: Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations, Werke 1, S. 24—22 (Berlin 1889) oder Crelle's Journal 3 (1828), S. 355—356.

liche Zahl k die symbolische Potenz M_1^k, d. h. nimmt man

$$X_k = x_1 X_{k-1} - D y_1 Y_{k-1}, \quad Y_k = x_1 Y_{k-1} + y_1 X_{k-1}, \quad X_1 = x_1; \quad Y_1 = y_1$$

an, so folgt

$$M_1^k = (X_{k-1}^2 + D Y_{k-1}^2)(x_1^2 + D y_1^2) = X_k^2 + D Y_k^2.$$

Hierbei ist stets

$$[X_k, Y_k] = [x_1, y_1]^k.$$

Im Falle $k = 1$ ist diese Relation klar. Ist sie bis zu einem k bewiesen, so gilt sie auch für $k+1$. Es ist nämlich

$$X_{k+1} = x_1 X_k - D y_1 Y_k, \quad Y_{k+1} = x_1 Y_k + y_1 X_k; \tag{2}$$

da

$$x_1 \equiv y_1 \equiv 0 \pmod{[x_1, y_1]},$$
$$X_k = Y_k = 0 \pmod{[x_1, y_1]^k},$$

so ist jedenfalls

$$x_1 X_k \equiv y_1 Y_k \equiv x_1 Y_k \equiv y_1 X_k \equiv 0 \pmod{[x_1, y_1]^{k+1}}$$

und somit

$$X_{k+1} \equiv Y_{k+1} \equiv 0 \pmod{[x_1, y_1]^{k+1}}. \tag{3}$$

Wäre die Behauptung falsch, wäre also

$$[X_{k+1}, Y_{k+1}] \neq [x_1, y_1]^{k+1},$$

so würde aus (2) und (3) folgen

$$X_{k+1} = x_1 X_k - D y_1 Y_k \equiv x_1 Y_k + y_1 X_k = Y_{k+1} \equiv 0 \pmod{[x_1, y_1]^{k+1}\mathfrak{j}}, \tag{4}$$

wo $\mathfrak{j}$ ein gewisser Primidealteiler der Zahl M_1 ist. Da

$$[X_{k+1}^2, Y_{k+1}^2] \mid [M_1^{k+1}],$$
$$X_{k+1}^2 \equiv Y_{k+1}^2 \equiv 0 \pmod{[x_1, y_1]^{2(k+1)}\mathfrak{j}},$$

würde auch

$$M_1 \equiv 0 \pmod{[x_1, y_1]^2 \mathfrak{j}} \tag{5}$$

folgen (da $\mathfrak{j}$ Primideal ist). Nun haben wir

$$x_1 X_k + D y_1 Y_k = x_1 (x_1 X_{k-1} - D y_1 Y_{k-1}) + D y_1 (x_1 Y_{k-1} + y_1 X_{k-1})$$
$$= M_1 X_{k-1},$$
$$x_1 Y_k - y_1 X_k = x_1 (x_1 Y_{k-1} + y_1 X_{k-1}) - y_1 (x_1 X_{k-1} - D y_1 Y_{k-1}) = M_1 Y_{k-1}.$$

Der Relation (5) gemäß folgt somit

$$x_1 X_k + D y_1 Y_k \equiv x_1 Y_k - y_1 X_k \equiv 0 \pmod{[x_1, y_1]^{k+1}\mathfrak{j}}.$$

Daher ergibt sich wegen (4)

$$2 x_1 X_k \equiv 2 D y_1 Y_k \equiv 2 x_1 Y_k \equiv 2 y_1 X_k \equiv 0 \pmod{[x_1, y_1]^{k+1}\mathfrak{j}}.$$

Da $[M, 2D] = \mathfrak{o}$, ist um so mehr $[[x_1, y_1]\mathfrak{j}, 2D] = \mathfrak{o}$, also

$$x_1 X_k \equiv y_1 Y_k \equiv x_1 Y_k \equiv y_1 X_k = 0 \pmod{[x_1, y_1]^{k+1}\mathfrak{j}},$$

was aber wegen

$$[x_1 X_k,\ y_1 Y_k,\ x_1 Y_k,\ y_1 X_k] = [x_1, y_1][X_k, Y_k]$$

unmöglich ist.

Es ist noch zu zeigen, daß zwei nicht „identische" Darstellungen von M_1 auch stets zwei nicht „identische" Darstellungen von M liefern. Es sei $M_1 = x_1'^2 + D y_1'^2$ eine mit der vorigen nicht „identische" Darstellung der Zahl M_1. Dann ist, wenn X_k' und Y_k' analog zu X_k und Y_k erklärt werden, $M_1^{a_1} = X_{a_1}'^2 + D Y_{a_1}'^2$. Wäre nun

$$(X_{a_1} + \sqrt{-D}\, Y_{a_1}) = (X_{a_1}' + \sqrt{-D}\, Y_{a_1}')(p + \sqrt{-D}\, q), \quad p^2 + Dq^2 = 1,$$

so wäre

$$(x_1 + \sqrt{-D}\, y_1)^{a_1} = (x_1' + \sqrt{-D}\, y_1')^{a_1}(p + \sqrt{-D}\, q),$$

also

$$(6) \qquad ((x_1 + \sqrt{-D}\, y_1)(x_1' - \sqrt{-D}\, y_1'))^{a_1} = M_1^{a_1}(p + \sqrt{-D}\, q).$$

Es sei jetzt

$$(x_1 + \sqrt{-D}\, y_1)(x_1' - \sqrt{-D}\, y_1') = X + \sqrt{-D}\, Y$$

(wo X und Y ganze Zahlen des Körpers sind). Da für $n = 1$ die Relation (1) bewiesen ist, so folgt aus (6), daß $[X, Y]^{a_1} = [p, q]\, M_1^{a_1}$, also (da $X^{a_1} \equiv Y^{a_1} \equiv 0 \pmod{M_1^{a_1}}$) etwa $X = M_1 p_1$, $Y = M_1 q_1$ ist. Aus

$$(x_1 + \sqrt{-D}\, y_1)(x_1' - \sqrt{-D}\, y_1') = X + \sqrt{-D}\, Y$$

(ergibt sich nun $M_1^2 = X^2 + DY^2$, also $p_1^2 + Dq_1^2 = 1$, und da

$$x_1 + \sqrt{-D}\, y_1 = (x_1' + \sqrt{-D}\, y_1')(p_1 + \sqrt{-D}\, q_1)$$

ist, so sind die Darstellungen $M_1 = x_1^2 + D y_1^2$, $M_1 = x_1'^2 + D y_1'^2$ „identisch", entgegen der Annahme. Damit ist der Satz für $n = 1$ völlig bewiesen.

2. Die Behauptung sei für ein bestimmtes n bewiesen; wir zeigen, daß sie auch für $n+1$ wahr ist.

Es sei $M = M_1^{a_1} M_2^{a_2} \dots M_n^{a_n} M_{n+1}^{a_{n+1}}$. Ist $M_1^{a_1} M_2^{a_2} \dots M_n^{a_n} = R^2 + DS^2$ eine Darstellung von der Beschaffenheit, wie sie der auf n angewandte Satz liefert, und ist auch $M_{n+1}^{a_{n+1}} = r^2 + Ds^2$ gegeben, so erhält man

$$M = (Rr - DSs)^2 + D(Rs + Sr)^2.$$

Infolge des Hilfssatzes 1 ist, wenn

$$[Rr + DSs,\ Rs - Sr] = \mathfrak{u},$$
$$[Rr - DSs,\ Rs + Sr] = \mathfrak{v}$$

gesetzt wird, einerseits $[\mathfrak{u}, \mathfrak{v}] = [R, S]\,[r, s]$, andererseits (da $M_1^{a_1} \dots M_n^{a_n}$ zu $M_{n+1}^{a_{n+1}}$ relativ prim ist) $\mathfrak{u}\mathfrak{v} = [R, S]^2\,[r, s]^2$, also offenbar

$$(7) \qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{v} = [R, S]\,[r, s].$$

Die erhaltene Darstellung genügt also der Forderung (1) des Satzes.

Sodann sind alle so erhaltenen Darstellungen nicht „identisch“. Sind nämlich noch zwei weitere Darstellungen

$$\frac{M}{M_{n+1}^{a_{n+1}}} = R_1^2 + D S_1^2, \quad M_{n+1}^{a_{n+1}} = r_1'^2 + D s_1'^2$$

gegeben und nimmt man an, daß

$$(8) \qquad (R + \sqrt{-D}\,S)(r + \sqrt{-D}\,S)$$
$$= (R_1 + \sqrt{-D}\,S_1)(r_1' + \sqrt{-D}\,s_1')(p + \sqrt{-D}\,q),$$

wo $p^2 + Dq^2 = 1$, so genügt es zu beweisen, daß $r + \sqrt{-D}\,s$ zu $r_1 + \sqrt{-D}\,s_1$, wo

$$r_1 + \sqrt{-D}\,s_1 = (r_1' + \sqrt{-D}\,s_1')(p + \sqrt{-D}\,q),$$

äquivalent ist. Und zwar ergibt sich dies folgendermaßen: Die Gleichungen (8), genauer geschrieben, lauten:

$$R r - D S s = R_1 r_1 - D S_1 s_1,$$
$$R s + \quad S s = R_1 s_1 + \quad S_1 r_1.$$

Der gemeinsame Wert der linken und rechten Seite sei in der ersten Gleichung mit t_1, in der zweiten mit t_2 bezeichnet. Betrachtet man zunächst R und S als Unbekannte, so erhält man

$$t_1 s - t_2 r \equiv 0 \pmod{(r^2 + D s^2)}$$

und somit

$$(9) \qquad s_1(t_1 s - t_2 r) \equiv r_1(t_1 s - t_2 r) \equiv 0 \pmod{M_{n+1}^{a_{n+1}}[r_1, s_1]};$$

betrachtet man R_1 und S_1 als Unbekannte, so ergibt sich (analog)

$$(9') \qquad s(t_1 s_1 - t_2 r_1) \equiv r(t_1 s_1 - t_2 r_1) \equiv 0 \pmod{M_{n+1}^{a_{n+1}}[r, s]}.$$

Gemäß Gleichung (7) folgt

$$[R, S]\,[r, s] = [R_1, S_1]\,[r_1, s_1].$$

Da $[M_1^{a_1} \dots M,\ M_{n+1}^{a_{n+1}}] = \mathfrak{o}$ ist, muß $[r, s] = [r_1, s_1]$ sein. Demzufolge ergibt sich aus den Kongruenzen (9) und (9'):

$$t_1(s r_1 - r s_1) \equiv t_2(s r_1 - r s_1) \equiv 0 \pmod{M_{n+1}^{a_{n+1}}[r, s]},$$

also

$$(10) \qquad \left[\frac{t_1}{[r, s]}\right][s r_1 - r s_1] \equiv \left[\frac{t_2}{[r, s]}\right][s r_1 - r s_1] \equiv 0 \pmod{[M_{n+1}^{a_{n+1}}]}.$$

Wieder gemäß (7) ist

$$\left[\left[\frac{t_1}{[r, s]}\right], \left[\frac{t_2}{[r, s]}\right], M_{n+1}^{a_{n+1}}\right] = [[R, S], M_{n+1}^{a_{n+1}}],$$

aber $[M_1^{a_1} \dots M_n^{a_n}, M_{n+1}^{a_{n+1}}] = \mathfrak{o}$, demnach $[[R, S], M_{n+1}^{a_{n+1}}] = \mathfrak{o}$. Daher folgt aus den Kongruenzen (10), daß

$$(11) \qquad s r_1 - r s_1 \equiv 0 \pmod{M_{n+1}^{a_{n+1}}}.$$

Da

$$M_{n+1}^{2a_{n+1}} = (r^2 + Ds^2)(r_1^2 + Ds_1^2) = (rr_1 + Dss_1)^2 + D(r_1 s - s_1 r)^2$$

ist, so folgt aus (11), daß auch $rr_1 + Dss_1 \equiv 0 \pmod{M_{n+1}^{a_{n+1}}}$ ist. Aus

$$(r + \sqrt{-D}s)(r_1 - \sqrt{-D}s_1) = (rr_1 + Dss_1) + \sqrt{-D}(r_1 s - s_1 r)$$

folgt also mit ganzen p_1, q_1

$$(r + \sqrt{-D}s)(r_1 - \sqrt{-D}s_1) = M_{n+1}^{a_{n+1}}(p_1 + \sqrt{-D}q_1),$$

$$r + \sqrt{-D}s = (r_1 + \sqrt{-D}s_1)(p_1 + \sqrt{-D}q_1),$$

so daß $p_1^2 + Dq_1^2 = 1$ ist. Gemäß (8) sind auch die beiden zugrunde gelegten Darstellungen von $\frac{M}{M_{n+1}^{a_{n+1}}}$ äquivalent.

Damit ist gezeigt, daß die nach dem obigen Verfahren sich ergebenden $m_1 m_2 \dots m_{n+1}$ Darstellungen auch wirklich alle voneinander verschieden sind, und Satz 1 völlig bewiesen.

Um den Waringschen Satz in der verallgemeinerten Form zu beweisen, verallgemeinern wir zunächst eine Dirichletsche Formel[6]).

Hilfssatz 2. Ist $M = M_1^{a_1} \dots M_n^{a_n}$, *wobei die Zahlen* M_s $(s = 1, 2, \dots, n)$ *zueinander relativ prim sind, so ist*

$$\sum_{\substack{d = \prod M_s^{a_s'} \\ a_s' = 1, 2, \dots, \left[\frac{a_s}{2}\right]}} 2^{\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)} = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1) = T(M),$$

wo $\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)$ *die Anzahl der verschiedenen Teiler* M_s *von* $\frac{M}{d^2}$ *und* $T(M)$ *die Anzahl derjenigen Teiler von* M *bedeutet, welche Produkte der Zahlen* M_s *sind.*

Den Beweis dieses Hilfssatzes werden wir so führen, daß wir zugleich seinen wesentlichen Grund ersehen werden.

Die Anzahl der Darstellungen der Zahl M durch die Form xy, wo x und y Produkte der Zahlen M_s sind, beträgt ersichtlich $T(M)$. Nun kann man diese Anzahl auch folgendermaßen berechnen: Man teile alle diese Darstellungen in Klassen ein; ist d^2 ein Teiler von M, wobei d Produkt der Zahlen M_s ist, so rechne man zur Klasse (d) alle diejenigen Darstellungen, in denen $\frac{x}{d}$ und $\frac{y}{d}$ ganz sind und $\left[\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right] = 0$ ist. In der Klasse (d) kommen offensichtlich $2^{\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)} = 2^{\psi(M')}$ Darstellungen vor: Für $\psi(M') = 1$ ist dies trivial. Ist es für $\psi(M') = k$ wahr, so folgt die Richtigkeit auch für $\psi(M'') = k + 1$. Und zwar ergeben sich die Darstellungen

---

[6]) Vgl. P. G. L. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 3. Aufl. (1879), § 124, S. 321–322.

von M'' durch zwei teilerfremde Faktoren folgendermaßen:

$$M'' = x_s\left(y_s \frac{M''}{M'}\right) = \left(\frac{M''}{M'} x_s\right) y_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, 2^k),$$

wo M' Teiler von M'' und zugleich mit M'' Produkt der Zahlen M_s ist, ferner $\psi(M') = k$, $\left[M, \frac{M'}{M}\right] = 0$ und

$$M' = x_s y_s, \qquad [x_s, y_s] = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, 2^k).$$

Da alle Klassen zusammen alle Darstellungen der Zahl M ergeben, ist somit die Formel bewiesen.

Bemerkung. Dirichlet hat diese Formel unter der Voraussetzung bewiesen, daß die Zahlen M_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ natürliche Primzahlen sind. Nach analoger Abzählung der Darstellungen $M = x\,y\,z\,t\,u\ldots$ erhalten wir eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes.

Um die Verallgemeinerung des Waring-Legendreschen Satzes anzugeben, ist von Wichtigkeit folgende Definition:

Definition 6. *Ein Produkt* $M = t^2 + Du^2$ *der Darstellungen* $M_s = x_s^2 + Dy_s^2$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ *heißt echt* (*oder*

$$t + \sqrt{-D}\,u = \prod_1^n (x_s + \sqrt{-D}\,y_s)$$

heißt echt), *wenn zugleich mit* $M_g = M_k$ *die Darstellung* $M_g = x_g^2 + D y_g^2$ *entweder zur Darstellung* $M_k = x_k^2 + D y_k^2$ *oder zu ihrer konjugierten äquivalent ist.*

Satz 2. *Es sei* $M = M_1^{a_1} \ldots M_n^{a_n}$, $[M, 2D] = 0$, *und* M_s *sei* $2m_s$*-mal durch die Form* $M_s = x_s^2 + D(\pm y_s)^2$ *darstellbar* (*oder genauer*: M_s *sei* m_s*-mal durch verschiedene Paare konjugierter Formen darstellbar*). *Es beträgt also* (*formal*) *die Anzahl* WL *aller möglichen echten symbolischen Produkte der Darstellungen* $M_s = x_s^2 + D(\pm y_s)^2$:

$$\text{(I)} \qquad (a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_n + 1)(m_1 m_2 \ldots m_n).$$

Sind aber die Zahlen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *zueinander relativ prim und sind* $M_s = x_s^2 + D(\pm y_s)^2$ *eigentliche Darstellungen, so beträgt die Anzahl der „verschiedenen" Darstellungen aus diesen allen möglichen echten symbolischen Produkten genau*

$$\text{(I')} \quad (a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_n + 1)(m_1 m_2 \ldots m_n) - \sum(m_{k_1} m_{k_2} \ldots m_{k_g} - 1),$$

wo $m_{k_1} \ldots m_{k_g}$ *alle möglichen Produkte aus den Zahlen der Folge* $m_1, m_2, \ldots, m_n$, *für welche der entsprechende Exponent* a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *gerade ist, durchläuft*[7]).

[7]) Für den rationalen Körper, wo M_1 eine natürliche Primzahl und ihre Darstellung eigentlich ist, hat den Fall $n = 1$ P. G. L. Dirichlet bewiesen; vgl. Fußnote [6]).

Beweis. 1. Alle in Rede stehenden Darstellungen der Zahl $M = M_1^{a_1} \dots M_n^{a_n}$ erhalten wir vermittels des Produktes

$$(1) \qquad t + \sqrt{-D}\,u = \prod_1^n (x_s + e_s\sqrt{-D}\,y_s)^{a_s - b_s}(x_s - e_s\sqrt{-D}\,y_s)^{b_s}$$

$$= \prod_1^n M_s^{b_s}(x_s + e_s\sqrt{-D}\,y_s)^{a_s - 2b_s},$$

$$e_s = \pm 1, \quad 0 \leqq b_s \leqq \frac{a_s}{2} \qquad (s = 1, 2, \dots n).$$

Nun teilen wir alle diese Darstellungen in *Gruppen* ein. Zwei Darstellungen rechnen wir zur selben Gruppe, wenn sie aus der echten symbolischen Multiplikation eines und desselben Systems von paarweise konjugierten Darstellungen der Zahlen $M_1, M_2, \dots, M_n$ entspringen. Wir werden jetzt die Anzahl der Elemente einer beliebigen Gruppe berechnen: Die Elemente (jeder Gruppe) teilen wir nun in *Klassen* ein, und zwar soll die Darstellung $M = t^2 + Du^2$ zur Klasse (d) gehören, wo $d = \prod_1^n M_s^{b_s}$ ist und die Zahlen b_s die Bedeutung aus Gleichung (1) haben. Gemäß Satz 1 enthält jede Klasse $\left(d = \prod_1^n M_s^{b_s}\right)$ genau $2^{\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)}$ $\left(\text{wobei } \psi\left(\frac{M}{d^2}\right) \text{ die Anzahl der verschiedenen Teiler } M_s \text{ der Zahl } \frac{M}{d^2} \text{ bedeutet}\right)$ Darstellungen. Vermöge des Hilfssatzes 2 liegen also in jeder Gruppe $\sum 2^{\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)} = T(M)$ Elemente. Da die Anzahl der Gruppen ersichtlich $m_1 m_2 \dots m_n$ beträgt, so ist Fall 1 bewiesen.

2. Es seien die Zahlen $M_1, M_2, \dots, M_n$ zueinander relativ prim; auch sei angenommen, daß die Darstellungen $M_s = x_s^2 + D y_s^2$ eigentliche sind. Wir berechnen jetzt die genaue Anzahl aller verschiedenen Darstellungen, welche sich aus der echten symbolischen Multiplikation ergeben. Es sei

$$t + \sqrt{-D}\,u = \prod_1^n M_s^{b_s}(x_s + e_s\sqrt{-D}\,y_s)^{a_s - 2b_s}$$

$$= \prod_1^n M_s^{b_s'}(x_s' + e_s'\sqrt{-D}\,y_s')^{a_s - 2b_s'}(p + \sqrt{-D}\,q),$$

wo $p^2 + Dq^2 = 1$. Gemäß Satz 1 ist

$$[t, u] = \prod_1^n M_s^{b_s}[x_s, y_s]^{a_s - 2b_s} = \prod_1^n M_s^{b_s'}[x_s', y_s']^{a_s - 2b_s'}[p, q].$$

Da

$$[x_s, y_s] = [x_s', y_s'] = [p, q] = 0$$

ist und da die Zahlen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ zueinander relativ prim sind, so muß

$$M_s^{b_s} = M_s^{b_s'} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

sein; also ist

$$b_s = b_s' \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Demzufolge haben wir

$$\prod_1^n (x_s + e_s \sqrt{-D}\, y_s)^{a_s - 2b_s} = \prod_1^n (x_s' + e_s' \sqrt{-D}\, y_s')^{a_s - 2b_s'} (p + \sqrt{-D}\, q),$$

daher folgt (wieder gemäß Satz 1), wenn nur $a_s - 2b_s \neq 0$, daß die Darstellung $x_s + e_s \sqrt{-D}\, y_s$ zur Darstellung $x_s' + e_s' \sqrt{-D}\, y_s'$ äquivalent ist. Die Darstellung $t + \sqrt{-D}\, u$ kann also nur zu solchen Gruppen gehören, für welche alle $x_s + \sqrt{-D}\, y_s$, wo $a_s - 2b_s \neq 0$, zum charakteristischen System gehören, und umgekehrt: gehören diese zugrunde gelegten Darstellungen $x_s + \sqrt{-D}\, y_s$ (für welche in $t + \sqrt{-D}\, u$ ist $a_s - 2b_s \neq 0$) zum charakteristischen System einer Gruppe, so gehört auch die Darstellung $t + \sqrt{-D}\, u$ zu dieser Gruppe. Substituiert man in den Zahlen $x_{k_r} + e_{k_r} \sqrt{-D}\, y_{k_r}$ $(r = 1, \ldots, g)$ des Produktes

$$t + \sqrt{-D}\, u = \prod_1^n (x_s + e_s \sqrt{-D}\, y_s)^{a_s - b_s} (x_s - e_s \sqrt{-D}\, y_s)^{b_s},$$

für welche $a_{k_r} - 2b_{k_r} = 0$ ist, auf alle möglichen Arten die zugrunde gelegten Darstellungen, so sieht man, daß diese Darstellung $(t + \sqrt{-D}\, u)$ genau $m_{k_1} m_{k_2} \ldots m_{k_g}$-mal gezählt ist. Die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen beträgt also

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1)(m_1 m_2 \ldots m_n) - \sum (m_{k_1} m_{k_2} \ldots m_{k_g} - 1),$$

wo $m_{k_1} m_{k_2} \ldots m_{k_g}$ alle möglichen Produkte aus den Zahlen der Folge $m_1, m_2, \ldots, m_n$, für welche der entsprechende Exponent a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gerade ist, durchläuft. Der Satz ist also bewiesen.

Bemerkungen zum Satz 2. Die Voraussetzung, daß die zugrunde gelegten Darstellungen der Zahlen M_s *eigentlich* sind, ist hierbei (für die Formel (I′)) wesentlich. Es ergibt sich nämlich im rationalen Körper für eine beliebige Kubikzahl $M_1 = M'^3$, wo M' durch die Form $x^2 + Dy^2$ eigentlich darstellbar ist: $M' = u^2 + Dv^2$, daß aus

$$M_1^3 = N((u + \sqrt{-D}\, v)^6 (u - \sqrt{-D}\, v)^3) \qquad (N(x) = \text{Norm der Zahl } x)$$

folgt

$$M_1^3 = M_1^2 N(u + \sqrt{-D}\, v)^3.$$

Nun haben wir unmittelbar

$$N(M' u + \sqrt{-D}\, M' v)^3 = M_1^2 N(u + \sqrt{-D}\, v)^3;$$

also erhalten wir aus verschiedenen Darstellungen der Zahl M_1

$$M_1 = N(u + \sqrt{-D}\,v)^3 \quad \text{und} \quad M_1 = (M'u)^2 + D(M'v)^2$$

vermittels der symbolischen Multiplikation ein und dieselbe Darstellung für M_1^3.

Auch ist die Voraussetzung, daß die Zahlen M_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ zueinander relativ prim sind, (für die Formel (I')) wesentlich; im andern Falle kann der Satz falsch sein. Beispielsweise entsteht im Körper K die Darstellung

$$M_1 M_2 = (9 \cdot 11)^2 + 5(8 \cdot 9)^2, \quad \text{wo} \quad M_1 = 81 \cdot 49, \quad M_2 = 9,$$

aus

$$(62^2 + 5 \cdot 5^2)(2^2 + 5 \cdot 1^2) = (9 \cdot 11)^2 + 5(8 \cdot 9)^2$$

und zugleich aus

$$(18^2 + 5(-27^2))((-2)^2 + 5 \cdot 1^2) = (9 \cdot 11)^2 + 5(8 \cdot 9)^2;$$

die Darstellungen des Faktors M_1 und ebenso die des Faktors M_2 sind hierin verschieden. Es müssen aber im Falle, daß die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ausnahmslos ungerade sind, alle Darstellungen aus der Formel (I) „verschieden" sein.

Hilfssatz 2. *Es sei M Produkt von A teilerfremden Primidealpotenzen, die ihrerseits Hauptideale sind; es sei $[M, 2D] = \mathfrak{o}$. Die Anzahl der verschiedenen Lösungen der Kongruenz $z_2 + D \equiv 0 \pmod{M}$ beträgt dann höchstens 2^A.*

Beweis. 1. Es sei zunächst $A = 1$, also die Zahl M Potenz eines einzigen Ideals. Ist $z^2 + D \equiv 0 \pmod{M}$ und $z_1^2 + D \equiv 0 \pmod{M}$, so ist auch $(z - z_1)(z + z_1) \equiv 0 \pmod{M}$. Nun können die Kongruenzen

$$z - z_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{j}}, \qquad z + z_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{j}},$$

wo $\mathfrak{j}$ der Primidealteiler der Zahl M ist, niemals zugleich bestehen; denn aus ihnen würde folgen $2z \equiv 2z_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{j}}$; da auch $2z^2 + 2D \equiv 0 \pmod{\mathfrak{j}}$ ist, so würde also folgen $[\mathfrak{j}, 2D] \neq \mathfrak{o}$, entgegen der Voraussetzung, daß $[M, 2D] = \mathfrak{o}$ sei. — Somit geht M als Potenz von $\mathfrak{j}$ schon in $z - z_1$ und $z + z_1$ auf; d. h. z_1 gehört einer von zwei durch z eindeutig bestimmten Restklassen mod M an, womit der Satz im Falle $A = 1$ bewiesen ist.

2. Ist der Satz für $A = k$ richtig, so ergibt er sich für $A = k + 1$ so: Die höchste in M aufgehende Potenz eines beliebigen Primidealteilers von M heiße m. Die Kongruenz $z^2 + D \equiv 0 \pmod{M}$ ist gleichbedeutend mit dem System der beiden Kongruenzen

$$(1) \qquad z^2 + D \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\,\frac{M}{m}\right), \qquad z^2 + D \equiv 0 \pmod{m}.$$

Die Zahl $\frac{M}{m}$ hat nur k verschiedene Primidealfaktoren. Die Konkruenzen (1) sind für genau diejenigen z erfüllt, zu denen es eine Lösung z_0 der ersten und eine Lösung z' der zweiten Kongruenz (1) sowie zwei ganze Körperzahlen t, t_1 mit

$$z = \frac{M}{m} t + z_0 = m t_1 + z'$$

gibt (solche Zahlen t und t_1 sind zu beliebigen z_0 und z' immer zu finden, da $\left[\frac{M}{m}, m\right] = \mathfrak{o}$ ist). Zu jeder für z_0 und jeder für z' zulässigen Restklasse mod M ergibt dies für z genau eine Restklasse mod M. Die gesuchte Lösungszahl ist also höchstens das Produkt der Lösungszahlen der Kongruenzen (1), also höchstens $2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Satz 3. *Ist* $[M, 2D] = \mathfrak{o}$, $M = M_1^{a_1} M_2^{a_2} \dots M_n^{a_n}$ *und sind* $M_1, M_2, \dots, M_n$ *teilerfremde Primidealpotenzen, so hat die Anzahl der eigentlichen Darstellungen der Zahl M durch die Form* $x^2 + Dy^2$ *höchstens den Wert* 2^n.

Beweis. Ist $M = x^2 + Dy^2$ eine eigentliche Darstellung, also $[x, y] = \mathfrak{o}$, so ist y zu M teilerfremd, und daher sind mod M die gebrochenen Zahlen $\pm \frac{x}{y}$ kongruent zu gewissen ganzen Zahlen. Für jede zu $\frac{x}{y}$ kongruente ganze Zahl z ist $z^2 + D \equiv 0 \pmod{M}$. Es sei nun $M = x_1^2 + Dy_1^2$ eine zweite eigentliche Darstellung, und für die zugehörige Restklasse z_1 gelte $z \equiv z_1 \pmod{M}$. Dann wird $xy_1 - yx_1 \equiv 0 \pmod{M}$. Da

$$(x^2 + Dy^2)(x_1^2 + Dy_1^2) = (xx_1 + Dyy_1)^2 + D(xy_1 - yx_1)^2$$

ist, so folgt aus $xy_1 - yx_1 \equiv 0 \pmod{M}$, daß auch $xx_1 + Dyy_1 \equiv 0 \pmod{M}$ ist. Aus

$$(x + \sqrt{-D}\,y)(x_1 - \sqrt{-D}\,y_1) = (xx_1 + Dyy_1) + \sqrt{-D}(xy_1 - yx_1)$$

folgt also mit ganzen p, q

$$(x + \sqrt{-D}\,y)(x_1 - \sqrt{-D}\,y_1) = M(p + \sqrt{-D}\,q),$$

$$x + \sqrt{-D}\,y = (x_1 + \sqrt{-D}\,y_1)(p + \sqrt{-D}\,q),$$

so daß $p^2 + Dq^2 = 1$ ist. Die beiden zugrunde gelegten Darstellungen von M sind also identisch. Die Anzahl der nicht identischen eigentlichen Darstellungen hat also höchstens den Wert B, wo B die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $z^2 + D \equiv 0 \pmod{M}$ bedeutet. Damit ist, mit Rücksicht auf Hilfssatz 3, der Satz bewiesen.

Satz 3′ (Verallgemeinerung des Legendreschen Satzes). *Ist* $[M, 2D] = \mathfrak{o}$, $M = M_1^{a_1} M_2^{a_2} \dots M_n^{a_n}$ *und sind* $M_1, M_2, \dots, M_n$ *verschiedene Primzahlen, so gibt die Formel* WL *eine obere Schranke für die Anzahl der Dar-*

stellungen der Zahl M durch die Form x^2+Dy^2. Sind die Zahlen M_s $(s=1,2,\ldots,n)$ zugleich durch x^2+Dy^2 darstellbar, so gibt die Formel WL *die genaue Anzahl der Darstellungen der Zahl M, und zwar entstehen diese Darstellungen schon durch symbolische Multiplikation der Darstellungen der Zahlen M_s.*

Beweis. Alle Darstellungen $M=x^2+Dy^2$ teilen wir in Gruppen ein, wobei zur Gruppe (d) diejenigen Darstellungen gehören, für welche $[x,y]=d$ ist (da die M_s Primzahlen sind, so kann d als Produkt dieser Zahlen betrachtet werden). Nun gehören zu jeder Gruppe nach Satz 3 höchstens $2^{\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)}$ Darstellungen. Sind aber auch die M_s durch die Form x^2+Dy^2 darstellbar, so sind diese Darstellungen (da die $[M_s]$ Primideale sind) sogar eigentlich; da es zu jeder Darstellung eine konjugierte gibt, so liefert Satz 1 mindestens $2^{\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)}$ eigentliche Darstellungen von M in der Gruppe (d), so daß diese Anzahl die genaue ist. Nach Hilfssatz 2 ist ferner $\sum 2^{\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)}=(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)$. Die Aussiebung der mehrfach gezählten Darstellungen geschieht dann wie beim Beweis des Satzes 2.

Bemerkung. Offenbar gibt es unendlich viele Primidealpotenzen, die ihrerseits Hauptideale sind; denn ist $\mathfrak{j}$ ein beliebiges Primideal und H die Klassenzahl, so ist $\mathfrak{j}^H$ eine solche Zahl (und Potenz einer solchen unzerlegbaren Zahl).

Auch findet man in jedem algebraischen Zahlkörper unendlich viele Primzahlen. Der Beweis ist aber schwierig (vgl. H. Hasse, Bericht über Klassenkörper, Jahrb. d. deutsch. Math. Ver. **35** (1926), S. 32).

Allgemeine Bemerkung zum ersten Teile.

Bei Waring und Legendre sind auch zwei zueinander konjugierte Darstellungen „identisch“. Auch nehmen diese Autoren die Multiplikation der Darstellungen als eine nicht eindeutige Operation an, und zwar

$$MM_1=(Rr\pm DSs)^2+D(\pm(Rs\mp Sr))^2,$$

wo $M=R^2+DS^2$ und $M_1=r^2+Ds^2$. Nehmen wir die obigen schärferen Definitionen der Äquivalenz und Multiplikation an, so entstehen diese beiden Darstellungen, sobald wir annehmen werden, daß die Darstellungen der Zahlen M, M_1 paarweise konjugiert auftreten: $M=R+D(\pm S)^2$, $M=r^2+D(\pm s)^2$. Dadurch aber erhalten wir in allen obigen Sätzen (allgemein genommen) zweimal soviel Darstellungen, als sich nach dem Waring-Legendreschen Standpunkte ergeben.

Zweiter Teil.

Wir wenden uns nun der Frage der Umkehrbarkeit der Sätze aus Teil 1 zu.

Satz 4. *Ist* $M = M_1^{a_1} M_2^{a_2} \dots M_n^{a_n}$, *wo die Zahlen* M_s $(s = 1, 2, \dots, n)$ *teilerfremde Primidealpotenzen sind, ist* $[M, 2D] = 0$ *und ist die Zahl* M *genau* 2^n*-mal durch die Form* $x^2 + Dy^2$ *eigentlich darstellbar, so ist auch* $M_s^{2a_s}$ $(s = 1, 2, \dots, n)$ *eigentlich darstellbar. Der Exponent* $2a_s$ *läßt sich dabei nicht allgemein herabdrücken.*

Beweis. 1. Daß kein kleinerer Exponent die behauptete Eigenschaft hat, ist aus dem Beispiel

$$21 = 3 \cdot 7 = 4^2 + 5$$

ersichtlich. (Zugleich beachte man $3^2 = 2^3 + 5$, $7^2 = 2^5 + 5 \cdot 3^2$.)

2. Es seien die verschiedenen Darstellungen

$$M = x_1^2 + Dy_1^2 = x_2^2 + Dy_2^2 = \dots = x_{2^n}^2 + Dy_{2^n}^2 \tag{1}$$

mit

$$[x_1, y_1] = [x_2, y_2] = \dots = [x_{2^n}, y_{2^n}] = 0$$

gegeben. Aus der Folge (1) greifen wir eine beliebige Darstellung heraus, z. B. $M = x^2 + Dy^2$. Wir multiplizieren sie mit allen Darstellungen aus der Folge (1) und erhalten

$$M^2 = (xx_s - Dyy_s)^2 + D(xy_s + yx_s)^2 \quad (s = 1, 2, \dots, 2^n). \tag{2}$$

Ist nun etwa

$$[xy_s + yx_s, M] = [xy_{s_1} + yx_{s_1}, M] = \mathfrak{r}, \tag{3}$$

so ist, da immer (siehe Beweis des Hilfssatzes 1, Gleichung (4))

$$(xy_s - yx_s)(xy_s + yx_s) \equiv (xy_{s_1} - yx_{s_1})(xy_{s_1} + yx_{s_1}) \equiv 0 \pmod{M}$$

ist,

$$xy_s - yx_s \equiv xy_{s_1} - yx_{s_1} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{[M]}{\mathfrak{r}}\right),$$

demnach (siehe auch (3))

$$(xy_s + yx_s)(xy_{s_1} - yx_{s_1}) \equiv 0 \pmod{M},$$

$$(xy_s - yx_s)(xy_{s_1} + yx_{s_1}) \equiv 0 \pmod{M}.$$

Durch Subtraktion der zweiten von der ersten Kongruenz ergibt sich

$$2xy(x_s y_{s_1} - y_s x_{s_1}) \equiv 0 \pmod{M}.$$

Da $[M, 2D] = [M, xy] = [x, y] = 0$ ist, so folgt

$$x_s y_{s_1} - y_s x_{s_1} = hM,$$

wo h eine gewisse ganze Zahl des Körpers $K(Q)$ ist. Nun folgt aus der Gleichung

$$(x_s - \sqrt{-D}\, y_s)(x_{s_1} + \sqrt{-D}\, y_{s_1}) = (x_s x_{s_1} + D y_s y_{s_1}) + \sqrt{-D}\,(x_s y_{s_1} - y_s x_{s_1}),$$

da infolge der Eulerschen Identität auch $x_s x_{s_1} + D y_s y_{s_1} \equiv 0 \pmod{M}$ ist,

$$x_{s_1} + \sqrt{-D}\, y_{s_1} = (x_s + \sqrt{-D}\, y_s)(p + \sqrt{-D}\, q) \tag{4}$$

mit *ganzen* Körperzahlen p und q. Von selbst ist dabei $p^2 + D q^2 = 1$; man braucht in (4) nur beiderseits die Normen zu nehmen. Die Darstellungeu $M = x_s^2 + D y_s^2$ und $M = x_{s_1}^2 + D y_{s_1}^2$ sind also „identisch", oder genauer: die Gleichung (4) und demnach die Gleichung (3) besteht dann und nur dann, wenn $s = s_1$ ist.

Nun sind die beiden Ideale $[x y_s + y x_s, M]$, $[x y_s - y x_s, M]$ für jedes s von 1 bis 2^n relativ prim. Denn offenbar ist

$$[x y_s + y x_s, M] = [x x_s - D y y_s, x y_s + y x_s, M] = [x x_s - D y y_s, x y_s + y x_s],$$
$$[x y_s - y x_s, M] = [x x_s + D y y_s, x y_s - y x_s, M] = [x x_s + D y y_s, x y_s - y x_s],$$

also nach Formel (1) des Hilfssatzes 1

$$[x y_s + y x_s, x y_s - y x_s, M] = \mathfrak{o}. \tag{5}$$

Nach Formel (2) des Hilfssatzes 1 ist zugleich

$$[x y_s + y x_s, M]\,[x y_s - y x_s, M] = M. \tag{6}$$

Also sind jene beiden Ideale, zugleich mit den höchsten in M aufgehenden Primidealpotenzen, Hauptideale. Es sei

$$[x y_s + y x_s, M] = [M^{(s)}]$$

gesetzt, wo $M^{(s)}$ eine ganze Zahl des Körpers $\mathsf{K}(Q)$ ist. Nach (5) und (6) ist also

$$\left[M^{(s)}, \frac{M}{M^{(s)}}\right] = \mathfrak{o}. \tag{7}$$

Es bezeichne $B_n^{(g)}$ die Anzahl aller derjenigen unter den Zahlen $M^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, 2^n)$, welche durch genau g verschiedene Primideale teilbar sind. Da die $M^{(s)}$ wegen (7) die Gestalt

$$M^{(s)} = M_1^{b_{s1}} M_2^{b_{s2}} \ldots M_n^{b_{sn}} \tag{8}$$

haben, wo jedes b_{si} entweder 0 oder a_i ist, so ist

$$B_n^{(g)} \leqq \binom{n}{g}, \tag{9}$$

wo $\binom{n}{g}$ die übliche Bedeutung des Binomialkoeffizienten hat. Die Anzahl aller obigen Darstellungen der Zahl M^2 ist gleich der Anzahl aller verschiedenen $M^{(s)}$; da sie andrerseits nach Voraussetzung genau 2^n beträgt, so ist

$$\sum_{g=0}^{n} B_n^{(g)} = 2^n = (1+1)^n = \sum_{g=0}^{n} \binom{n}{g}, \qquad \sum_{g=0}^{n} \left(B_n^{(g)} - \binom{n}{g}\right) = 0.$$

Wegen (9) muß also für $g = 0, 1, \ldots, n$

$$B_n^{(g)} - \binom{n}{g} = 0$$

sein. $M^{(\varkappa)}$ durchläuft also alle möglichen Zahlen von der Gestalt (8), unter anderem also die Zahlen $M^{(r)'} = M_1^{a_1} \ldots M_{r-1}^{a_{r-1}} M_{r+1}^{a_{r+1}} \ldots M_n^{a_n}$. Hebt man in den zugehörigen Darstellungen (2) von M^2 den Faktor

$$M^{(r)'2} = [x x_s - D y y_s, x y_s + y x_s]^2$$

weg, so ergibt sich eine eigentliche Darstellung von $M_r^{2a_r}$.

Satz 5 (zweiter Umkehrungssatz). *Ist* $M = M_1^{a_1} M_2^{a_2} \ldots M_n^{a_n}$, *wo die* M_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ *teilerfremde Primidealpotenzen sind, ist* $[M, 2D] = \mathfrak{o}$ *und sind* M *und alle* $M_s^{2a_s}$ *durch die Form* $x^2 + Dy^2$ *eigentlich darstellbar, so ist* M *genau* 2^n*-mal eigentlich darstellbar.*

Beweis. Es sei $M = U^2 + DV^2$, $M_s^{2a_s} = U_s^2 + DV_s^2$, $[U, V] = [U_s, V_s] = \mathfrak{o}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Wir behaupten: Es gibt zu jedem s ein e_s so, daß $e_s^2 = 1$ und für jedes der 2^n Produkte

$$(1) \qquad (U + \sqrt{-D}\, V) M_1' M_2' \ldots M_n' = \overline{U} + \sqrt{-D}\, \overline{V},$$

wo M_s' willkürlich gleich $M_s^{a_s}$ oder gleich $U_s + \sqrt{-D}\, e_s V_s$ zu setzen ist,

$$(2) \qquad [\overline{U}, \overline{V}] = [M]$$

ist. Dies ergibt sich folgendermaßen: Wird

$$\overline{U}_1 + \sqrt{-D}\, \overline{V}_1 = (U + \sqrt{-D}\, V) M_1'$$

gesetzt, so ist ersichtlich, daß bei beiden Bedeutungen von M_1' bei passender Wahl von e_1

$$[\overline{U}_1, \overline{V}_1] = [M_1^{a_1}]$$

ist. Für $M_1' = M_1^{a_1}$ ist dies trivial, und daß bei passendem $e_1 = \pm 1$ auch $M_1' = U_1 + \sqrt{-D}\, e_1 V_1$ diese Eigenschaft hat, folgt daraus, daß nach Hilfssatz 1 die Ideale

$$[U U_1 + D V V_1,\ U V_1 - V U_1], \quad [U U_1 - D V V_1,\ U V_1 + V U_1]$$

teilerfremd sind und das Produkt $[M, M_1^{2a_1}] = [M_1^{a_1}]$ haben, so daß (weil $M_1^{a_1}$ Primidealpotenz ist) schon eins von ihnen gleich $[M_1^{a_1}]$ sein muß. — Setzt man allgemeiner

$$\overline{U}_k + \sqrt{-D}\, \overline{V}_k = (U + \sqrt{-D}\, V) M_1' M_2' \ldots M_k',$$

so ergibt sich, daß bei passender Wahl der $e_s = \pm 1$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ mit allen Bedeutungen der M_s'

$$(3) \qquad [\overline{U}_k, \overline{V}_k] = [M_1^{a_1} M_2^{a_2} \ldots M_k^{a_k}]$$

ist. Denn für $k = 1$ wurde dies soeben gezeigt. Ist ferner die entsprechende Behauptung für $k-1$ bewiesen, so ist (3) für $M_k' = M_k^{a_k}$ trivial, und daß bei passendem $e_k = \pm 1$ auch $M_k' = U_k + \sqrt{-D}\, e_k V_k$ diese Eigenschaft hat, folgt wieder daraus, daß nach Hilfssatz 1 die Ideale

$$[\overline{U}_{k-1} U_k + D\overline{V}_{k-1} V_k,\ \overline{U}_{k-1} V_k - \overline{V}_{k-1} U_k],$$
$$[\overline{U}_{k-1} U_k - D\overline{V}_{k-1} V_k,\ \overline{U}_{k-1} V_k + \overline{V}_{k-1} U_k]$$

den größten gemeinsamen Teiler $[M_1^{a_1} \dots M_k^{a_{k-1}}]$ und das Produkt $[M, M_k^{2a_k}]\,[M_1^{2a_1} \dots M_{k-1}^{2a_{k-1}}] = [M_1^{2a_1} \dots M_{k-1}^{2a_{k-1}} M_k^{a_k}]$ haben, so daß eins von ihnen gleich $[M_1^{a_1} \dots M_{k-1}^{a_{k-1}} M_k^{a_k}]$ sein muß. — Für $k = n$ ergeben sich also mit $\overline{U} = \overline{U}_n$, $\overline{V} = \overline{V}_n$ gerade die Gleichungen (1) und (2). Setzt man

$$\overline{U} + \sqrt{-D}\,\overline{V} = M(U' + \sqrt{-D}\,V'),$$

so ist demnach $U'^2 + D V'^2$ eine eigentliche Darstellung der Zahl M. Es genügt also zu zeigen, daß es 2^n nicht identische Darstellungen (von M^3) unter den $\overline{U}^2 + D\overline{V}^2$ gibt.

In der Tat, liegt ein zweites, ebenfalls unter (1) fallendes und von dem bisherigen formal verschiedenes Produkt $(U + \sqrt{-D}\,V)\, M_1'' \dots M_n''$ vor und ist

$$(U + \sqrt{-D}\,V)\, M_1' \dots M_n' = (U + \sqrt{-D}\,V)\, M_1'' \dots M_n'' (p + \sqrt{-D}\,q),$$
$$p^2 + D q^2 = 1,$$

so folgt (nach Weghebung gleicher Faktoren):

$$M_{k_1}^{\alpha_1 a_{k_1}} \dots M_{k_\varrho}^{\alpha_\varrho a_{k_\varrho}} = (U_{k_1} + \sqrt{-D}\, e_{k_1}' V_{k_1})^{\alpha_1} \dots (U_{k_\varrho} + \sqrt{-D}\, e_{k_\varrho}' V_{k_\varrho})^{\alpha_\varrho} (p + \sqrt{-D}\,q),$$
$$e_{k_r}'^2 = 1;$$

dabei durchläuft k_r die Indizes s mit $M_s' \neq M_s''$, und es ist $\alpha_r = 1$, wenn eine der Zahlen M_{k_r}', M_{k_r}'' den Wert $M_{k_r}^{a_{k_r}}$ hat, andernfalls $\alpha_r = 2$. Da die Zahlen $M_{k_1}, \dots, M_{k_\varrho}$ teilerfremd sind, so würde aus Relation (1) des Satzes 1 unmittelbar folgen

$$[M_{k_1}^{\alpha_1 a_{k_1}} \dots M_{k_\varrho}^{\alpha_\varrho a_{k_\varrho}}] = [U_{k_1}, V_{k_1}]^{\alpha_1} \dots [U_{k_\varrho}, V_{k_\varrho}]^{\alpha_\varrho} = \mathfrak{o};$$

für jedes s wäre also $M_s' = M_s''$, was der formalen Verschiedenheit der Ausgangsprodukte (1) widerspricht. Je zwei der durch (1) gegebenen Darstellungen sind also verschieden. Die Anzahl der Darstellungen von M ist also mindestens gleich der Anzahl der Produkte (1), womit die Behauptung nach Satz 3 bewiesen ist.

Wir geben jetzt den Beweis des allgemeinen Umkehrungssatzes an:

Satz 6. *Dafür, daß die Zahl $M = M_1^{a_1} M_2^{a_2} \dots M_n^{a_n}$, wo $[M, 2D] = \mathfrak{o}$ ist und die M_s $(s = 1, 2, \dots, n)$ verschiedene Primzahlen sind, durch die*

Form $x^2 + Dy^2$ genau $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)$-mal darstellbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Zahlen M_s^2 $(s = 1, 2, \dots, n)$ eigentlich darstellbar sind und die Zahl M wenigstens einmal darstellbar ist.

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst, daß die Bedingungen notwendig sind. Die Zahl M sei $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)$-mal darstellbar. Bezeichnet allgemein $f(k)$ die Anzahl der eigentlichen Darstellungen der Zahl k durch die Form $x^2 + Dy^2$, so wird

$$(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1) = \sum_{d^2|M} f\left(\frac{M}{d^2}\right).$$

Gemäß Satz 3 ist

$$f\left(\frac{M}{d^2}\right) \leqq 2^A = 2^{\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)}, \tag{1}$$

wo A die Anzahl der verschiedenen Primteiler der Zahl $\frac{M}{d^2}$ ist. Nach Hilfssatz 2 ist aber

$$(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1) = \sum_{d^2|M} 2^{\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)},$$

also für jedes d mit $d^2 \mid M$

$$f\left(\frac{M}{d^2}\right) = 2^{\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)}$$

Nun werde M in der Gestalt $N_1^2 N_2$ dargestellt, wo N_2 keinen quadratischen Teiler außer Einheiten hat. (Da die $[M_s]$ Primideale sind, so kann man N_1 und N_2 als Produkte der M_s annehmen.) Da die Zahl N_2 nach dem soeben Bewiesenen $2^{\psi(N_2)}$-mal eigentlich darstellbar ist, so folgt aus Satz 4, daß, wenn P eine in N_2 aufgehende Primzahl ist, die Zahl P^2 eigentlich darstellbar ist. Es sei nun zweitens p eine in N_1, aber nicht in N_2 aufgehende Primzahl. Die Zahl $p^2 N_2$ ist $2^{\psi(p^2 N_2)}$-mal eigentlich darstellbar. Multipliziert man eine beliebige eigentliche Darstellung der Zahl $p^2 N_2$ mit einer beliebigen eigentlichen Darstellung der Zahl N_2, so ergibt sich eine Darstellung $p^2 N_2^2 = u^2 + Dv^2$. Da alle in $p^2 N_2^2$ aufgehenden Primideale Hauptideale sind, so gilt dasselbe für das Ideal $[u, v]$. Durch Wegdividieren eines quadratischen Faktors ergibt sich also eine eigentliche Darstellung von $p^2 N_2'^2$, wo N_2' ein gewisser Teiler von N_2 ist. Es sei $N_2' = p_1' p_2' \dots p_g'$, wo die p_s' verschiedene Primzahlen sind. Da nun zwei eigentliche Darstellungen

$$p^2 N_2'^2 = r^2 + Dt^2,$$
$$p_g'^2 = R^2 + DT^2$$

existieren, so ergibt sich aus Hilfssatz 1, daß die Ideale

$$[rR + DtT,\ rT - tR], \quad [rR - DtT,\ rT + tR]$$

teilerfremd sind und das Produkt $[p^2 N_2'^2, p_g'^2] = [p_g'^2]$ haben, so daß eins von ihnen gleich $[p_g'^2]$ ist. Somit existiert eine Darstellung

$$p^2 N_2'^2 p_g'^2 = k^2 + D l^2$$

mit $[k, l] = [p_g'^2]$, aus der sich sofort eine eigentliche Darstellung von $p^2 p_1'^2 \dots p_{g-1}'^2$ ergibt. Fahren wir so fort, so erhalten wir eine eigentliche Darstellung der Zahl p^2.

2. Daß die Bedingungen hinreichend sind, ergibt sich folgendermaßen: Es sei das Quadrat jeder in M aufgehenden Primzahl durch die Form $x^2 + D y^2$ eigentlich darstellbar. Die Zahl M sei durch die Form $x^2 + D y^2$ darstellbar:

$$M = x^2 + D y^2, \quad [x, y] = [g],$$

wo g eine ganze Zahl des Körpers $\mathsf{K}(Q)$ ist. (Eine solche Zahl g existiert, da jeder Primidealteiler von M Hauptideal ist.) Ist d^2 ein quadratischer Teiler von $\frac{M}{g^2}$, so ist die ganze Zahl $\frac{M}{g^2 d^2}$ eigentlich darstellbar. Denn ist $\frac{M}{g^2} = d^2 M'$, $d = p_1 p_2 \dots p_r$, wo die p_s Primzahlen sind, so ist

$$\frac{M}{g^2} = p_1^2 p_2^2 \dots p_r^2 M'.$$

Da $\frac{M}{g^2}$ und p_r^2 eigentlich darstellbar sind, gilt dasselbe (vgl. die obigen Schlüsse) für $p_1^2 p_2^2 \dots p_{r-1}^2 M'$, usw. So fortfahrend finden wir, daß die Zahl M' eigentlich darstellbar ist.

Es sei jetzt $M'' = \frac{M}{d^2}$, wo d eine ganze Körperzahl und d^2 M. Die Zahl M'' werde in der Gestalt $M_1''^2 M_2''$ dargestellt, wo M_2'' keinen quadratischen Teiler außer Einheiten hat. Dann ist M_2'' von der Gestalt $\frac{M}{g^2 d_1^2}$, demnach durch die Form $x^2 + D y^2$ eigentlich darstellbar. Ist p ein beliebiger Primteiler der Zahl M_1'' und geht p genau k-mal in M_1'' auf, so ist gemäß Satz 1 (siehe Fall 1 des Beweises) die Zahl $(p^2)^k$ eigentlich darstellbar, und da entweder $[p^{2k}, M_2''] = \mathfrak{o}$ oder $[p^{2k}, M_2''] = [p]$ ist, so folgt aus den Relationen (1) und (2) des Hilfssatzes 1, daß auch $p^{2k} M_2''$ eigentlich darstellbar ist. Denn sind

$$p^{2k} = u^2 + D v^2,$$
$$M_2'' = U^2 + D V^2$$

zwei eigentliche Darstellungen, so sind die Ideale

$$[uU + DvV, uV - vU], \quad [uU - DvV, uV + vU]$$

teilerfremd und haben das Produkt $\mathfrak{o}$ oder $[p]$, so daß eins von ihnen gleich $\mathfrak{o}$ und die entsprechende Darstellung von $p^{2k} M_2''$ eigentlich ist.

Multiplizieren wir $p^{2k} M_2''$ mit $\bar{p}^{2\bar{k}}$, wo $\bar{p} \neq p$ ist und $\bar{p}$ genau $\bar{k} (\geqq 1)$-mal in M_1'' aufgeht, so finden wir, analog wie eben, daß $\bar{p}^{2\bar{k}} p^{2k} M_2''$ eigentlich darstellbar ist. Fahren wir so fort, so erhalten wir eine eigentliche Darstellung der Zahl M''. Nach Satz 5 ist somit M'' mindestens (sogar genau) $2^{\psi(M'')}$-mal eigentlich darstellbar. Nach Hilfssatz 2 ist

$$\sum_{d^2 | M} 2^{\psi\left(\frac{M}{d^2}\right)} = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1).$$

Mindestens ebenso viele Darstellungen hat also die Zahl M (denn besteht für zwei Darstellungen $M = x^2 + D y^2$, $M = x_1^2 + D y_1^2$ die Relation $[x, y] \neq [x_1, y_1]$, so sind sie sicher nicht äquivalent). Gemäß Satz 3′ (erste Hälfte) ist aber diese Anzahl die höchst mögliche; daher ist sie auch die genaue Anzahl der Darstellungen der Zahl M.

Dritter Teil.

Wir geben nun einige Anwendungen der obigen Sätze.

Definition 7. *Mit $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ bezeichnen wir die unteren Grenzen der positiven Lösungen der Pellschen Gleichung $\alpha^2 - D\beta^2 = 1$ im reellen Körper $\mathsf{K}(Q)$.*

Hilfssatz 4. *Ist $\bar{\beta} \neq 0$ (siehe die obige Definition), so hat die Menge der Zahlen α (bzw. β), aus den positiven Lösungen der Pellschen Gleichung $\alpha^2 - D\beta^2$ $(D > 0)$ im Körper $\mathsf{K}(Q)$, keine endliche Häufungsstelle.*

Beweis. Hätten die Zahlen α (bzw. β) eine endliche Häufungsstelle, so hätten auch die Zahlen β (bzw. α) eine endliche Häufungsstelle. Denn ist α' (bzw. β') eine Häufungsstelle der Lösungen α (bzw. β), also für eine gewisse konvergente (sogar monotone) Folge α_n (bzw. β_n), wo $\alpha_n^2 - D\beta_n^2 = 1$ im Körper $\mathsf{K}(Q)$:

$$\lim \alpha_n = \alpha' \quad (\text{bzw. } \lim \beta_n = \beta'), \tag{1}$$

so hat man gleichzeitig für die entsprechenden Zahlen β (bzw. α) eine konvergente (mit α_n monotone) Folge:

$$\lim \beta_n = \beta' \quad (\text{bzw. } \lim \alpha_n = \alpha'), \qquad \alpha'^2 - D\beta'^2 = 1. \tag{1'}$$

Und zwar folgt dies unmittelbar aus der Tatsache, daß in der Gleichung $u^2 - D v^2 = 1$ die Größe v (bzw. u) eine stetige Funktion von u (bzw. v):

$$v = \sqrt{\frac{u^2 - 1}{D}} \quad (\text{bzw. } u = \sqrt{1 + D v^2})$$

ist. Nun sind die Zahlen

$$\alpha_n \alpha_{n+1} - D \beta_n \beta_{n+1}, \qquad \alpha_n \beta_{n+1} - \beta_n \alpha_{n+1}$$

Lösungen der Pellschen Gleichung:

$$(\alpha_n^2 - D\beta_n^2)(\alpha_{n+1}^2 - D\beta_{n+1}^2) = (\alpha_n\alpha_{n+1} - D\beta_n\beta_{n+1})^2 - D(\alpha_n\beta_{n+1} - \beta_n\alpha_{n+1})^2 =$$

Es ist aber für $n \to \infty$

$$\lim(\alpha_n\beta_{n+1} - \beta_n\alpha_{n+1}) = 0,$$

also $\bar{\beta} = 0$, w. z. b. w.

Bemerkung. Analog kann man diesen Satz auch für imaginäre Körper beweisen (d. h.: ist der Nullpunkt keine Häufungsstelle der Zahlen β, so haben diese Zahlen β keine Häufungsstelle).

Von Wichtigkeit ist die Frage, ob es reelle algebraische Körper und Formen $x^2 - Dy^2$ $(D > 0)$ gibt, für welche $\bar{\beta} \neq 0$ ist. Sie ist bejahend zu beantworten, und zwar gilt der folgende Satz.

Zusatz. *In einem beliebigen quadratischen Körper* $K(\sqrt{D})$, *wo* $D \not\equiv 1 \pmod 4$ *und kein Quadrat ist, hat die Pellsche Gleichung* $\alpha^2 - D\beta^2$ *nur rationale (ganzzahlige) Lösungen.*

Beweis. Falls

$$(a + b\sqrt{D})^2 - D(a_1 + b_1\sqrt{D})^2 = 1,$$

wo a, b, a_1, b_1 ganz-rational sind, so ist, da D kein Quadrat ist, auch

$$(a - b\sqrt{D})^2 - D(a_1 - b_1\sqrt{D})^2 = 1$$

und somit, gemäß der Eulerschen Identität,

$$(a^2 - Db^2 - D(a_1^2 - Db_1^2))^2 - D(2\sqrt{D}(ab_1 - ba_1))^2 = 1,$$

also

$$(a^2 - Db^2 - D(a_1^2 - Db_1^2))^2 - 4D^2(ab_1 - ba_1)^2 = 1;$$

also muß

$$ab_1 - ba_1 = 0$$

sein. Nehmen wir

$$a' = \frac{a}{d}, \quad b' = \frac{b}{d}; \quad a_1' = \frac{a_1}{d'}, \quad b_1' = \frac{b_1}{d'},$$

wo $d = (a, b)$, $d' = (a_1, b_1)$ an, so folgt aus

$$ab_1 - a_1b = dd'(a'b_1' - a_1'b') = 0,$$

da $(a', b') = (a_1', b_1') = 1$, daß

$$a' = a_1', \quad b' = b_1' \quad \text{oder} \quad a' = -a_1', \quad b' = -b_1'.$$

Somit ist

$$(a + b\sqrt{D})^2 - D(a_1 + b_1\sqrt{D})^2 = d^2(a' + b'\sqrt{D})^2 - Dd'^2(a' + b'\sqrt{D})^2$$
$$= (a' + b'\sqrt{D})^2(d^2 - Dd'^2) = 1;$$

aber das ist nur dann möglich, wenn $b' = 0$ ist; also ist

$$b = db' = \pm db_1' = \pm\frac{d}{d'}b_1 = 0, \quad b_1 = 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Definition 8. *Im reellen Körper* $\mathsf{K}(Q)$ *heißt eine Darstellung* $eM = x^2 - Dy^2$, *wo* $e = \pm 1$, $M > 0$ *und* $D > 0$ *ist, reduziert, wenn*

$$(1) \qquad 0 < |x| \leqq \sqrt{\frac{1}{2} M(\bar{\alpha} + e)}, \qquad 0 < |y| \leqq \sqrt{\frac{1}{2D} M(\bar{\alpha} - e)},$$

wobei sich $\bar{\alpha}$ *als die untere Grenze der positiven Lösungen der Pellschen Gleichung* $\alpha^2 - D\beta^2 = 1$ *bestimmt* (siehe Definition 7) *und* $\neq 1$ *angenommen wird.*

Satz 7 [erste Verallgemeinerung des Tschebyscheffschen Satzes (siehe Einleitung [8])]. *Jede Darstellung* $eM = x^2 - Dy^2$ $(x > 0,\ y > 0)$ [9]) *im reellen Körper* $\mathsf{K}(Q)$, *wo* $e = \pm 1$, $M > 0$ *und* $D > 0$, *ist, wenn nur* $\bar{\alpha} = 1$ (siehe Definition 7 und 8), *mit einer und, abgesehen vom Vorzeichen von* u *und* v, *nur einer reduzierten Darstellung* $eM = u^2 - Dv^2$ *„identisch".*

Beweis. 1. Daß es, in den durch (1) angegebenen Grenzen, mindestens eine Lösung gibt, zeigt sich folgendermaßen:

Ist $eM = x - Dy^2$ und ist (α, β) eine beliebige positive Lösung der Pellschen Gleichung im Körper $k(Q)$, so ist *im Falle* $e = -1$, wenn nur $x > 0$, $y > 0$,

$$(2) \qquad \alpha y - \beta x > \sqrt{D}\,\beta y - \beta x = \beta(\sqrt{D}\,y - x) > 0.$$

Ist v bei festen x, y die untere Grenze der Menge der Zahlen $(\alpha y - \beta x)$ und ist sie keine Zahl dieser Menge, so muß sie eine Häufungsstelle dieser Zahlen sein, etwa

$$\lim(\alpha_n y - \beta_n x) = v.$$

Bilden die Zahlen α_n eine unbeschränkte Menge, so tun es auch die Zahlen β_n, was aber unmöglich ist. Denn da die Zahlen $(\alpha_n y - \beta_n x)$, als konvergente Folge, eine beschränkte Menge bilden, so würde sich für eine etwaige Teilfolge n_ν der n mit $\beta_{n_\nu} \to \infty$ ergeben

$$\lim\left(\frac{\alpha_{n_\nu}}{\beta_{n_\nu}} y - x\right) = 0, \quad \text{also} \quad \lim \frac{\alpha_{n_\nu}}{\beta_{n_\nu}} = \frac{x}{y};$$

ferner folgt aus $\alpha_n^2 - D\beta_n^2 = 1$

$$\lim \frac{\alpha_{n_\nu}^2}{\beta_{n_\nu}^2} = D, \qquad \lim \frac{\alpha_{n_\nu}}{\beta_{n_\nu}} = \sqrt{D},$$

also $x^2 - Dy^2 = 0$, entgegen der Annahme, daß $M \neq 0$ ist.

---

[8]) P. L. Tschebyscheff, Journ. de Math. Ser. 1, 16 (1851), S. 257—261 oder Werke 1, S. 73—77.

[9]) Die Voraussetzung $x > 0$, $y > 0$ ist wegen $x - \sqrt{D}\,y = (p - \sqrt{D}\,q)(u - \sqrt{D}\,v)$, sobald $x + \sqrt{D}\,y = (p + \sqrt{D}\,q)(u + \sqrt{D}\,v)$, überflüssig.

Bilden die Zahlen β_n bzw. α_n eine beschränkte Menge, so folgt, daß sie mindestens *eine* endliche Häufungsstelle besitzen; das ist aber nur dann möglich (siehe Hilfssatz 4), wenn $\bar{\beta} = 0$ bzw. $\bar{\alpha} = 1$ ist, der Annahme entgegen.

Die Zahl v ist also ein Element der Menge $\alpha y - \beta x$. Die Darstellung $-M = u^2 - Dv^2$ $(u = \alpha x - D\beta y)$ im Körper $\mathsf{K}(Q)$ ist also zu der Darstellung $-M = x^2 - Dy^2$ äquivalent. Da die Menge der Zahlen α bzw. β nach Hilfssatz 4 keine endliche Häufungsstelle hat, so muß ihre untere Grenze $\bar{\alpha}$ bzw. $\bar{\beta}$ Element der Menge sein; somit liegen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ im Körper. Es ist nun

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} v - \bar{\beta} u &= \bar{\alpha}\alpha y - \bar{\alpha}\beta x - \bar{\beta}\alpha x + D\bar{\beta}\beta y \\ &= (\bar{\alpha}\alpha + D\bar{\beta}\beta) y - (\bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha) x,\end{aligned}$$

und da $\bar{\alpha}\alpha + D\bar{\beta}\beta$, $\bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha$ wieder eine im Körper gelegene positive Lösung der Pellschen Gleichung sind, so ist nach Definition von v

$$\bar{\alpha} v - \bar{\beta} u \geqq v, \tag{3}$$

demnach

$$\bar{\beta} u \leqq (\bar{\alpha} - 1) v, \tag{3'}$$

$$D\bar{\beta}^2 u^2 \leqq D(\bar{\alpha} - 1)^2 v^2, \tag{3''}$$

$$(\bar{\alpha}^2 - 1) u^2 \leqq (\bar{\alpha} - 1)^2 (u^2 + M). \tag{3'''}$$

Da $\bar{\alpha} \neq 1$ (also $\bar{\alpha} > 1$) angenommen wird, so ergibt sich

$$(\bar{\alpha} + 1) u^2 \leqq (\bar{\alpha} - 1)(u^2 + M), \tag{3^{IV}}$$

folglich

$$|u| \leqq \sqrt{\frac{\bar{\alpha} - 1}{2} M} = \sqrt{\frac{\bar{\alpha} + e}{2} M}. \tag{3^{V}}$$

Aus $Dv^2 = u^2 + M$ ergibt sich aber

$$v^2 \leqq \frac{1}{D}\left(\frac{\bar{\alpha} - 1}{2} M + M\right) = \frac{\bar{\alpha} + 1}{2D} M,$$

$$v \leqq \sqrt{\frac{\bar{\alpha} + 1}{2D} M} = \sqrt{\frac{\bar{\alpha} - e}{2D} M};$$

somit haben wir die Frage der Existenz entsprechender Lösungen mit der Eigenschaft (1) für den Fall $e = -1$ erledigt.

Wir erwägen jetzt den Fall $e = +1$.

Die Darstellung $M = u^2 - Dv^2$ sei so gewählt, daß sie der Darstellung $M = x^2 - Dy^2$ $(x > 0, y > 0)$ äquivalent ist und u den kleinstmöglichen positiven Wert hat. Eine solche Zahl u existiert, d. h. die untere Grenze u der wegen

$$\alpha x - D\beta y > \sqrt{D}\beta x - D\beta y = \sqrt{D}\beta(x - \sqrt{D} y) > 0 \tag{4}$$

positiven Zahlen $\alpha x - D\beta y$ ist einer dieser Zahlen gleich. Denn andernfalls wäre u eine (endliche) Häufungsstelle der Zahlen $\alpha x - D\beta y$:

$$\lim(\alpha_n x - D\beta_n y) = u, \tag{5}$$

für entsprechende α_n und β_n. Ist die Menge der Zahlen β_n unbeschränkt, so folgt aus (5), daß etwa

$$\lim \frac{\alpha_{n_\nu}}{\beta_{n_\nu}} = D\frac{y}{x}$$

ist, und da aus $\alpha_n^2 - D\beta_n^2 = 1$ die Relation

$$\lim \frac{\alpha_{n_\nu}}{\beta_{n_\nu}} = \sqrt{D}$$

folgt, so ergibt sich, daß

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{D}}, \qquad x = \sqrt{D}\, y$$

oder

$$M = x^2 - Dy^2 = 0,$$

— der Annahme entgegen. Ist die Menge der Zahlen β_n aber beschränkt, so ergibt sich, daß sie eine endliche Häufungsstelle hat, was wiederum nicht geht.

Die Zahl u ist also ein Element der Menge der Zahlen $\alpha x - D\beta y$. Wird $v = \alpha y - \beta x$ gesetzt, so ist

$$\begin{aligned}\bar\alpha u - D\bar\beta v &= \bar\alpha\alpha x - D\bar\alpha\beta y - D\bar\beta\alpha y + D\bar\beta\beta x \\ &= (\bar\alpha\alpha + D\bar\beta\beta)x - D(\bar\alpha\beta + \bar\beta\alpha)y\end{aligned}$$

und somit nach Definition von u

$$\bar\alpha u - D\bar\beta v \geqq u, \tag{6}$$

demnach

$$(\bar\alpha - 1)^2 u^2 \geqq D^2\bar\beta^2 v^2 = (\bar\alpha^2 - 1)(u^2 - M), \tag{6'}$$

$$(\bar\alpha - 1)u^2 \geqq (\bar\alpha + 1)(u^2 - M), \tag{6''}$$

$$u \leqq \sqrt{\frac{\bar\alpha + 1}{2}M} = \sqrt{\frac{\bar\alpha + e}{2}M}, \tag{6'''}$$

ferner

$$v^2 \leqq \frac{1}{D}\left(\frac{\bar\alpha + 1}{2}M - M\right) = \frac{1}{D}\,\frac{\bar\alpha - 1}{2}M,$$

$$|v| \leqq \sqrt{\frac{\bar\alpha - 1}{2D}M} = \sqrt{\frac{\bar\alpha - e}{2D}M}.$$

2. Wir zeigen jetzt, wenn $\bar\alpha, \bar\beta$ die unteren Grenzen der positiven Lösungen der Pellschen Gleichung sind, daß die soeben konstruierte Darstellung bis aufs Vorzeichen von u und v die einzig mögliche in den Grenzen (1)

ist. Wären $eM = u_1^2 - Dv_1^2$ und $eM = u_2^2 - Dv_2^2$ zwei verschiedene zu $eM = x^2 - Dy^2$ äquivalente Darstellungen mit $0 < |u_s| \leqq \sqrt{\frac{\bar{\alpha}+e}{2}M}$, $0 < |v_s| \leqq \sqrt{\frac{\bar{\alpha}-e}{2D}M}$ $(s = 1, 2)$ und wäre $0 < |v_2| < |v_1|$, so wäre etwa

$$(7) \qquad u_2 + \sqrt{D}\, v_2 = (u_1 + \sqrt{D}\, v_1)(p + \sqrt{D}\, q), \qquad p^2 - Dq^2 = 1.$$

Daraus würde folgen

$$v_2 = u_1 q + v_1 p = |u_1|e_1|q| + |v_1|e_2|p|,$$

wo $e_1^2 = e_2^2 = 1$, $|q| > 0$ und $|p| > 0$. Wegen $0 < |v_2| < |v_1|$ muß $e_1 = -e_2$ sein. *Nehmen wir* $e = -1$ *an*, so folgt, den Relationen (2) gemäß, daß

$$|p|\,|v_1| - |q|\,|u_1| > 0,$$

also

$$|v_2| = |p|\,|v_1| - |q|\,|u_1| < |v_1|,$$

somit (vgl. Relationen (3), (3′), (3″), (3‴), (3^{IV}) und (3^{V}))

$$|u_1| > \sqrt{\frac{|p|-1}{2}M},$$

und, da $|p| \geqq \bar{\alpha}$,

$$|u_1| > \sqrt{\frac{\bar{\alpha}-1}{2}M} = \sqrt{\frac{\bar{\alpha}+e}{2}M},$$

was mit der Annahme (1) im Widerspruch steht.

Es sei jetzt $e = 1$. Somit ist (siehe (7))

$$u_2 = u_1 p + Dv_1 q = |u_1|e_3|p| + D|v_1|e_4|q|,$$

wo $e_3^2 = e_4^2 = 1$, $|p| > 0$ und $|q| > 0$. Da $0 < |u_2| < |u_1|$ ist, so folgt, daß $e_3 = -e_4$ sein muß. Aus den Relationen (4) ergibt sich aber

$$|p|\,|u_1| - D|q|\,|v_1| > 0,$$

somit auch

$$|u_2| = |p|\,|u_1| - D|q|\,|v_1| < |u_1|.$$

Demnach folgt (siehe Relationen (6), (6′), (6″) und (6‴)), daß wieder

$$|u_1| > \sqrt{\frac{1}{2}M(|p|+1)} \geqq \sqrt{\frac{\bar{\alpha}+e}{2}M}$$

der Annahme (1) entgegen.

Satz 8 (mehrere verschiedene Verallgemeinerungen des Tschebyscheffschen Satzes). *Bezeichnet man im reellen Körper* $\mathsf{K}(Q)$ *zwei Darstellungen einer Zahl als „identisch" oder „äquivalent", wenn die zugehörigen reduzierten Darstellungen übereinstimmen, so gelten (im reellen algebraischen Zahlkörper mit* $\bar{\alpha} \neq 1$ (siehe Definition 5)) *wiederum alle bisherigen Sätze.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem vorigen Satze und den Eigenschaften der Äquivalenz.

Endlich geben wir noch eine Anwendung des Waring-Legendreschen Satzes auf den Körper der rationalen Zahlen.

Satz 9. *Es seien A, B, C ganze rationale Zahlen, B eine gerade Zahl, und $B^2 - 4AC$ sei kein Quadrat. Die quadratische Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ sei zur Hauptform $x^2 + \left(AC - \frac{B^2}{4}\right)y^2$ nicht äquivalent. Ist dann die natürliche Zahl M mindestens einmal durch die Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ darstellbar, so ist mindestens ein Primteiler der Zahl M durch die Hauptform nicht darstellbar.*

Beweis. Wären alle Primteiler von M durch die Hauptform darstellbar, so wäre M nach dem Waring-Legendreschen Satze so oft durch die Hauptform darstellbar, als die Formel WL angibt. Nach einem Dirichletschen Satz[10]) hat nun die Anzahl aller möglichen Darstellungen einer Zahl M durch alle Formenklassen einer und derselben Diskriminante den durch WL angegebenen Wert. Die Zahl M ist also *nur* durch die Hauptklasse darstellbar, entgegen der Voraussetzung.

---

[10]) Siehe Fußnote [6]) und auch: E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie 1 (1927), S. 144, Satz 204, oder S. 141, Satz 203, sowie Hilfssatz 2 dieser Arbeit.

(Eingegangen am 27. Juli 1929.)

Über die Klassenanzahl positiver binärer quadratischer Formen.

Von

B. A. Wenkov (Б. А. Венков) in Leningrad.

Einleitung.

L. Dirichlet hat in seiner Abhandlung: «Recherches sur diverses app cations de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres» (Werke, Bd. bemerkenswerte Formeln für die Klassenanzahl binärer quadratischer Form angegeben. Diese Ausdrücke waren schon Gauß bekannt (De nexu int multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuunt earumque determinantem, Werke, Bd. 2). Die Dirichletschen Formeln seh ganz verschieden aus, je nachdem die Determinante positiv oder negat ist. Aber in beiden Fällen war bis jetzt die Anwendung der Infinitesima rechnung der einzige Weg, diese tiefsten Eigenschaften der Klassenzahl erhalten. In der vorliegenden Arbeit[1]) wird ein rein arithmetischer u verhältnismäßig einfacher Beweis der Dirichletschen Formeln für diejenig Determinanten $-m$ gegeben, bei denen m positiv und von der For $4n+1$, $4n+2$ oder $8n+3$ ist. Außerdem werden wir voraussetze daß m durch keine Quadratzahl teilbar und von 1 und 3 verschieden i

I. Ist $m \equiv 1$ oder $2 \pmod 4$, so bezeichnen wir mit h die Anza der Klassen positiver, eigentlich primitiver Formen

$$(a, b, c) = a X^2 + 2b XY + c Y^2$$

der Determinante $b^2 - ac = -m$. Die bei Dirichlet-Dedekind (Vorlesung über Zahlentheorie, 1894, § 106) angegebenen Formeln können in diese Fall leicht folgendermaßen umgeformt werden:

$$h = \sum_a \left(\frac{-m}{a}\right). \tag{1}$$

[1]) Vorliegende Arbeit ist die Übersetzung meiner russischen Abhandlung, die den Nachrichten der Akademie der Wissenschaften der USSR., Math.-physik. Klasse 19 Nr. 4–7 erschienen ist.

Hier ist $\left(\frac{-m}{a}\right)$ das Jacobische Symbol und a durchläuft alle positiven ganzen Zahlen, die $< m$ und teilerfremd zu $2m$ sind.

II. Ist $m \equiv 3 \pmod 8$, so bezeichnen wir mit h die Klassenanzahl der uneigentlich primitiven Formen der Determinante $-m$; aus den Formeln §§ 97, 106 der Dirichlet-Dedekindschen Vorlesungen erhalten wir dann

$$h = \frac{1}{3} \sum \left(\frac{a}{m}\right), \tag{2}$$

wo a alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, die $< m$ und zu $2m$ teilerfremd sind. Beide Formeln (1) und (2) werden wir auf rein arithmetischem Wege beweisen. Auf diese Weise bleiben nur negative Determinanten von der Form $-(8n+7)$ ausgeschlossen, bei denen diese Methode nicht anwendbar ist.

§ 1.

Hilfssätze aus der Gaußschen Theorie der quadratischen Formen.

Hilfssatz I. *Eine quadratische Form φ, deren Determinante ein vollständiges Quadrat k^2 $(k > 0)$ ist, ist eigentlich äquivalent einer einzigen Form der Gestalt*

$$\varphi_0 = (a, -k, 0), \qquad 0 \leqq a < 2k$$

und es gibt nur zwei ganzzahlige lineare Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \varepsilon\alpha & \varepsilon\beta \\ \varepsilon\gamma & \varepsilon\delta \end{pmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

die φ_0 in φ überführen.

Demnach sind, wenn die Form φ gegeben ist, die Form φ_0 und gleichzeitig auch die Substitution, durch welche φ_0 in φ übergeht, eindeutig bestimmt (abgesehen vom gleichzeitigen Vorzeichenwechsel bei allen Koeffizienten der Substitution). Dieser Hilfssatz ist leicht zu folgern aus den Art. 206–210 der Gaußschen Disquisitiones Arithmeticae.

Hilfssatz II. *Die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl m* (siehe Einleitung) *durch die Form $x^2 + y^2 + z^2$ ist gleich $12h$ im Falle* I *und $24h$ im Falle* II.

Der Beweis im Art. 291 Disq. Arithm.

Es sei

$$kX^2 + 2lXY + k'Y^2 \tag{3}$$

eine gegebene positive Form, und der erste Koeffizient k durch keine Quadratzahl teilbar. Es sei PQ der größte gemeinsame Teiler von k, l und k'. Hier bedeutet P bzw. Q das Produkt derjenigen Primzahlen p, die in der

Determinante der Form (3) mit geradem Exponenten α bzw. ungeradem Exponenten β aufgehen; es sei ferner N das Produkt derjenigen Primzahlen, die in k und l, aber nicht in k' aufgehen. Wir setzen

$$k = PQNR, \quad kk' - l^2 = \Pi p^\alpha \Pi q^\beta NL. \tag{4}$$

Hier sind P, Q, R, N, L positiv und teilerfremd zueinander.

Hilfssatz III. *Damit die Form* (3) *als Summe von drei Quadraten ganzzahliger linearer Formen der Veränderlichen X, Y darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend:*

1. *Die Zahlen $-QNL$, $-PRL$, $-k'$ sind resp. quadratische Reste der Zahlen P, Q, N.*

2. *Jede ungerade Primzahl, die in L enthalten ist und für die $-k$ quadratischer Nichtrest ist, geht in L mit geradem Exponenten auf.*

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so ist die Anzahl S_l aller Darstellungen der Form (3) *als Summe dreier Quadrate gleich*

$$S_l = 24 \cdot 2^{(PQN)} \sum \left(\frac{-k}{\partial}\right),$$

wo (PQN) die Anzahl der verschiedenen ungeraden Primteiler von PQN bedeutet und die Summation sich über alle ungeraden Teiler ∂ der Zahl L erstreckt.

Beim Studium der Darstellungen der gegebenen binären Form $\varphi = (A, B, C)$ als Summe der drei Quadrate

$$(aX + a'Y)^2 + (bX + b'Y)^2 + (cX + c'Y)^2 \tag{5}$$

betrachtet Gauß zuerst *eigentliche* Darstellungen, d. h. diejenigen, in denen die Zahlen

$$bc - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba' \tag{6}$$

keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Für die Existenz solcher Darstellungen ist es notwendig und hinreichend, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Form φ ist primitiv.

2. Die Zahl $D = AC - B^2$ ist $\equiv 1, 2 \pmod 4$ oder $\equiv 3 \pmod 8$; im letzteren Fall muß φ uneigentlich primitiv sein.

3. Der Wert des Spezialcharakters von φ für jeden ungeraden Primteiler p von D ist gleich $\left(\frac{-1}{p}\right)$.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so ist die Anzahl der eigentlichen Darstellungen von φ gleich $24 \cdot 2^{(D)}$ (Disq. Arithm., artt. 289—290). Die Bedingung 2 kann (unter Berücksichtigung von 1 und 3) durch die folgende ersetzt werden: $D \not\equiv 0 \pmod 4$. In der Tat kann nicht $D \equiv 3 \pmod 4$ sein, wenn die Form φ eigentlich primitiv ist, da sonst das Produkt der

Spezialcharaktere von φ für die Primzahlen p', die in D mit ungeradem Exponenten enthalten sind, gleich

$$\Pi\left(\frac{-1}{p'}\right)=\left(\frac{-1}{D}\right)=-1$$

wäre, was der Beziehung, die die Spezialcharaktere untereinander haben, (Disq. Arithm., art. 263) widerspricht. Wenn die Form φ uneigentlich primitiv ist, so ist $D \equiv 3 \pmod 4$ und das Produkt der Spezialcharaktere, von dem soeben die Rede war, hat den Wert -1; folglich muß (Disq. Arithm., art. 264 II) $D \equiv 3 \pmod 8$ sein, q. e. d.

Endlich kann die Bedingung 3 (unter Berücksichtigung von 1) folgendermaßen umgeformt werden: Für jeden ungeraden Primteiler p von D soll $\left(\frac{-C}{p}\right)=+1$ oder $\left(\frac{-A}{p}\right)=+1$ sein, je nachdem p in A aufgeht oder nicht.

Wir kehren zu der gegebenen Form (3) zurück und setzen voraus, daß sie in der Gestalt (5) dargestellt und daß der größte gemeinsame Teiler der Zahlen (6) e sei. Dann erhalten wir $kk'-l^2=e^2D$, wo D ganz ist. Um alle Darstellungen, die zu demselben e gehören, zu ermitteln, hat Gauß folgende Methode angegeben (Disq. Arithm., art. 284):

Es sei $\varkappa > 0$, das alle Teiler von e durchläuft, $\mu=\frac{e}{\varkappa}$ und für jedes $\varkappa$ nehme λ die Werte $0, 1, 2, \ldots, \mu-1$ an. Durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varkappa} & -\frac{\lambda}{e} \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \tag{7}$$

gehe die Form (3) in die Form $\varphi=(A, B, C)$ der Determinante $-D$ über. Wenn es unter den Substitutionen (7) g solche gibt, für die die Form φ ganzzahlig und durch die Form $x^2+y^2+z^2$ eigentlich darstellbar ist, so ist die Anzahl der zu dem Teiler e gehörenden Darstellungen (3) gleich $24\cdot 2^{(D)}\cdot g$. Um die Anzahl S_l aller Darstellungen der Form (3) durch $x^2+y^2+z^2$ zu ermitteln, muß man die Summe $24\cdot\sum' 2^{(D)}\cdot g$ über alle Quadratteiler e der Zahl $kk'-l^2$ erstrecken. Da aber nach Voraussetzung k durch keine Quadratzahl teilbar ist, so ist $\varkappa=1$, $\mu=e$ und

$$A=k, \quad B=\frac{l-k\lambda}{e}, \quad C=\frac{k'-2l\lambda+k\lambda^2}{e^2}. \tag{8}$$

Wenn für gewisse e und λ die Form φ ganzzahlig wird und die Bedingung 1 befriedigt, so sieht man leicht ein, daß jede Primzahl r, die in allen Zahlen k, l, k' aufgeht, auch in e enthalten ist, und daß außerdem D durch r^2 nicht teilbar ist; das letztere folgt leicht aus der Gleichung $D=AC-B^2$. Umgekehrt enthält die Zahl e jeden gemeinsamen Prim-

teiler r der drei Zahlen k, l, k' und geht r^2 in $\frac{k k' - l^2}{e^2}$ nicht auf, so wird die Form φ, *wenn sie nur ganzzahlig ist*, auch primitiv sein.

Es haben die Zahlen $p, q, P, \ldots, L$ die frühere Bedeutung, und man schreibe

$$e = \Pi p^{\frac{\alpha}{2}} \Pi q^{\frac{\beta-1}{2}} \cdot e_1, \qquad L = e_1^2 L_1 \qquad (e_1, L_1 \text{ ganz})$$

und $D = QNL_1$. Die Bedingung 2 für die Form φ, nämlich $D \not\equiv 0 \pmod 4$ kann man durch die folgende ersetzen: $L_1 \not\equiv 0 \pmod 4$. Die Bedingung 3 zerfällt in die beiden folgenden:

3a. $-k$ ist quadratischer Rest von L_1,

3b. $-C$ ist quadratischer Rest von QN.

Da QN durch keine Quadratzahl teilbar und $D = AC - B^2$ ist, so kann man weiter die Bedingung 3b durch die folgende ersetzen:

$-PRL$ ist quadratischer Rest von QN. Endlich folgt aus (4), daß $-PRL$ und $-k'$ gleichzeitig quadratische Reste oder Nichtreste von N sind. Man sieht leicht ein, daß aus den angeführten Bedingungen keine Beschränkungen für λ folgen; sind diese Bedingungen erfüllt, so besitzt die Form φ, wenn ihre Koeffizienten sich ganzzahlig ergeben, eigentliche Darstellungen durch die Form $x^2 + y^2 + z^2$. Da der größte gemeinsame Teiler von k und e gleich PQ ist, so sind alle λ, für die der Koeffizient B ganz wird, in der Formel enthalten:

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{e}{PQ}\nu,$$

wo λ_0 der kleinste unter den λ's und $\nu = 0, 1, 2, \ldots, PQ - 1$ ist. Setzt man ferner

$$B_0 = \frac{l - k\lambda_0}{e},$$

so ist leicht zu sehen, daß der Koeffizient C gleichzeitig mit der Zahl

$$NR\frac{k' - 2l\lambda + k\lambda^2}{e^2} = \frac{(B_0 - NR\nu)^2 + D}{PQ}$$

ganz wird. Da D durch Q teilbar ist, so ist $B_0 - NR\nu \equiv 0 \pmod Q$, was den Rest $\nu \pmod Q$ bestimmt. Ferner ist es erforderlich, damit C ganz wird, daß $-D$ oder $-QNL$ quadratischer Rest von P ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so existieren $g = 2^{(P)}$ verschiedene Werte $\nu \pmod P$ und ebenso viele Substitutionen (7), bei denen die Form φ ganzzahlig ist und die Bedingungen 1, 2 und 3 befriedigt. Folglich ist $S_l = 24 \cdot 2^{(PQN)} \sum 2^{(L_1)}$, wo die Summe sich über solche Darstellungen $L = e_1^2 \cdot L_1$ $(e_1 > 0)$ erstreckt, bei denen $-k$ quadratischer Rest von L_1 und $L_1 \not\equiv 0 \pmod 4$ ist. Jetzt erhalten wir ohne Mühe den gesuchten Ausdruck für S_l.

§ 2.

Eine andere Darstellung für die Zahl S_l.

Der Ausdruck für S_l, der im Hilfssatz III gegeben wurde, kann jetzt folgendermaßen umgeformt werden. In der Zerlegung $k k' - l^2 = d\delta$ seien $d > 0$, $\delta > 0$ und ungerade, k, d, δ ohne gemeinsamen Teiler und für jede solche Zerlegung sei Δ der größte gemeinsame Teiler der Zahlen k und δ. Setzt man noch $k = \Delta \bar{k}$, so ist:

$$S_l = 24 \cdot \sum (-1)^{\frac{\Delta-1}{2} \cdot \frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{-d}{\Delta}\right)\left(\frac{-\bar{k}}{\delta}\right), \tag{9}$$

wo die Summe über alle Zerlegungen der oben definierten Art erstreckt ist. Da die Zahlen k, d, δ keinen gemeinsamen Teiler haben, so folgt (aus (4)), daß jede Potenz p^α, q^β nur in einem der Faktoren d oder δ aufgehen kann. Es seien die größten gemeinsamen Teiler der Zahlen d und δ mit jeder der Zahlen P, Q, N, L durch folgendes Schema gegeben:

	P	Q	N	L
d	r	t	v	d_0
δ	s	u	w	δ_0

Dann erhalten wir

$$P = rs, \quad Q = tu, \quad N = vw, \quad L = d_0 \delta_0,$$
$$\Delta = suw, \quad \bar{k} = \frac{PQNR}{suw} = rtvR.$$

Umgekehrt sind auch die Zahlen d, δ vollständig bestimmt, wenn die Zahlen $r, s, \ldots, d_0, \delta_0$ gegeben sind; daher kann die Summationsvorschrift in (9) auch so erfüllt werden, daß man s, u, w, δ_0 unabhängig voneinander alle ungeraden Teiler resp. von P, Q, N, L durchlaufen läßt. Da d und δ sich nur durch einen Quadratfaktor von tvd_0 und $uw\delta_0$ unterscheiden, so können wir den Ausdruck unter dem Summationszeichen in (9) folgendermaßen schreiben:

$$(-1)^{\frac{\Delta-1}{2} \cdot \frac{uw\delta_0-1}{2}} \left(\frac{-tvd_0}{\Delta}\right)\left(\frac{-k}{uw\delta_0}\right)$$

oder nach Vereinfachung

$$\left(\frac{-QNL}{s}\right)\left(\frac{-PRL}{uw}\right)\left(\frac{-k}{\delta_0}\right).$$

Folglich ist die Summe in (9) gleich

$$\prod\left(1+\left(\frac{-QNL}{p}\right)\right)\prod\left(1+\left(\frac{-PRL}{q}\right)\right)\prod\left(1+\left(\frac{-k'}{n}\right)\right)\sum\left(\frac{-k}{\delta_0}\right),$$

wo sich das erste Produkt über alle ungeraden p, das zweite über alle ungeraden q und das dritte über alle ungeraden Primteiler n der Zahl N

erstreckt. Hieraus folgt, daß die rechte Seite der Gleichung (9) gleich S_l ist, wenn die Bedingungen des Hilfssatzes III erfüllt sind, und gleich 0, wenn dies nicht der Fall ist. Bei Benutzung der Formel (9) ist es somit entbehrlich, die Bedingungen des Hilfssatzes III aufzuzählen.

Zusatz zum Hilfssatz III. Wenn in der Form (3) $k \equiv 3 \pmod 8$ und $S_l > 0$ ist, so ist die Zahl 2 in der Determinante dieser Form mit ungeradem Exponenten enthalten.

Anderenfalls könnte man setzen (vgl. die Bedingung 2 des Hilfssatzes III) $L = L_1 e^2$, wo L_1 ungerade und $-k$ quadratischer Rest von L_1 ist. Die Bedingungen des Hilfssatzes III und die Gleichung (4) ergeben dann, daß $-bc$, $-ca$, $-ab$ quadratische Reste resp. von a, b, c sind. Hier sind $a = QN$, $b = PR$, $c = L_1$ positiv, ungerade und teilerfremd zueinander. Aus dem Reziprozitätsgesetz folgt jetzt, daß die Produkte bc, ca und auch $ab = k$ entgegen der Voraussetzung von der Form $4n + 1$ sind.

Die Zahl l muß also, wenn $k \equiv k' \equiv 3 \pmod 8$ und $S_l > 0$ ist, ungerade sein, und man hat folglich $kk' - l^2 \equiv 0 \pmod 8$. In diesem Fall kann man die Formel (9) in folgender Weise umformen: Wir betrachten die Zerlegungen $kk' - l^2 = 8d\delta$, in denen $d > 0$, $\delta > 0$ ist und k, d, δ keinen gemeinsamen Teiler besitzen; dann ist

$$S_l = 24 \sum \left(\frac{d}{\Delta}\right)\left(\frac{-2\delta}{\bar{k}}\right), \tag{10}$$

wo die Summe über alle Zerlegungen der oben erklärten Art erstreckt ist und $\Delta, \bar{k}$ die frühere Bedeutung haben. Faßt man in der Formel (10) immer diejenigen Glieder zusammen, in denen die entsprechenden δ sich nur durch eine Potenz von 2 unterscheiden, so sieht man unter Verwendung des Zusatzes zum Hilfssatz III mühelos ein, daß die Formeln (9) und (10) denselben Wert für S_l liefern.

§ 3.

Beweis der Grundformeln.

Wir setzen in der Form (3) $k = k' = m$ (s. Einleitung) und betrachten folgende Summen:

$$\sigma = \sum S_l; \quad \sigma' = \sum' S_l,$$

wo l alle ganzen Zahlen durchläuft, die $\gtrless 0$ sind, dem absoluten Betrag nach kleiner als m sind und außerdem noch folgenden Bedingungen genügen:

für die Summe σ im Fall I $l \equiv m \pmod 2$, im Fall II $l \equiv \pm 3 \pmod 8$;

für die Summe σ' im Fall I $l \equiv m + 1 \pmod 2$, im Fall II $l \equiv \pm 1 \pmod 8$.

Die Summe σ ist die Anzahl der Systeme ganzer Zahlen

$$a, b, c; \quad a', b', c', \tag{11}$$

die der Gleichung

$$m = a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2$$

und noch folgenden Bedingungen

$$l = aa' + bb' + cc' \equiv m \pmod 2 \quad [\text{oder } \equiv \pm 3 \pmod 8]$$

und $|l| < m$ genügen. Aus der Identität

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) \tag{12}$$
$$= (aa' + bb' + cc')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2$$

folgt, daß für jedes System von 6 Zahlen (11) $|l| \leqq m$ ist. Die Gleichheit $|l| = m$ findet für $2 \cdot 12\,h$ [oder $2 \cdot 24\,h$] solcher Systeme statt (Hilfssatz II). Im Fall I sind in jeder Darstellung von m durch die Form $x^2 + y^2 + z^2$ ein Quadrat $\equiv m \pmod 2$ die beiden anderen $\equiv m + 1 \pmod 2$ und folglich ist $\sigma = 3(4\,h)^2 - 2 \cdot 12\,h = 24(2\,h^2 - h)$.

Im Fall II kann man die Bedingung $l \equiv \pm 3 \pmod 8$ durch $m^2 - l^2 \equiv 0 \pmod{16}$ ersetzen, was mit folgendem Kongruenzsystem gleichbedeutend ist (s. (12)):

$$bc' - cb' \equiv ca' - ac' \equiv ab' - ba' \equiv 0 \pmod 4$$

oder (da alle Zahlen a, b, c, a', b', c' ungerade sind) mit dem äquivalenten

$$a' : a \equiv b' : b \equiv c' : c \equiv \pm 1 \pmod 4.$$

Jetzt erhalten wir, daß im Fall II $\sigma = 24\,h \cdot 6\,h - 2 \cdot 24\,h = 24(6\,h^2 - 2\,h)$ ist. Die andere Summe σ' ist gleich $(12\,h)^2 - 48\,h^2 = 24 \cdot 4\,h^2$ im Fall I und gleich $(24\,h)^2 - 24 \cdot 6\,h^2 = 24 \cdot 18\,h^2$ im Fall II. Setzen wir in σ und σ' für S_t die Ausdrücke (9) und (10) ein, so erhalten wir schließlich: im Fall I

$$4\,h^2 = \sum (-1)^{\frac{l-1}{2} \cdot \frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{-d}{\Delta}\right)\left(\frac{-m}{\delta}\right), \quad l \equiv m + 1 \pmod 2, \tag{13}$$

$$2\,h^2 - h = \sum (-1)^{\frac{l-1}{2} \cdot \frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{-d}{\Delta}\right)\left(\frac{-m}{\delta}\right), \quad l \equiv m \pmod 2, \tag{14}$$

und im Fall II

$$6\,h^2 - 2\,h = \sum \left(\frac{d}{\Delta}\right)\left(\frac{-2\delta}{m}\right), \quad l \equiv \pm 3 \pmod 8, \tag{15}$$

$$18\,h^2 = \sum \left(\frac{d}{\Delta}\right)\left(\frac{-2\delta}{m}\right), \quad l \equiv \pm 1 \pmod 8. \tag{16}$$

In (13) und (14) erstreckt sich die Summation über alle Lösungen der Gleichung

$$m^2 = l^2 + d\delta \tag{17}$$

in ganzen Zahlen d, l, δ (δ ungerade), in (15) und (16) über alle Lösungen der Gleichung

$$m^2 = l^2 + 8d\delta. \tag{18}$$

In beiden Gleichungen sollen d, δ, l außerdem folgenden Bedingungen genügen:

$$l \gtrless 0, \quad d > 0, \quad \delta > 0; \quad d, l, \delta \text{ ohne gemeins. Teiler.} \tag{19}$$

Ferner ist Δ der größte gemeinsame Teiler von m und δ, und $m = \Delta \bar{m}$. Endlich muß l der Kongruenzbedingung genügen, die neben jeder der Gleichungen (13) bis (16) angeschrieben ist.

§ 4.

Umformung der Grundformeln.

Jedem System der Zahlen d, l, δ, die der Gleichung (17) und den Bedingungen (19) genügen, entspricht eine eigentlich primitive Form $(d, l, -\delta)$ der Determinante m^2; eine solche Form ist (nach Hilfssatz I) einer Form $(a, -m, 0)$ äquivalent. Hier liegt a zwischen den Grenzen 0 und $2m$ und ist zu $2m$ teilerfremd. Es sei $\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \vartheta \end{pmatrix}$ die Substitution, die die zweite Form in die erste überführt. Dann können wir schreiben:

$$d = a\xi^2 - 2m\xi\zeta, \qquad \delta = 2m\eta\vartheta - a\eta^2, \tag{20}$$

$$\xi\vartheta - \eta\zeta = 1. \tag{21}$$

Aus den Ungleichungen $d > 0$, $\delta > 0$ folgt:

$$\frac{\zeta}{\xi} < \frac{a}{2m} < \frac{\vartheta}{\eta}.$$

Hierbei wurde $\xi > 0$ vorausgesetzt, und infolge von $\frac{\zeta}{\xi} < \frac{\vartheta}{\eta}$ und (21) gilt dann auch $\eta > 0$. Da $m \equiv 1, 2 \pmod 4$ ist, so erhalten wir mit Hilfe der Formeln (20) nach kurzer Rechnung

$$(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}\cdot\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{-d}{\Delta}\right)\left(\frac{-\bar{m}}{\delta}\right) = (-1)^{\vartheta+1}\left(\frac{-m}{a}\right). \tag{22}$$

Jeder Lösung l, d, δ der Gleichung (17) mit den dort angegebenen Bedingungen entspricht umkehrbar eindeutig ein Zahlensystem $a, \xi, \eta, \zeta, \vartheta$, für das

$$\xi > 0, \quad \eta > 0, \quad \frac{\zeta}{\xi} < \frac{a}{2m} < \frac{\vartheta}{\eta}, \quad \xi\vartheta - \eta\zeta = 1, \quad \eta \equiv 1 \pmod 2 \tag{23}$$

ist. Setzt man (22) in die rechten Seiten der Formeln (13) und (14) ein, so kann die Summationsvorschrift folgendermaßen erfüllt werden: Man summiert über alle irreduziblen Brüche der Gestalt $\frac{a}{2m}$, die zwischen 0

und 1 enthalten sind und bei festem $\frac{a}{2m}$ über alle Paare von Brüchen $\frac{\zeta}{\xi}$, $\frac{\vartheta}{\eta}$, die den Bedingungen (23) genügen, wobei ξ außerdem in (13) ungerade, dagegen in (14) gerade vorauszusetzen ist. Die Zusatzforderungen für ξ entsprechen den Bedingungen $l \equiv m+1 \pmod 2$ in (13) bzw. $l \equiv m \pmod 2$ in (14); es gilt nämlich allgemein $l+m \equiv d \pmod 2$, da δ ungerade ist. Wir betrachten jetzt folgende zahlentheoretische Funktionen des rationalen Argumentes r:

$$(24)\quad \psi(r) = \sum_{\xi,\eta \text{ unger.}} (-1)^{\zeta}, \quad \psi'(r) = \sum_{\xi \text{ ger.}} (-1)^{\vartheta+1}, \quad \psi''(r) = \sum_{\eta \text{ ger.}} (-1)^{\zeta}.$$

Hier erstreckt sich die Summation auf alle Paare $\frac{\zeta}{\xi}$, $\frac{\vartheta}{\eta}$, die außer den unter den Summenzeichen angeschriebenen Kongruenzen mod 2 noch den Bedingungen

$$\xi > 0, \quad \eta > 0, \quad \frac{\zeta}{\xi} < r < \frac{\vartheta}{\eta}, \quad \xi\vartheta - \eta\zeta = 1$$

genügen. Dann erhalten die Formeln (13) und (14) folgende Gestalt:

$$(25)\quad 4h^2 = \sum_a \left(\frac{-m}{a}\right) \psi\left(\frac{a}{2m}\right), \qquad 2h^2 - h = \sum_a \left(\frac{-m}{a}\right) \psi'\left(\frac{a}{2m}\right).$$

Berücksichtigt man nun, daß $\psi'(1-r) = \psi''(r)$ ist, und daß für zwei positive Zahlen a und a', deren Summe gleich $2m$ ist, $\left(\frac{-m}{a}\right) = \left(\frac{-m}{a'}\right)$ ist, so kann man die zweite Formel (25) auch schreiben

$$(25')\qquad 2h^2 - h = \sum_a \left(\frac{-m}{a}\right) \psi''\left(\frac{a}{2m}\right).$$

Auf den rechten Seiten der Gleichungen (25) und (25') durchläuft a alle zwischen 0 und $2m$ liegenden zu $2m$ teilerfremden Zahlen.

Im Fall II entspricht jeder Lösung der Gleichung (18) eine uneigentlich-primitive Form $(2d, l, -4\delta)$, welche der Form $(2a, -m, 0)$ äquivalent ist, wo a zwischen 0 und m liegt und teilerfremd zu m ist. Führt die Substitution $\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \vartheta \end{pmatrix}$ die zweite Form in die erste über, so ist:

$$(26)\qquad d = a\xi^2 - m\xi\zeta, \qquad 2\delta = m\eta\vartheta - a\eta^2.$$

Für die Brüche $\frac{\zeta}{\xi}$, $\frac{\vartheta}{\eta}$ erhalten wir analog dem vorhergehenden

$$(27)\qquad \xi > 0, \quad \eta > 0, \quad \frac{\zeta}{\xi} < \frac{a}{m} < \frac{\vartheta}{\eta}, \quad \xi\vartheta - \eta\zeta = 1.$$

Aus der zweiten der Gleichungen (26) folgt:

$$(28)\qquad \eta(\vartheta + a) \equiv 0 \pmod 2.$$

Ferner folgt aus der Gleichung (18), daß $d\delta$ gerade oder ungerade ist, je nachdem $l \equiv \pm 3 \pmod 8$ oder $l \equiv \pm 1 \pmod 8$ ist; daher kann man die

Kongruenzbedingungen für l in (15) und (16) auch in der Form schreiben:

$$\xi(a\xi+\zeta)\cdot\eta(a\eta+\vartheta)\equiv 2i\,(\mathrm{mod}\,4), \tag{29}$$

wo für i in (15) bzw. (16) 0 bzw. 1 einzusetzen ist. Endlich ergibt (26) leicht

$$\left(\frac{d}{\Delta}\right)\left(\frac{-2\delta}{m}\right)=\left(\frac{a}{m}\right).$$

Folglich kann man jede der Summen in (15) und (16) durch $\sum\left(\frac{a}{m}\right)$ ersetzen, wo die Summation sich einerseits über alle a, die zwischen 0 und m liegen und zu m teilerfremd sind, erstreckt und andererseits bei festem a über alle Paare $\frac{\zeta}{\xi}$, $\frac{\vartheta}{\eta}$, die den Bedingungen (27), (28) und (29) genügen. In der Summe $\sum\left(\frac{a}{m}\right)$ betrachten wir die beiden Bestandteile, $S=\sum\left(\frac{a}{m}\right)$ mit ungeradem a, und $S'=\sum\left(\frac{a}{m}\right)$ mit geradem a gesondert. Der Zahl a und einem Bruchpaar $\frac{\zeta}{\xi}$, $\frac{\vartheta}{\eta}$, das (27) erfüllt, entspricht die Zahl $a'=m-a$ und das Paar

$$\frac{\zeta'}{\xi'}=\frac{\eta-\vartheta}{\eta},\qquad \frac{\vartheta'}{\eta'}=\frac{\xi-\zeta}{\xi},$$

für das wieder

$$\frac{\zeta'}{\xi'}<\frac{a'}{m}<\frac{\vartheta'}{\eta'},\quad \xi'\vartheta'-\eta'\zeta'=1,\quad \xi'=\eta>0,\quad \eta'=\xi>0$$

ist. Es ist leicht zu zeigen, daß bei Übergang von den $a, \xi, \eta\ldots$, zu $a', \xi', \eta'\ldots$, auch die Kongruenz (29) ihre frühere Form beibehält, während (28) in die Kongruenz $\xi'(\zeta'+a')\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$ übergeht. Wir wenden diese Umformung auf S' an und ersetzen die gestrichenen Buchstaben durch die ungestrichenen. Es ist dann $S'=-\sum\left(\frac{a}{m}\right)$, wo die Summation sich einerseits auf alle ungeraden a erstreckt, die zwischen 0 und m liegen und zu m teilerfremd sind, und andererseits bei festem a auf alle Paare von Brüchen $\frac{\zeta}{\xi}$, $\frac{\vartheta}{\eta}$, die den früheren Bedingungen (27) und (29) genügen, während (28) durch

$$\xi(\zeta+a)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2) \tag{30}$$

zu ersetzen ist. Bei ungeradem a ist nun die Bedingung (28) bzw. (30) mit $\vartheta\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)$ bzw. $\zeta\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)$ gleichbedeutend. Daher heben sich in der Summe $S+S'$ die Glieder von S mit ungeradem ζ und die Glieder von S' mit ungeradem ϑ gegenseitig auf. Es bleiben in S nur die Glieder mit $\vartheta\equiv 1$, $\zeta\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$, in S' die Glieder mit $\vartheta\equiv 0$, $\zeta\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)$ übrig, und man erhält folglich die Darstellung

$$S+S'=\sum\left(\frac{a}{m}\right)(-1)^{\zeta},$$

wo a und $\zeta + \vartheta$ ungerade und die Bedingungen (27) und (29) beibehalten sind. Bei geradem ζ ist $\xi(a\xi + \zeta)$ ungerade, und statt (29) kann man auch schreiben: $\eta(a\eta + \vartheta) \equiv 2i \pmod 4$; von den beiden Zahlen η und $a\eta + \vartheta$ ist eine gerade und die andere ungerade, so daß die letzte Kongruenz dann und nur dann erfüllt ist, wenn entweder $\eta \equiv 2i \pmod 4$ oder $\vartheta \equiv (-1)^{i+1} a\eta \pmod 4$ ist. Genau in derselben Weise läßt sich das entsprechende Resultat für gerades ϑ erschließen.

Zusammenfassend können wir den Formeln (15) und (16) die Gestalt geben:

$$6h^3 - 2h = \sum \left(\frac{a}{m}\right)(-1)^{\zeta}, \tag{31}$$

$$18h^3 = \sum \left(\frac{a}{m}\right)(-1)^{\zeta}, \tag{32}$$

wo die Summation sich über alle a, die zwischen 0 und m liegen und zu $2m$ teilerfremd sind, erstreckt, und bei festem a über alle Paare $\frac{\zeta}{\xi}$, $\frac{\vartheta}{\eta}$, die den Bedingungen (27) und *einem* der vier Kongruenzenpaare

$$\begin{aligned} &\zeta \equiv 0 \pmod 2, && \eta \equiv 2i \pmod 4,\\ &\zeta \equiv 0 \pmod 2, && \vartheta \equiv (-1)^{i+1} a\eta \pmod 4,\\ &\vartheta \equiv 0 \pmod 2, && \xi \equiv 2i \pmod 4,\\ &\vartheta \equiv 0 \pmod 2, && \zeta \equiv (-1)^{i+1} a\xi \pmod 4 \end{aligned}$$

genügen. Hier ist für i in (31) bzw. (32) 0 bzw. 1 einzusetzen.

§ 5.

Die Ergänzungsumformung für den Fall II.

Für jede Zahl a, die zwischen 0 und m liegt und zu $2m$ teilerfremd ist, kann man die in denselben Grenzen liegende Zahl a' und die Einheit $\varepsilon = \pm 1$ so finden, daß $aa' \equiv \varepsilon \pmod{2m}$ ist. Wir setzen $aa' + km = \varepsilon$, wo k ganz ist, und betrachten die Substitution

$$y = \frac{k + a'x}{-a + mx},$$

durch die eine rationale Zahl x wieder in eine rationale Zahl y übergeht. Es seien x und x' zwei Zahlen, die durch diese Substitution in y und y' übergeführt werden; wenn der Punkt $\frac{a}{m}$ zwischen x und x' liegt, so liegt auch $\frac{a'}{m}$ zwischen y und y' und umgekehrt. Dies folgt aus der Beziehung

$$\left(y - \frac{a'}{m}\right)\left(y' - \frac{a'}{m}\right)\left(x - \frac{a}{m}\right)\left(x' - \frac{a}{m}\right) = \frac{1}{m^2}.$$

Es sei $\frac{\zeta}{\xi}, \frac{\vartheta}{\eta}$ ein beliebiges Paar von Brüchen, welches den Bedingungen (27)

genügt, und dieses Paar möge durch die oben angegebene Substitution in das Paar $\frac{\zeta'}{\xi'}, \frac{\vartheta'}{\eta'}$ übergehen, so daß

$$(33)\qquad \begin{aligned} -\zeta' &= k\xi + a'\zeta, & \vartheta' &= k\eta + a'\vartheta, \\ -\xi' &= -a\xi + m\zeta, & \eta' &= -a\eta + m\vartheta. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\xi' > 0, \quad \eta' > 0, \quad \xi'\vartheta' - \eta'\zeta' = \varepsilon$$

und nach einer früheren Bemerkung $\frac{\zeta'}{\xi'} < \frac{a'}{m} < \frac{\vartheta'}{\eta'}$ bzw. $\frac{\vartheta'}{\eta'} < \frac{a'}{m} < \frac{\zeta'}{\xi'}$, wenn $\varepsilon = +1$ bzw. $\varepsilon = -1$ ist. Umgekehrt entspricht jedem Paar $\frac{\zeta'}{\xi'}, \frac{\vartheta'}{\eta'}$, welches diesen Bedingungen genügt, vermöge der Gleichungen

$$(34)\qquad \begin{aligned} -\varepsilon\zeta &= k\xi' + a\zeta', & \varepsilon\vartheta &= k\eta' + a\vartheta', \\ -\varepsilon\xi &= -a'\xi' + m\zeta', & \varepsilon\eta &= -a'\eta' + m\vartheta', \end{aligned}$$

ein Paar $\frac{\zeta}{\xi}, \frac{\vartheta}{\eta}$, für das die Bedingungen (27) erfüllt sind. Man sieht aus (33) und (34) (k ist gerade, a und a' ungerade), daß die Kongruenzen

$$(35)\qquad \begin{aligned} &\zeta \equiv 0 \pmod 2, \quad \vartheta \equiv (-1)^{i+1} a\eta \pmod 4 \\ \text{oder}\quad &\vartheta \equiv 0 \pmod 2, \quad \zeta \equiv (-1)^{i+1} a\xi \pmod 4 \end{aligned}$$

für die Zahlen $a, \xi, \eta, \ldots$ folgenden Kongruenzen

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\zeta' \equiv 0 \pmod 2, \quad \eta' \equiv 2i \pmod 4 \\ \text{oder}\quad &\vartheta' \equiv 0 \pmod 2, \quad \xi' \equiv 2i \pmod 4 \end{aligned}$$

für die Zahlen $a', \xi', \eta', \ldots$ äquivalent sind. Hier ist, wie früher, $i = 0$ für die Gleichung (31) und $i = 1$ für die Gleichung (32) zu nehmen. Im Falle $\varepsilon = -1$ ändern wir die Bezeichnungen so ab, daß in den beiden Fällen $\varepsilon = \pm 1$ gelten soll:

$$(37)\qquad \xi' > 0, \quad \eta' > 0, \quad \frac{\zeta'}{\xi'} < \frac{a'}{m} < \frac{\vartheta'}{\eta'}, \quad \xi'\vartheta' - \eta'\zeta' = 1.$$

Dann ist:

$$\sum (-1)^{\zeta} = \varepsilon \sum (-1)^{\zeta'},$$

wenn die linke Summe sich auf alle Brüche $\frac{\zeta}{\xi}, \frac{\vartheta}{\eta}$ mit den Bedingungen (27) und (35) erstreckt, die rechte Summe dagegen auf alle Brüche $\frac{\zeta'}{\xi'}, \frac{\vartheta'}{\eta'}$ mit den Bedingungen (37) und (36); die Zahlen a und a' sind dabei zunächst fest zu denken. Setzen wir in der letzten Gleichung $\varepsilon = \left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{a'}{m}\right)$ und summieren über alle a, die zwischen 0 und m liegen und zu $2m$ teilerfremd sind, so kommt

$$\sum \left(\frac{a}{m}\right)(-1)^{\zeta} = \sum' \left(\frac{a}{m}\right)(-1)^{\zeta},$$

wo auf der rechten Seite die für die Summation auf der linken Seite gültigen Bedingungen (35) durch

$$\begin{aligned} &\zeta \equiv 0 \pmod 2, \quad \eta \equiv 2i \pmod 4 \\ \text{oder} \quad &\vartheta \equiv 0 \pmod 2, \quad \xi \equiv 2i \pmod 4 \end{aligned} \tag{38}$$

ersetzt sind, während die Bedingungen (27) für beide Summen gleichmäßig gelten. Diese Beziehung erlaubt, die rechten Seiten der Formeln (31) und (32) zu vereinfachen. Es sei nämlich für jedes a, das zwischen 0 und m liegt und zu $2m$ teilerfremd ist,

$$\varphi_i\left(\frac{a}{m}\right) = \sum (-1)^{\zeta} \qquad (i = 0, 1),$$

wo die Summe sich über alle Brüche $\frac{\zeta}{\xi}, \frac{\vartheta}{\eta}$ mit den Bedingungen (27) und (38) erstreckt; dann können wir statt (31) und (32) schreiben:

$$\begin{aligned} 3h^2 - h &= \sum_a \left(\frac{a}{m}\right) \varphi_0\left(\frac{a}{m}\right), \\ 9h^2 &= \sum_a \left(\frac{a}{m}\right) \varphi_1\left(\frac{a}{m}\right), \end{aligned} \tag{39}$$

wo die Summation über alle a zu erstrecken ist, die zwischen 0 und m liegen und zu $2m$ teilerfremd sind.

§ 6.

Hilfssätze aus der Theorie der Kettenbrüche.

Es seien α und $\beta > \alpha$ zwei ganze Zahlen und $y = f(x)$ eine im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ stetige und beständig zunehmende Funktion, $x = F(y)$ die inverse Funktion und $a = [f(\alpha)]$, $b = [f(\beta)]$. Es findet dann die folgende Identität statt:

$$\sum_{x=\alpha+1, \alpha+2, \ldots, \beta} [f(x)] = b\beta - a\alpha - \sum_{y=a+1, a+2, \ldots, b} [F(y)] + s, \tag{40}$$

wo s die Anzahl der ganzen Zahlen in der Folge $f(\alpha+1), f(\alpha+2), \ldots, f(\beta)$ bedeutet. Es seien p, q positive ungerade Zahlen; aus der Identität (40) erhalten wir leicht:

$$\sum_{\nu=1,3,\ldots,p-2} \left[\frac{q\nu}{2p}\right] = \sum_{\mu=1,3,\ldots,q-2} \left[\frac{p\mu}{2q}\right]. \tag{41}$$

Setzen wir ferner in (40) $f(x) = \frac{q(2x-1)}{4p}$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{p-1}{2}$, so ist $s = 0$, $a = \left[-\frac{q}{4p}\right]$, $b = \left[\frac{q}{4} - \frac{q}{2p}\right]$ und

$$\sum_{\nu=1,3,\ldots,p-2} \left[\frac{q\nu}{4p}\right] = \frac{p-1}{2} b - \sum_{y=a+1}^{b} \left[\frac{2py}{q} + \frac{1}{2}\right]. \tag{42}$$

Es ist $b = \left[\frac{q}{4} - \frac{q}{2p}\right] \leqq \left[\frac{q}{4}\right]$; wenn $b < \left[\frac{q}{4}\right]$ ist, so erhalten wir für jedes y zwischen $b+1$ und $\left[\frac{q}{4}\right]$ die Grenzen eingeschlossen

$$\frac{q}{4} - \frac{q}{2p} < y < \frac{q}{4}, \quad \frac{p-1}{2} < \frac{2py}{q} + \frac{1}{2} < \frac{p+1}{2},$$

d. h. $\left[\frac{2py}{q} + \frac{1}{2}\right] = \frac{p-1}{2}$. Ganz ähnlich folgt aus $a = \left[-\frac{q}{4p}\right] < 0$, daß für jedes y zwischen $a+1$ und 0, die Grenzen eingeschlossen, $\left[\frac{2py}{q} + \frac{1}{2}\right] = 0$ ist. Jetzt können wir die rechte Seite von (42) auch als

$$\frac{p-1}{2}\left[\frac{q}{4}\right] - \sum_{y=1}^{\left[\frac{q}{4}\right]} \left[\frac{2py}{q} + \frac{1}{2}\right]$$

schreiben. Wir setzen $\mu = q - 4y$; für $y = 1, 2, \ldots, \left[\frac{q}{4}\right]$ durchläuft μ alle Zahlen, die $\equiv q \pmod 4$ sind und zwischen 0 und q liegen. In der letzten Summe führen wir statt y die neue Veränderliche μ ein und erhalten endlich die folgende Beziehung:

$$(43) \qquad \sum \left[\frac{q\nu}{4p}\right] = \sum \left[\frac{p\mu}{2q}\right] \qquad \begin{matrix} (\nu = 1, 3 \ldots, p-2) \\ (0 < \mu < q;\ \mu \equiv q \pmod 4). \end{matrix}$$

Aus (41) und (43) erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$\left[\frac{q\nu}{4p}\right] + \left[\frac{q\nu}{4p} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{q\nu}{2p}\right]$$

noch die Relation

$$(44) \qquad \sum \left[\frac{q\nu}{4p} + \frac{1}{2}\right] = \sum \left[\frac{p\mu}{2q}\right] \qquad \begin{matrix} (\nu = 1, 3, \ldots, p-2) \\ (0 < \mu < q,\ \mu \equiv -q \pmod 4). \end{matrix}$$

Es seien $p > 0$ und $q > 0$ ungerade und teilerfremd. Wir betrachten folgende Summen:

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{\alpha+\gamma,\ \beta+\delta \text{ unger.}} (-1)^{\gamma}, \quad \varphi'\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{\beta,\delta \text{ unger.}} (-1)^{\gamma}, \quad \varphi''\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{\alpha,\gamma \text{ unger.}} (-1)^{\beta},$$

welche sich über alle Paare von Brüchen $\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\beta}$ mit den Bedingungen

$$(45) \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \frac{\gamma}{\alpha} < \frac{p}{q} < \frac{\delta}{\beta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

erstrecken. Wir setzen voraus $p > q > 1$ und können dann die gerade Zahl $k \geqq 2$ und die Einheit $\varepsilon = \pm 1$ so finden, daß $p = kq + \varepsilon r$ wird; dabei ist $q > r \geqq 1$ und r teilerfremd zu $2q$. Es sei zunächst $\varepsilon = +1$; es ist dann $k < \frac{p}{q} < \frac{\delta}{\beta}$, folglich $k \leqq \frac{\gamma}{\alpha}$, denn der Nenner eines zwischen $\frac{\gamma}{\alpha}$ und $\frac{\delta}{\beta}$ liegenden rationalen Bruches muß nach einem bekannten Satze

größer als α und β sein. Ist $\frac{\gamma}{\alpha} > k$, so liegt die Zahl $\frac{q}{r}$ zwischen den Brüchen

$$\frac{\gamma'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\delta - k\beta}, \qquad \frac{\delta'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\gamma - k\alpha},$$

welche auch den übrigen Bedingungen (45) genügen; gilt dagegen $\frac{\gamma}{\alpha} = k$, so ist $\alpha = 1$, $\gamma = k$, $\delta = k\beta + 1$, wo $\beta > 0$ und $< \frac{q}{r}$ ist. Wenn wir dies berücksichtigen, erhalten wir für den Fall $\varepsilon = +1$ folgende Beziehungen:

$$(46) \qquad \begin{aligned} \varphi\left(\tfrac{p}{q}\right) &= \left[\tfrac{q}{2r}\right] + \varphi\left(\tfrac{q}{r}\right), \quad \varphi''\left(\tfrac{p}{q}\right) = \varphi'\left(\tfrac{q}{r}\right), \\ \varphi'\left(\tfrac{p}{q}\right) &= \left[\tfrac{q}{2r} + \tfrac{1}{2}\right] - \langle r\rangle + \varphi''\left(\tfrac{q}{r}\right), \end{aligned}$$

wo $\langle r\rangle$ gleich 0 ist, wenn $r > 1$, und gleich 1, wenn $r = 1$ ist. Für den Fall $\varepsilon = -1$ erhalten wir in ähnlicher Weise

$$(47) \qquad \begin{aligned} \varphi\left(\tfrac{p}{q}\right) &= -\left[\tfrac{q}{2r}\right] - \varphi\left(\tfrac{q}{r}\right), \quad \varphi'\left(\tfrac{p}{q}\right) = -\varphi'\left(\tfrac{q}{r}\right), \\ \varphi''\left(\tfrac{p}{q}\right) &= -\left[\tfrac{q}{2r} + \tfrac{1}{2}\right] + \langle r\rangle - \varphi''\left(\tfrac{q}{r}\right). \end{aligned}$$

Wenn p und p_1 ungerade teilerfremde Zahlen sind und $p > p_1 > 1$ ist, so erhalten wir durch sukzessive Division eine Reihe von Gleichungen

$$(48) \qquad p_i = k_{i+1} p_{i+1} + \varepsilon_{i+1} p_{i+2}, \quad p_{\nu+1} = 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu - 1),$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ gleich ± 1, $p, p_1, \ldots, p_{\nu+1}$ ungerade und abnehmend, $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ gerade und $\geqq 2$ sind. Aus diesen Gleichungen folgt für $\frac{p}{p_1}$ die Kettenbruchentwickelung

$$\frac{p}{p_1} = k_1 + \cfrac{\varepsilon_1}{k_2 + \cfrac{\varepsilon_2}{k_3 + \ddots + \cfrac{\varepsilon_{\nu-1}}{k_\nu + \cfrac{\varepsilon_\nu}{p_\nu}}}},$$

wo die Teilnenner $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ gerade sind, dagegen p_ν ungerade und $\geqq 3$ ist. Aus den Beziehungen (46) und (47) erhalten wir:

$$\varphi\left(\tfrac{p}{p_1}\right) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 k_2 + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1 \varphi\left(\tfrac{p_1}{p_2}\right).$$

Wenn wir auch die übrigen Gleichungen, die dem Algorithmus (48) entspringen, hinschreiben, so erhalten wir, wenn wir die Glieder $\varphi\left(\frac{p_i}{p_{i+1}}\right)$ eliminieren und $\varphi\left(\frac{p_\nu}{p_{\nu+1}}\right) = \varphi\left(\frac{p_\nu}{1}\right) = 0$ berücksichtigen, folgende Gleichung:

$$(49) \qquad \varphi\left(\tfrac{p}{p_1}\right) = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_1 + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 k_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 k_3 + \ldots + \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{\nu-1} k_\nu + \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu p_\nu).$$

Betrachten wir jetzt die Funktion:

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\sum_{x=1,3,\ldots,p-2}\left[\frac{qx}{2p}\right];$$

mit Hilfe der Gleichung (41) erhalten wir:

$$f\left(\frac{p}{p_1}\right)=\frac{1}{8}(pp_1-\varepsilon_1 p_1 p_2)-\frac{1}{4}(p+p_1)+\frac{\varepsilon_1}{4}(p_1+p_2)+\frac{1-\varepsilon_1}{4}+\frac{1}{8}k_1+\varepsilon_1 f\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

und hieraus weiter

$$f\left(\frac{p}{p_1}\right)=\frac{1}{8}(pp_1-2p-2p_1+2)+\frac{1}{8}(k_1+\varepsilon_1 k_2+\ldots+\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{\nu-1}k_\nu+\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu p_\nu).$$

Durch Vergleich der letzten Beziehung mit der Gleichung (49) erhalten wir folgendes Resultat:

Hilfssatz A. *Es seien p und q positive, ungerade und teilerfremde Zahlen und die Summe*

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right)=\Sigma(-1)^\gamma$$

sei über alle Brüche $\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\beta}$ mit den Bedingungen

$$\alpha>0,\ \beta>0;\quad \frac{\gamma}{\alpha}<\frac{p}{q}<\frac{\delta}{\beta};\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1;\quad \alpha+\gamma,\beta+\delta \text{ unger.}$$

erstreckt; dann ist

$$(50)\qquad \varphi\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-2)(q-2)-\left[\frac{p}{2q}\right]+4\sum_{x=1,3,\ldots,p-2}\left[\frac{qx}{2p}\right].$$

Obgleich beim Beweis dieses Hilfssatzes $p>q$ vorausgesetzt wurde, bleibt er richtig, auch wenn $p<q$ ist.

Wir setzen ferner

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right)-\varphi'\left(\frac{p}{q}\right)-\varphi''\left(\frac{p}{q}\right)=U\left(\frac{p}{q}\right)$$

und erhalten aus den Gleichungen (46) und (47) für diese Funktion die Beziehung:

$$U\left(\frac{p}{p_1}\right)=\frac{1}{2}(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_1)+\varepsilon_1\langle p_2\rangle+\varepsilon_1 U\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

und hieraus folgt weiter

$$(51)\qquad U\left(\frac{p}{p_1}\right)=\frac{1}{2}(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_\nu-\varepsilon_1).$$

Es seien p und q teilerfremd, q gerade und $0<p<\frac{q}{2}$. Für die Funktionen ψ, ψ' und ψ'', welche durch die Formeln (24) definiert sind, erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)=\left[\frac{q}{2p}+\frac{1}{2}\right]+\varphi\left(\frac{q-p}{p}\right),\qquad \psi'\left(\frac{p}{q}\right)=\varphi'\left(\frac{q-p}{p}\right),$$

$$\psi''\left(\frac{p}{q}\right)=\left[\frac{q}{2p}\right]-\langle p\rangle+\varphi''\left(\frac{q-p}{p}\right).$$

Dann ist:

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) - \psi'\left(\frac{p}{q}\right) - \psi''\left(\frac{p}{q}\right) = \left[\frac{q}{2p} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{q}{2p}\right] + \langle p \rangle + U\left(\frac{q-p}{p}\right).$$

Wenn $p = 1$ ist, ist die rechte Seite auch gleich 1; es sei $p > 1$, und man entwickle $\frac{q}{p} > 2$ in einen Kettenbruch der Gestalt:

$$(52) \qquad k_1 + \frac{\varepsilon_1}{k_2} + \ddots + \frac{\varepsilon_\nu}{k_{\nu+1}},$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ gleich ± 1 sind, $k_1, k_{\nu+1}$ ungerade Zahlen $\geqq 3$, $k_2, k_3, \ldots, k_\nu$ gerade Zahlen $\geqq 2$ sind. Durch Anwendung der Formel (51) erhalten wir dann

$$(53) \qquad \psi\left(\frac{p}{q}\right) - \psi'\left(\frac{p}{q}\right) - \psi''\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu).$$

Es existiert folglich zwischen den Funktionen ψ, ψ' und ψ'' folgende Beziehung: Der Ausdruck $\psi - \psi' - \psi''$ ist stets gleich 0 oder 1. Um ein Kriterium zu erhalten, das zu entscheiden erlaubt, welcher von diesen beiden Fällen stattfindet, und das explizit die Elemente des Kettenbruchs (52) nicht enthält, betrachten wir den vorletzten Näherungsbruch dieses Kettenbruches

$$\frac{Q}{P} = k_1 + \frac{\varepsilon_1}{k_2} + \ddots + \frac{\varepsilon_{\nu-1}}{k_\nu}.$$

Vermöge der rekurrenten Beziehungen, die zwischen den Zählern und Nennern der Näherungsbrüche von $\frac{Q}{P}$ bestehen, ist es leicht, folgendes einzusehen: 1. die Zähler der Näherungsbrüche sind positiv und wachsen mit dem Index der Näherungsbrüche, folglich ist $(k_{\nu+1} \geqq 3)$ $q > 2Q$; 2. es ist $P \equiv \nu \pmod 2$.

Berücksichtigt man noch die folgende Gleichung:

$$pQ - qP = (-1)^\nu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu,$$

so kann man das Resultat (53) auch folgendermaßen aussprechen:

Hilfssatz B. *Es sei $q > 2$ eine gerade Zahl, p eine Zahl, die zwischen 0 und $\frac{q}{2}$ liegt und teilerfremd zu q ist, und p' eine in denselben Grenzen wie p liegende Zahl, die durch die Kongruenz*

$$pp' \equiv \varepsilon \pmod q, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

eindeutig bestimmt ist. Wir setzen noch:

$$\varepsilon_p = \varepsilon(-1)^{\frac{pp'-\varepsilon}{q}}.$$

Dann besteht zwischen den Funktionen ψ, ψ', ψ'', die durch die Formeln (24) *definiert sind, folgende Abhängigkeit*:

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) - \psi'\left(\frac{p}{q}\right) - \psi''\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1+\varepsilon_p}{2}.$$

Spezielle Fälle. Für $q \equiv 2 \pmod 4$ ist $\varepsilon_p = \left(\frac{-1}{pp'}\right)$; für $q \equiv 4 \pmod 8$ ist $\varepsilon_p = \left(\frac{-2}{pp'}\right)$.

Es seien, wie früher, p und q ungerade und teilerfremd. Wir betrachten die Brüche $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\beta}$ des Hilfssatzes A und bezeichnen durch $\varphi_{ij}\left(\frac{p}{q}\right)$ $(i, j = 0, 1)$ den Teil der Summe $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$, der über alle diejenigen Brüche erstreckt ist, für die

$$\gamma \equiv 2i, \quad \beta \equiv 2j \pmod 4 \quad \text{oder} \quad \delta \equiv 2i, \quad \alpha \equiv 2j \pmod 4$$

ist. Es zerfällt folglich die linke Seite der Gleichung (50) in vier Teile φ_{ij}; um die entsprechende Zerlegung der rechten Seite zu finden, benutzen wir die frühere Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q}$. Wir nehmen $p > q > 1$ an und setzen, wie früher, $p = kq + \varepsilon r$, k gerade, $\varepsilon = \pm 1$, $q > r \geqq 1$. Nach kurzer Rechnung erhalten wir dann:

$$(54)\quad \begin{cases} \text{A. } k \equiv 0 \pmod 4. & \varphi_{00}\left(\frac{p}{q}\right) = \varepsilon\left[\frac{q}{4r}\right] + \varepsilon\varphi_{00}\left(\frac{q}{r}\right), \\ & \varphi_{01}\left(\frac{p}{q}\right) = \varepsilon\left[\frac{q}{4r} + \frac{1}{2}\right] + \varepsilon\varphi_{10}\left(\frac{q}{r}\right), \\ & \varphi_{10}\left(\frac{p}{q}\right) = \varepsilon\varphi_{01}\left(\frac{q}{r}\right), \\ & \varphi_{11}\left(\frac{p}{q}\right) = \varepsilon\varphi_{11}\left(\frac{q}{r}\right). \\ \text{B. } k \equiv 2 \pmod 4. & \varphi_{00}\left(\frac{p}{q}\right) = \varepsilon\varphi_{01}\left(\frac{q}{r}\right), \\ & \varphi_{01}\left(\frac{p}{q}\right) = \varepsilon\varphi_{11}\left(\frac{q}{r}\right) \\ & \varphi_{10}\left(\frac{p}{q}\right) = \varepsilon\left[\frac{q}{4r}\right] + \varepsilon\varphi_{00}\left(\frac{q}{r}\right), \\ & \varphi_{11}\left(\frac{p}{q}\right) = \varepsilon\left[\frac{q}{4r} + \frac{1}{2}\right] + \varepsilon\varphi_{10}\left(\frac{q}{r}\right). \end{cases}$$

Wir setzen noch

$$\varphi_{00} + \varphi_{11} - \varphi_{01} - \varphi_{10} = V\left(\frac{p}{q}\right).$$

Aus den Formeln (54) ergibt sich dann:

$$(55)\qquad V\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{k}{2}}\varepsilon\left(\left[\frac{q}{4r}\right] - \left[\frac{q}{4r} + \frac{1}{2}\right]\right) + (-1)^{\frac{k}{2}}\varepsilon V\left(\frac{q}{r}\right).$$

Es haben jetzt k_i, ε_i dieselbe Bedeutung wie in (48) $(q = p_1,\ \varepsilon = \varepsilon_1)$, und es sei außerdem $(-1)^{\frac{k_i}{2}}\varepsilon_i = \eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ gesetzt; berücksichtigt man, daß

$$\left[\frac{p}{4q} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{p}{4q}\right] = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{\frac{k}{2}}\varepsilon\right) \tag{56}$$

ist, so folgt mit Hilfe von (55):

$$V\left(\frac{p}{p_1}\right) = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{p_\nu - 1}{2}}\eta_1\eta_2\ldots\eta_\nu - \frac{1}{2}\eta_1.$$

Die Einheit η_i kann aber in der Gestalt $(-1)^{\frac{p_{i-1}-1}{2} + \frac{p_{i+1}-1}{2}}$ dargestellt werden, daher ist

$$(-1)^{\frac{p_\nu - 1}{2}}\eta_1\eta_2\ldots\eta_\nu = (-1)^{\frac{pq-1}{2}}$$

und durch einen nochmaligen Gebrauch der Formel (56) gewinnen wir:

$$\varphi_{00}\left(\frac{p}{q}\right) - \varphi_{01}\left(\frac{p}{q}\right) - \varphi_{10}\left(\frac{p}{q}\right) + \varphi_{11}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{2}\left((-1)^{\frac{pq-1}{2}} - 1\right) + \left[\frac{p}{4q} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{p}{4q}\right]. \tag{57}$$

Um noch zwei Beziehungen zwischen den Funktionen φ_{ij} zu erhalten, setzen wir

$$\varphi_{00} - \varphi_{01} + \varphi_{10} - \varphi_{11} = S\left(\frac{p}{q}\right), \qquad \varphi_{00} + \varphi_{01} - \varphi_{10} - \varphi_{11} = T\left(\frac{p}{q}\right).$$

Dann können wir aus den Formeln (54) die folgenden Beziehungen ableiten:

$$S\left(\frac{p}{q}\right) = \varepsilon\left(\left[\frac{q}{4r}\right] - \left[\frac{q}{4r} + \frac{1}{2}\right]\right) + \varepsilon T\left(\frac{q}{r}\right),$$

$$T\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{k}{2}}\varepsilon\left[\frac{q}{2r}\right] + (-1)^{\frac{k}{2}}\varepsilon S\left(\frac{q}{r}\right).$$

Setzen wir jetzt

$$\sigma\left(\frac{p}{q}\right) = \sum\left(\left[\frac{q\nu}{4p}\right] - \left[\frac{q\nu}{4p} + \frac{1}{2}\right]\right), \qquad \tau\left(\frac{p}{q}\right) = \sum(-1)^{\frac{p\nu - 1}{2}}\left[\frac{q\nu}{2p}\right]$$
$$(\nu = 1, 3, \ldots, p-2),$$

so erhalten wir aus (43) und (44):

$$\sigma\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{k(q-1)}{4} + \frac{\varepsilon - 1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left((-1)^{\frac{q-1}{2}} - 1\right) + \varepsilon\tau\left(\frac{q}{r}\right),$$

$$\tau\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{2}\left((-1)^{\frac{k}{2}}\varepsilon - 1\right)\frac{q-1}{2} + (-1)^{\frac{k}{2}}\varepsilon\sigma\left(\frac{q}{r}\right).$$

Mit Hilfe dieser Formeln ist es leicht zu verifizieren, daß für die Funktionen

$$\bar{S}\left(\frac{p}{q}\right) = 2\sigma\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{1}{2}\left(p + (-1)^{\frac{q-1}{2}}\right) - \left[\frac{p}{2q}\right] - 1,$$

$$\bar{T}\left(\frac{p}{q}\right) = 2\tau\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{1}{2}\left(q + (-1)^{\frac{p-1}{2}}\right) + \left[\frac{p}{4q} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{p}{4q}\right] - 1$$

folgende Abhängigkeiten stattfinden:

$$\bar{S}\left(\frac{p}{q}\right) = \varepsilon\left(\left[\frac{q}{4r}\right] - \left[\frac{q}{4r} + \frac{1}{2}\right]\right) + \varepsilon\bar{T}\left(\frac{q}{r}\right),$$

$$\bar{T}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{k}{2}}\varepsilon\left[\frac{q}{2r}\right] + (-1)^{\frac{k}{2}}\varepsilon\bar{S}\left(\frac{q}{r}\right).$$

Folglich genügen die Funktionen $\bar{S}$ und $\bar{T}$ denselben rekurrenten Beziehungen wie die Funktionen S und T. Außerdem sieht man leicht aus der Definition dieser Funktionen, daß sie alle verschwinden, wenn das Argument die Form $\frac{p}{1}$ hat; folglich erhalten wir für $\frac{p}{q} \geqq 1$

$$S\left(\frac{p}{q}\right) = \bar{S}\left(\frac{p}{q}\right), \quad T\left(\frac{p}{q}\right) = \bar{T}\left(\frac{p}{q}\right).$$

Hierdurch gewinnen wir zwei Beziehungen zwischen den Funktionen φ_{ij}:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{00}\left(\frac{p}{q}\right) - \varphi_{01}\left(\frac{p}{q}\right) + \varphi_{10}\left(\frac{p}{q}\right) - \varphi_{11}\left(\frac{p}{q}\right) \\
&\qquad = 2\sigma + \frac{1}{2}\left(p + (-1)^{\frac{q-1}{2}}\right) - \left[\frac{p}{2q}\right] - 1, \\
&\varphi_{00}\left(\frac{p}{q}\right) + \varphi_{01}\left(\frac{p}{q}\right) - \varphi_{10}\left(\frac{p}{q}\right) - \varphi_{11}\left(\frac{p}{q}\right) \\
&\qquad = 2\tau + \frac{1}{2}\left(q + (-1)^{\frac{p-1}{2}}\right) + \left[\frac{p}{4q} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{p}{4q}\right] - 1,
\end{aligned} \tag{58}$$

wo statt $\sigma\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\tau\left(\frac{p}{q}\right)$ der Kürze halber σ und τ geschrieben ist. Endlich folgt die vierte Beziehung zwischen den φ_{ij} aus der Gleichung (50); wenn wir die Summe $\sum\left[\frac{qx}{2p}\right]$, welche auf der rechten Seite dieser Gleichung steht, mit ϱ bezeichnen, so können wir diese Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{00}\left(\frac{p}{q}\right) + \varphi_{01}\left(\frac{p}{q}\right) + \varphi_{10}\left(\frac{p}{q}\right) + \varphi_{11}\left(\frac{p}{q}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-2)(q-2) - \left[\frac{p}{2q}\right] + 4\varrho.
\end{aligned} \tag{59}$$

Aus (57), (58) und (59) ergibt sich jetzt:

$$\varphi_{00}\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{1}{8}(p-3)(q-3) + \frac{1}{8}\left(1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(1+(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right) - \left[\frac{p}{4q}\right] + \varrho + \frac{\tau+\sigma}{2},$$

$$\varphi_{01}\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{1}{8}(p-3)(q-1) + \frac{1}{8}\left(1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(1-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right) + \varrho + \frac{\tau-\sigma}{2},$$

$$\varphi_{10}\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{1}{8}(p-1)(q-3) + \frac{1}{8}\left(1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(1+(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right) - \left[\frac{p}{4q}+\frac{1}{2}\right] + \varrho + \frac{\sigma-\tau}{2},$$

$$\varphi_{11}\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{1}{8}(p-1)(q-1) + \frac{1}{8}\left(1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(1-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right) + \varrho - \frac{\sigma+\tau}{2}.$$

Berücksichtigt man endlich, daß für den reziproken Bruch $\frac{q}{p}$ die Beziehungen

$$\varphi_{00}\left(\frac{q}{p}\right) = \varphi_{00}\left(\frac{p}{q}\right) + \left[\frac{p}{4q}\right], \qquad \varphi_{10}\left(\frac{q}{p}\right) = \varphi_{01}\left(\frac{p}{q}\right),$$

$$\varphi_{01}\left(\frac{q}{p}\right) = \varphi_{10}\left(\frac{p}{q}\right) + \left[\frac{p}{4q}+\frac{1}{2}\right], \qquad \varphi_{11}\left(\frac{q}{p}\right) = \varphi_{11}\left(\frac{p}{q}\right)$$

gelten, so kann man folgenden Satz aussprechen:

Hilfssatz C. *Es seien p und q ungerade teilerfremde Zahlen und $0 < q < p$. Die Summe $\varphi\left(\frac{q}{p}\right)$, die im Hilfssatz* A *definiert war und nach diesem Hilfssatz den folgenden Wert hat:*

$$\varphi\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-2)(q-2) + 4\sum_{\nu=1,3,\ldots,p-2}\left[\frac{q\nu}{2p}\right],$$

zerfällt in die vier Summen $(i, j = 0, 1)$

$$\varphi_{ij} = \Sigma(-1)^{\gamma}, \qquad \gamma \equiv 2i, \quad \beta \equiv 2j \pmod 4 \quad \textit{oder}$$
$$\delta \equiv 2i, \quad \alpha \equiv 2j \pmod 4$$

und es gilt:

$$\varphi_{00}\left(\frac{q}{p}\right) = -\frac{1}{8}(p-3)(q-3) + \frac{1}{8}\left(1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(1+(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right) + \sum_{\nu \equiv p \pmod 4}\left[\frac{q\nu}{2p}\right] + \Sigma\left[\frac{q\nu}{4p}\right],$$

$$\varphi_{01}\left(\frac{q}{p}\right) = -\frac{1}{8}(p-1)(q-3) + \frac{1}{8}\left(1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(1+(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right) + \sum_{\nu \equiv -p \pmod 4}\left[\frac{q\nu}{2p}\right] + \Sigma\left[\frac{q\nu}{4p}\right],$$

$$\varphi_{10}\left(\frac{q}{p}\right) = -\frac{1}{8}(p-3)(q-1) + \frac{1}{8}\left(1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(1-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right) + \sum_{\nu \equiv p \pmod 4}\left[\frac{q\nu}{2p}\right] + \Sigma\left[\frac{q\nu}{4p}+\frac{1}{2}\right],$$

$$\varphi_{11}\left(\frac{q}{p}\right) = -\frac{1}{8}(p-1)(q-1) + \frac{1}{8}\left(1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(1-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right) + \sum_{\nu \equiv -p \pmod 4}\left[\frac{q\nu}{2p}\right] + \sum\left[\frac{q\nu}{4p}+\frac{1}{2}\right].$$

In jeder Gleichung ist die letzte Summe über $\nu = 1, 3, \ldots, p-2$ *erstreckt, die vorletzte über alle* $\nu > 0$ *und* $< p$ *mit dem angegebenen Rest* (mod 4).

§ 7.

Beweis der Dirichletschen Formeln.

Es sei mit $\bar{h}$ die rechte Seite der Formel (1) bzw. (2) bezeichnet. Aus (25) und (25′) erhalten wir

$$h = \sum_a \left(\frac{-m}{a}\right)\left\{\psi\left(\frac{a}{2m}\right) - \psi'\left(\frac{a}{2m}\right) - \psi''\left(\frac{a}{2m}\right)\right\},$$

wo a alle zwischen 0 und m liegenden, zu $2m$ teilerfremden Zahlen durchlaufen soll. Es sei a' eine in denselben Grenzen wie a liegende und aus der Kongruenz $aa' \equiv \pm 1 \pmod{2m}$ bestimmte Zahl; der Hilfssatz B gibt dann

$$h = \sum_a{}' \left(\frac{-m}{a}\right),$$

wo die Summation sich über diejenigen a erstreckt, für welche $\varepsilon_a = 1$ ist. Hier ist die Einheit ε_a gleich $\left(\frac{-1}{aa'}\right)$, wenn $m \equiv 1 \pmod 4$, und gleich $\left(\frac{-2}{aa'}\right)$, wenn $m \equiv 2 \pmod 4$ ist. Ist für irgendein a $\varepsilon_a = -1$, so gilt auch für die Zahl a' $\varepsilon_{a'} = -1$. Aus dem quadratischen Reziprozitätsgesetz und der Bedingung $\varepsilon_a = -1$ folgt leicht, daß für jedes solche Paar a, a' $\left(\frac{-m}{a}\right) + \left(\frac{-m}{a'}\right) = 0$ ist, so daß die Summe $\sum''\left(\frac{-m}{a}\right)$, wenn sie über die a mit der Bedingung $\varepsilon_a = -1$ erstreckt wird, gleich 0 ist. Folglich hat man $h = \bar{h}$, und die Formel (1) ist bewiesen. Mit Hilfe des Hilfssatzes A des § 6 ist es leicht, diese Umformung zu Ende zu führen, d. h. zu zeigen, daß die rechte Seite der Formeln (25) resp. $4\bar{h}^2$ und $2\bar{h}^2 - \bar{h}$ gleich sind, was wir der Kürze halber unterdrücken.

Durch Addition und Subtraktion der Formeln (39) erhalten wir:

$$(60)\qquad \begin{aligned} 12h^2 - h &= \sum\left(\frac{a}{m}\right)\left\{\varphi_0\left(\frac{a}{m}\right) + \varphi_1\left(\frac{a}{m}\right)\right\}, \\ 6h^2 + h &= \sum\left(\frac{a}{m}\right)\left\{\varphi_1\left(\frac{a}{m}\right) - \varphi_0\left(\frac{a}{m}\right)\right\}. \end{aligned}$$

In den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen können wir schreiben:

$$\varphi_0\left(\frac{a}{m}\right) + \varphi_1\left(\frac{a}{m}\right) = \varphi\left(\frac{a}{m}\right),$$

$$\varphi_1\left(\frac{a}{m}\right) - \varphi_0\left(\frac{a}{m}\right) = \varphi_{01}\left(\frac{a}{m}\right) + \varphi_{11}\left(\frac{a}{m}\right) - \varphi_{00}\left(\frac{a}{m}\right) - \varphi_{10}\left(\frac{a}{m}\right)$$

und durch Anwendung des Hilfssatzes C (§ 6) den Formeln (60) die folgende Gestalt geben:

$$12h^2 - h = \left(1 - \frac{m}{2}\right)\sum_a \left(\frac{a}{m}\right) a + \left(m - \frac{3}{2}\right)\sum_a \left(\frac{a}{m}\right) + 4\sum_{a,\nu} \left(\frac{a}{m}\right)\left[\frac{a\nu}{2m}\right],$$

(61)

$$6h^2 + h = \frac{3}{2}\sum_a \left(\frac{a}{m}\right) - \frac{1}{2}\sum_a \left(\frac{a}{m}\right) a + 2\sum_{a,\nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{a}{m}\right)\left[\frac{a\nu}{2m}\right].$$

Es bleibt nur noch der Wert der Summe

$$W = \sum_{a,\nu} \chi(\nu)\left(\frac{a}{m}\right)\left[\frac{a\nu}{2m}\right]$$

zu berechnen. Hier durchläuft a alle zwischen 0 und m liegenden und zu $2m$ teilerfremden Zahlen und ν unabhängig von a die Werte $1, 3, \ldots, m-2$; $\chi(\nu)$ ist gleich 1 oder $(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}$. Der Bestimmung dieser Summe schicken wir zwei Bemerkungen voraus.

Erste Bemerkung. Für $m \equiv 3 \pmod 8$ ist

$$\sum \left(\frac{a}{m}\right) a = m\bar{h}.$$

Der Beweis ist elementar.

Zweite Bemerkung. Für $m \equiv 3 \pmod 8$ ist

$$\sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{a}{m}\right) = \sum \left(\frac{a}{m}\right) = 3\bar{h}.$$

Bezeichnet man die Zahlen a mit a' oder a'', je nachdem $a \equiv 1$ oder $a \equiv -1 \pmod 4$ ist, so ergibt $x = \frac{a'+m}{4}$ bzw. $y = \frac{m-a''}{4}$ sämtliche zu m teilerfremde Zahlen, die zwischen $\frac{m}{4}$ und $\frac{m}{2}$ bzw. 0 und $\frac{m}{4}$ liegen. Folglich ist

$$\sum \left(\frac{a'}{m}\right) - \sum \left(\frac{a''}{m}\right) = \sum \left(\frac{x}{m}\right) + \sum \left(\frac{y}{m}\right) = 3\bar{h}.$$

Bezeichnen wir durch $\{z\}$ den gebrochenen Teil von z, d. h. die Differenz $z - [z]$; dann hat man

$$W = \frac{1}{2m}\sum_a \left(\frac{a}{m}\right) a \cdot \sum_\nu \chi(\nu)\nu - \sum_{a,\nu} \left(\frac{a}{m}\right)\left\{\frac{a\nu}{2m}\right\}\chi(\nu).$$

Es sei in der letzten Summe der Wert ν fest gewählt; betrachten wir die Summe $\sum \left(\frac{a}{m}\right)\left\{\frac{a\nu}{2m}\right\}$, welche dann nur über die a zu erstrecken ist: es fällt nicht schwer, diese Summe folgendermaßen umzuformen:

$$\sum_a \left(\frac{a}{m}\right)\left\{\frac{a\nu}{2m}\right\} = \frac{3\bar{h}}{2} + \frac{1}{2}\sum_x \left(\frac{x}{m}\right)\left\{\frac{x\nu}{2m}\right\},$$

wo x alle zwischen 0 und $2m$ liegenden und zu $2m$ teilerfremden Zahlen durchläuft. Es sei d der größte gemeinsame Teiler der Zahlen m und ν; wir setzen $m = dm'$, $\nu = d\nu'$ und erhalten, daß d und $2m'$ teilerfremd sind (m ist durch keine Quadratzahl teilbar). Bezeichnen wir mit y und z die kleinsten Reste von x resp. $\bmod 2m'$ und $\bmod d$, so können wir (für $d > 1$) schreiben:

$$\sum_x \left(\frac{x}{m}\right)\left\{\frac{x\nu}{2m}\right\} = \sum_y \left(\frac{y}{m'}\right)\left\{\frac{y\nu'}{2m'}\right\} \cdot \sum_z \left(\frac{z}{d}\right) = 0 .$$

Ist dagegen $d = 1$, so gilt nach der ersten Bemerkung

$$\sum_x \left(\frac{x}{m}\right)\left\{\frac{x\nu}{2m}\right\} = \left(\frac{\nu}{m}\right) \sum_x \left(\frac{x}{m}\right)\frac{x}{2m} = -2\bar{h}\left(\frac{\nu}{m}\right).$$

Folglich

$$\sum_a \left(\frac{a}{m}\right)\left\{\frac{a\nu}{2m}\right\} = \begin{cases} \frac{3\bar{h}}{2} & (m \text{ und } \nu \text{ nicht teilerfremd}), \\ \frac{3\bar{h}}{2} - \bar{h}\cdot\left(\frac{\nu}{m}\right) & (m \text{ und } \nu \text{ teilerfremd}). \end{cases}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\chi(\nu)$ und summiert über ν, so erhält man unter Benutzung der ersten und zweiten Bemerkung:

$$W = \frac{\bar{h}}{2}\sum_\nu (\nu - 3)\chi(\nu) + 3\bar{h}^2 = \begin{cases} \frac{1}{8}\bar{h}(m-1)(m-7) + 3\bar{h}^2 & (\chi(\nu) = 1), \\ \frac{1}{4}\bar{h}(m-7) + 3\bar{h}^2 & \left(\chi(\nu) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\right). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke setzen wir in die Formeln (61) ein und erhalten nach Vereinfachung

$$12h^2 - h = 12\bar{h}^2 - \bar{h}, \qquad 6h^2 + h = 6\bar{h}^2 + \bar{h}$$

und folglich $h = \bar{h}$. Die Formel (2) ist hiermit bewiesen.

Leningrad, 9. Oktober 1929.

(Eingegangen am 15. Oktober 1929.)

Zur Abelschen Integralgleichung.

Von

Rudolf Rothe in Berlin[1]).

Im Hinblick auf die immerhin spärliche Anzahl von Anwendungsbeispielen zur Lehre von den Integralgleichungen ist es vielleicht nicht unwillkommen, im folgenden einige weitere kennenzulernen. Freilich lassen sie sich auf die Abelsche Integralgleichung zurückführen, von der schon mehrere Anwendungsbeispiele bekannt sind; aber erstens entstammen sie einer technischen Fragestellung, sodann haben sie insbesondere den Vorteil, daß sich die auftretenden Quadraturen und unendlichen Reihen sämtlich explizite durch elementare Funktionen ausdrücken und numerisch verfolgen lassen.

1. Es mögen zunächst einige zum Teil bekannte Ergebnisse über die Abelsche Integralgleichung selbst,

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^\alpha} = f(x) \qquad (0<\alpha<1), \tag{1}$$

zusammengestellt werden; $\varphi(x)$ bedeutet die gesuchte, $f(x)$ eine gegebene reelle Funktion. Von dieser werde angenommen, sie sei in dem Bereiche der reellen Veränderlichen x,

$$0 < x \leqq X \qquad (X>0),$$

differenzierbar, und ihre Ableitung $f'(x)$ sei integrabel und beschränkt. Unter dieser Voraussetzung hat die Integralgleichung (1) die für $0 < x \leqq X$ stetige Auflösung

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_{z=0}^{x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}}. \tag{2}$$

Um die Differentiation nach x in dem uneigentlichen Integral – denn der Nenner verschwindet für $z = x$, und der Zähler ist für $z = 0$ nicht notwendig stetig — auszuführen, verwandle man das Integral durch die

[1]) Den wesentlichen Teil der folgenden Untersuchung habe ich am 18. Sept. 1929 auf dem fünften Deutschen Physiker- und Mathematikertage in Prag vorgetragen.

Einführung von $t = z/x$ zunächst in ein solches mit festen Grenzen ($t = 0$ und $t = 1$), erledige die Differentiation unter dem Integralzeichen, benutze wieder die ursprüngliche Integrationsveränderliche z und wende die Regel der unvollständigen Integration an. Dann läßt sich das Ergebnis bekanntlich in der von Goursat angegebenen Form schreiben

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(+0)}{x^{1-\alpha}} + \int_{z=0}^{x} \frac{f'(z)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}}\right). \tag{3}$$

Diese Lösung der Abelschen Integralgleichung (1) ist selbstverständlich sowohl an die Existenz des Grenzwertes $f(+0)$ als auch an die des Integrales gebunden, was wesentlich von dem Verhalten von $f'(z)$ bei $z = +0$ abhängt. Wenn $f'(+0)$ existiert und $f''(z)$ vorhanden ist, dann läßt sich die obige Lösung mittels unvollständiger Integration auch in der Form

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(+0)}{x^{1-\alpha}} + \frac{f'(+0)}{\alpha}x^{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_{z=0}^{x}(x-z)^{\alpha} f''(z)\,dz\right) \tag{3a}$$

schreiben. Unter entsprechenden Voraussetzungen für die höheren Ableitungen ist auch

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(+0)}{x^{1-\alpha}} + \frac{f'(+0)}{\alpha}x^{\alpha} + \frac{f''(+0)}{\alpha(\alpha+1)}x^{\alpha+1} + \cdots\right. \tag{3b}$$

$$\left. + \frac{f^{(\mu)}(+0)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\mu-1)}x^{\alpha+\mu-1} + \frac{1}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\mu-1)}\int_{z=0}^{x}(x-z)^{\alpha+\mu-1} f^{(\mu+1)}(z)\right)$$

Übrigens verschwindet $\varphi(x)$ identisch, wenn $f(x) \equiv 0$ ist für $0 < x \leqq X$; und $\varphi(x)$ ist nur dann auch bei $x = 0$ stetig, wenn $f(+0)$ den Wert Null hat. Dies ist z. B. nicht der Fall, wenn

$$f(x) \equiv c + 0 \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq X \tag{4}$$

konstant ist. In diesem Falle erhält man aus (3), wo jetzt das Integral identisch Null ist,

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\,\frac{c}{x^{1-\alpha}} \tag{5}$$

und im besonderen für $\alpha = {}^1/_2$

$$\varphi(x) = \frac{c}{\pi\sqrt{x}}. \tag{6}$$

Aus (3b) folgt unmittelbar, daß, wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion vom μ-ten Grade ist, die zugehörige Integralgleichung die Lösung

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}x^{\alpha}\left(\frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{\alpha} + \frac{f''(0)}{\alpha(\alpha+1)}x + \frac{f'''(0)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}x^2 + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{f^{(\mu)}(0)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\mu-1)}x^{\mu-1}\right)$$

hat; auch sie ist nur dann bei $x = 0$ stetig, wenn $f(0) = 0$ ist.

2. Im folgenden wird es sich um eine Integralgleichung von der Form

$$\int_{s=0}^{z}(x-s)^{\beta}\varphi(s)\,ds=f(x) \tag{7}$$

handeln, wo β eine beliebige reelle Zahl bedeutet, jedoch >-1.

Man betrachte zunächst den Fall, wo $f(x)$ *eine von Null verschiedene Konstante* bedeutet, die übrigens unbeschadet der Allgemeinheit gleich 1 angenommen werden kann, da andernfalls $\varphi(x)$ nur mit einem konstanten Faktor zu multiplizieren wäre. Man sieht leicht ein, daß die Integralgleichung (7) für $f(x)=1$ keine im Bereiche $0<x\leqq X$ stetige Lösung besitzen kann, wenn $\beta=0$ ist. Es werde daher $\beta\neq 0$ angenommen:

$$\int_{s=0}^{z}(x-s)^{\beta}\varphi(s)\,ds=1. \tag{8}$$

Nun sei $\mu>-1$ eine noch passend zu wählende Zahl, dann hat man

$$\int_{x=0}^{z}(z-x)^{\mu}\int_{s=0}^{x}(x-s)^{\beta}\varphi(s)\,ds\,dx=\int_{x=0}^{z}(z-x)^{\mu}\,dx=\frac{z^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

Auf die linke Seite wende man in bekannter Weise die Dirichletsche Formel für Doppelintegrale an:

$$\int_{x=a}^{y}\int_{y=a}^{b}F(x,y)\,dx\,dy=\int_{x=a}^{b}\int_{y=x}^{b}F(x,y)\,dx\,dy, \tag{9}$$

so erhält man

$$\int_{s=0}^{z}\varphi(s)\int_{x=s}^{z}(z-x)^{\mu}(x-s)^{\beta}\,dx\,ds=\frac{z^{\mu+1}}{\mu+1}. \tag{10}$$

Nun ist weiter das innere Integral wegen $\beta>-1$, $\mu>-1$ vorhanden, und zwar ist

$$\begin{aligned}\int_{x=s}^{z}(z-x)^{\mu}(x-s)^{\beta}\,dx&=(z-s)^{\mu+\beta+1}\int_{t=0}^{1}t^{\mu}(1-t)^{\beta}\,dt\\&=\frac{\Pi(\mu)\,\Pi(\beta)}{\Pi(\mu+\beta+1)}(z-s)^{\mu+\beta+1},\end{aligned} \tag{11}$$

wo $\Pi(x)$ die für alle von $-1,-2,\ldots$ verschiedenen Werte des Argumentes x erklärte Gaußsche Pifunktion bedeutet. Man wähle jetzt $\mu>-1$ so, daß

$$\mu+\beta+1=n \tag{12}$$

eine *ganze nicht negative Zahl* wird, was stets möglich ist. Dann geht die Formel (10) über in:

$$\int_{s=0}^{z}\frac{(z-s)^{n}}{n!}\varphi(s)\,ds=\frac{z^{\mu+1}}{\Pi(\mu+1)\,\Pi(\beta)}=\frac{z^{n-\beta}}{\Pi(n-\beta)\,\Pi(\beta)}.$$

Hieraus erhält man leicht im Bereiche $0 < s \leqq X$

$$\varphi(s) = \frac{1}{\Pi(\mu+1)\,\Pi(\beta)} \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} s^{\mu+1} = \frac{s^{\mu-n}}{\Pi(\mu-n)\,\Pi(\beta)}.$$

Berücksichtigt man (12), außerdem, daß

$$\Pi(\beta)\,\Pi(-\beta-1) = -\frac{\pi}{\sin\beta\pi} \tag{13}$$

ist, so findet man schließlich

$$\varphi(s) = -\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\frac{1}{s^{\beta+1}} \tag{14}$$

als einzig mögliche, für $0 < s \leqq X$ stetige Lösung der Integralgleichung (8). Man bestätigt auch leicht, daß die gefundene Funktion $\varphi(s)$ wirklich eine Lösung von (8) ist.

Dieses Ergebnis zeigt, daß die für die Abelsche Integralgleichung im Falle (4) nach der Goursatschen Formel (3) bestimmte Lösung auch dann noch zu Recht besteht, wenn der Exponent von $x - s$ nicht mehr zwischen -1 und 0 gelegen ist, sondern $\geqq 0$ ist.

3. Wir kehren nun zur Integralgleichung

$$\int_{s=0}^{x} (x-s)^{\beta}\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (\beta > -1) \tag{7}$$

zurück. Sie läßt sich dann leicht auf den Fall (1) zurückführen, wenn $f(x)$ im Bereiche $0 < x \leqq X$ genügend oft differenzierbar ist, und wenn man sich *zunächst auf solche Lösungen $\varphi(s)$ beschränkt, für die*

$$\lim_{s\to+0} s\,\varphi(s) = G \tag{15}$$

vorhanden ist. Wir werden uns später von dieser Voraussetzung frei machen.

Zunächst kann man durch $s = tx$ die Integralgleichung (7) in die Form

$$\int_{t=0}^{1} x^{\beta+1}(1-t)^{\beta}\varphi(tx)\,dt = f(x)$$

mit festen Grenzen bringen und nun die Differentiation nach x unter dem Integralzeichen ausführen. Man erhält

$$\int_{t=0}^{1} \left((\beta+1)\,x^{\beta}\varphi(tx) + x^{\beta+1}\varphi'(tx)\,t\right)(1-t)^{\beta}\,dt = f'(x),$$

und wenn man wieder s als Integrationsveränderliche benutzt:

$$\int_{s=0}^{x} \left(\frac{d}{ds}\frac{(x-s)^{\beta}s\varphi(s)}{x} + \beta(x-s)^{\beta-1}\varphi(s)\right)ds = f'(x).$$

Bei der Ausführung der Integration des ersten Teiles auf der linken Seite ist zu beachten, daß sie im allgemeinen nur über das einseitig offene Inter-

vall $0 < s \leqq X$ zu erstrecken ist. Man erhält somit unter der obigen Voraussetzung (15)

$$-x^{\beta-1}\lim_{s\to+0} s\varphi(s) + \beta\int_{s=0}^{x}(x-s)^{\beta-1}\varphi(s)\,ds = f'(x),$$

d. h. die Integralgleichung

$$(16)\quad \int_{s=0}^{x}(x-s)^{\beta-1}\varphi(s)\,ds = \frac{G}{\beta}x^{\beta-1} + \frac{1}{\beta}f'(x) = f_1(x) \quad (\beta > -1, \neq 0).$$

Jede Lösung $\varphi(s)$ der Integralgleichung (7) genügt unter der Voraussetzung (15) auch der Integralgleichung (16), in der der Exponent von $(x-s)$ um 1 erniedrigt ist.

Eine abermalige Differentiation würde auf die Integralgleichung

$$\int_{s=0}^{x}(x-s)^{\beta-2}\varphi(s)\,ds = \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta-1}\right)Gx^{\beta-2} + \frac{1}{\beta(\beta-1)}f''(x) = f_2(x)$$

führen, falls noch $\beta - 1 > 0$ ist. Man kann also, so fortfahrend, den Exponenten von $x-s$ weiter erniedrigen, bis er zwischen 0 und -1 gelegen ist, dann hat man den ursprünglichen Fall (1). Trifft dies nach ν Schritten zu, so daß $0 < \nu - \beta = \alpha < 1$ geworden ist, so hat man die *Abelsche* Integralgleichung

$$(17)\quad \int_{s=0}^{x}\frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^{\alpha}} = \frac{A}{x^{\alpha}} + Bf^{(\nu)}(x) = f_\nu(x)$$

mit

$$A = \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta-1}+\ldots+\frac{1}{\beta-\nu+1}\right)G,$$

$$B = \frac{1}{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-\nu+1)},$$

$$(15)\quad G = \lim_{s\to+0} s\varphi(s),$$

und jede Lösung von (7) genügt unter der Voraussetzung (15) auch der Abelschen Integralgleichung (17).

4. Aber der Schritt, der von (7) zu (16) geführt hat, ist nicht eindeutig umkehrbar. Denn durch rückwärtige Integration tritt in (7) auf der rechten Seite noch eine Integrationskonstante K dazu, die übrigens leicht zu

$$K = -f(+0)$$

bestimmt werden kann. Um also die Lösung $\varphi(s)$ der Integralgleichung (7) aus der von (16) zu erhalten, hat man im Hinblick auf die Linearität der Integralgleichung zu der Lösung $\varphi_1(s)$ von (16) noch die Lösung $\varphi_0(s)$ der Integralgleichung

$$\int_{s=0}^{x}(x-s)^{\beta}\varphi(s)\,ds = K = -f(+0)$$

hinzuzufügen, d. h. nach (14) die Funktion

$$\varphi_0(s) = \frac{\sin \beta\pi}{\pi} \frac{f(+0)}{s^{\beta+1}}. \tag{18}$$

Nimmt man an, daß bereits (16) eine Abelsche Integralgleichung sei, d. h. daß die in (17) auftretende ganze Zahl ν den Wert 1 habe, so kann man (16) nach der Goursatschen Formel (3) zu lösen versuchen:

$$\varphi_1(s) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\frac{f_1(+0)}{s^{1-\alpha}} + \int_{z=0}^{s} \frac{f_1'(z)\,dz}{(s-z)^{1-\alpha}} \right), \tag{19}$$

vorausgesetzt, daß sowohl der Grenzwert $f_1(+0)$ als auch das Integral existieren. Nach dem Vorstehenden hat man dann als Lösung von (16) wegen $\beta = 1 - \alpha$

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \varphi_1(s) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\frac{f(+0)}{s^{2-\alpha}} + \frac{f_1(+0)}{s^{1-\alpha}} + \int_{z=0}^{s} \frac{f_1'(z)\,dz}{(s-z)^{1-\alpha}} \right). \tag{20}$$

Man hat jedoch noch zu prüfen, ob die Voraussetzung

$$\lim_{s \to +0} s\varphi(s) = G \tag{15}$$

erfüllt ist. Nun ist

$$s\varphi(s) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} s^{\alpha} \cdot \left(\frac{f(+0)}{s} + f_1(+0) + \int_{z=0}^{s} \frac{f_1'(z)\,dz}{(1 - z/s)^{1-\alpha}} \right),$$

und also existiert G nur dann, wenn

$$f(+0) = 0 \tag{21}$$

ist, und es ist

$$G = 0. \tag{22}$$

Daher weiter

$$f_1(x) = \frac{1}{1-\alpha} f'(x)$$

$$\varphi_0(s) = 0,$$

$$\varphi(s) = \varphi_1(s) = \frac{\sin \alpha\pi}{(1-\alpha)\pi} \left(\frac{f'(+0)}{s^{1-\alpha}} + \int_{z=0}^{s} \frac{f''(z)\,dz}{(s-z)^{1-\alpha}} \right), \tag{23}$$

oder auch (vgl. (3a)):

$$\varphi(s) = \frac{\sin \alpha\pi}{(1-\alpha)\pi} \left(\frac{f'(+0)}{s^{1-\alpha}} + \frac{f''(+0)}{\alpha} s^{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_{z=0}^{s} (s-z)^{\alpha} f'''(z)\,dz \right). \tag{23a}$$

Dies ist also unter den gemachten Voraussetzungen die Lösung der Integralgleichung (7) für $\alpha = 1 - \beta$, $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$.

5. Wir gehen nun zu den eingangs erwähnten Beispielen über.

Die Ausflußmenge Q des Wassers in der Zeiteinheit aus einer durch eine gesuchte Kurve $x = \varphi(y)$, die x-Achse und den Pegelspiegel begrenzten Schützenöffnung soll eine gegebene Funktion $Q(h)$ des Pegelstandes h sein; $\varphi(y)$ werde dabei als eindeutige Funktion vorausgesetzt.

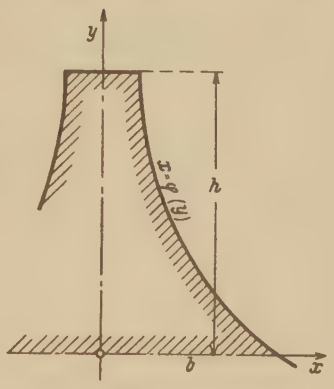

Fig. 1.

Nach dem Toricellischen Gesetze findet man leicht als Ansatz der Aufgabe eine Integralgleichung der Form

$$\mu\sqrt{2g}\int_{y=0}^{h}\sqrt{h-y}\,\varphi(y)\,dy = Q(h), \tag{24}$$

worin g die Beschleunigung der Erdanziehungskraft und μ eine Konstante oder eine empirisch bekannte, übrigens praktisch wenig veränderliche Funktion von h bedeuten. Für $Q(h)/\mu\sqrt{2g} = F(h)$ entsteht daraus

$$\int_{y=0}^{h}\sqrt{h-y}\,\varphi(y)\,dy = F(h), \tag{25}$$

eine Integralgleichung von der Form (7) für $\beta = {}^1/_2$ mit der Lösung (nach (23))

$$\varphi(y) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{F'(+0)}{\sqrt{y}} + \int_{z=0}^{y}\frac{F''(z)\,dz}{\sqrt{y-z}}\right), \tag{26}$$

falls nur $F(+0) = 0$ ist.

Den Wasserbauer interessiert besonders der Fall, wo $F(h)$ eine lineare Funktion von h, d. h. hier $F(h) = Ch$ proportional zu h ist. Dann wird aus (26)

$$\varphi(y) = \frac{2C}{\pi\sqrt{y}} \tag{27}$$

in Übereinstimmung mit (6). Man bemerke, daß $y\varphi(y) \to 0$ konvergiert, wie es sein muß. Aber diese Lösung ist technisch nicht brauchbar, weil $\varphi(y)$ für $y = 0$ nicht beschränkt bleibt, d. h. die gefundene Kurve $x = \varphi(y)$ die x-Achse in keinem Punkte schneidet.

6. Um dennoch die hier vorliegende Aufgabe praktisch lösen zu können, liegt der Gedanke nahe, den zur x-Achse asymptotischen Ast der Kurve (27) durch eine Parallele zur y-Achse abzuschneiden, etwa im Abstande b. Auf diese Weise wird unten an die durch die gesuchte Kurve $x = \varphi(y)$ begrenzte Schützenöffnung ein rechteckiger Auslaß von der Breite b und der

Höhe a $(0 < a \leqq h)$ stetig so angefügt, daß

$$b = \varphi(a) \tag{28}$$

ist.

Jetzt erhält man aber durch die Forderung, die Ausflußmenge (in der Zeiteinheit) durch den entstandenen Querschnitt soll eine gegebene Funktion der Flüssigkeitshöhe h sein, die Integralgleichung

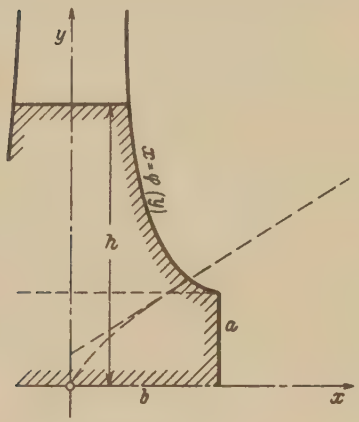

Fig. 2.

$$\int_{y=a}^{h} \sqrt{h-y}\,\varphi(y)\,dy = F(h) - \frac{2}{3}b(h^{3/2} - (h-a)^{3/2}). \tag{29}$$

Man kann sie durch die Umformungen (x bedeutet darin nicht die Abszisse in der Fig. 2)

$$\left\{\begin{aligned} y &= s + a, \\ h &= x + a, \\ \varphi(s+a) &= \psi(s), \\ F(x+a) &= G(x) \end{aligned}\right. \tag{30}$$

leicht auf die Gestalt

$$\int_{s=0}^{x} \sqrt{x-s}\,\psi(s)\,ds = G(x) - \frac{2}{3}b((x+a)^{3/2} - x^{3/2}) = f(x) \tag{31}$$

bringen. Um sie nach den in **3.** und **4.** angegebenen Verfahren zu lösen, hat man zuerst die Bedingung (21) zu erfüllen:

$$G(+0) = F(a+0) = \frac{2}{3}ba^{3/2}. \tag{32}$$

Danach liefert die Formel (23)

$$\frac{\pi}{2}\psi(s) = \frac{G'(+0) - b\sqrt{a}}{\sqrt{s}} - \frac{b}{2}\left(\int_{z=0}^{s} \frac{dz}{\sqrt{(s-z)(z+a)}} - \int_{z=0}^{s} \frac{dz}{\sqrt{(s-z)z}}\right) + \int_{z=0}^{s} \frac{G''(z)\,dz}{\sqrt{s-z}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(s-z)(z+a)}} = \arcsin\frac{2z-s+a}{s+a} + \text{konst.},$$

daher

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(s-z)z}} = \arcsin\frac{2z-s}{s} + \text{konst.}$$

Der Klammerausdruck nimmt demnach folgenden Wert an:

$$-\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{s-a}{s+a} = -2\,\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{s}{a}}.$$

Also wird

$$\frac{\pi}{2}\psi(s)=\frac{G(+0)-b\sqrt{a}}{\sqrt{s}}+b\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{s}}+\int_{z=0}^{s}\frac{G''(z)\,dz}{\sqrt{s-z}}, \tag{34}$$

und wenn man nach (30) wieder die ursprünglichen Größen einführt,

$$\frac{\pi}{2}\varphi(y)=\frac{F'(a+0)-b\sqrt{a}}{\sqrt{y-a}}+b\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{y-a}}+\int_{z=a}^{y}\frac{F''(z)\,dz}{\sqrt{y-z}}. \tag{35}$$

Man bemerke, daß $s\psi(s)\to 0$ konvergiert, wie es sein muß. In (35) durchläuft y den Bereich $a\leqq y\leqq h$.

Man hat nun noch die Anschlußbedingung (28) $b=\varphi(a)$ zu erfüllen. Die gefundene Formel (35) zeigt unmittelbar, daß diese dann und nur dann befriedigt wird, wenn

$$F'(a+0)=b\sqrt{a}, \tag{36}$$

also

$$\frac{\pi}{2}\varphi(y)=b\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{y-a}}+\int_{z=a}^{y}\frac{F''(z)\,dz}{\sqrt{y-z}} \tag{37}$$

ist, falls noch y auf den Bereich $a\leqq y\leqq h$ beschränkt wird.

7. Wir betrachten nun den technisch wichtigen Fall, wo $F(h)$ für $h\geqq a$ eine lineare Funktion der Pegelhöhe h ist:

$$F(h)=A_0+A_1h. \tag{38}$$

Wegen $F''(h)=0$ verschwindet das Integral in (37) identisch, und man hat

$$\frac{\pi}{2}\varphi(y)=b\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{y-a}}=b\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{a}{y}}. \tag{39}$$

Die gesuchte Kurve hat daher in diesem Falle die Gleichung

$$y=\frac{a}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{b}\right)}, \tag{40}$$

wobei $0<|x|\leqq b$ und $a\leqq y$ ist.

Die lineare Funktion $F(h)$ ist jedoch nicht willkürlich zu wählen, vielmehr sind die Gleichungen (32) und (36) zu befriedigen. Sie liefern zwischen den Festwerten a, b, A_0 und A_1 die Beziehungen

$$\begin{cases} A_0+A_1a=\frac{2}{3}ba^{3/2}, \\ A_1=b\sqrt{a}, \end{cases}$$

woraus sich

$$F(h)=b\sqrt{a}\left(h-\frac{a}{3}\right) \qquad (h\geqq a) \tag{41}$$

ergibt. Wenn daher die Koordinaten $x = b$, $y = a$ des Anschlußpunktes der gesuchten Kurve an den rechteckigen Teil des Ausflußquerschnittes gegeben sind, so ist damit die lineare Funktion $F(h)$ eindeutig bestimmt. Wenn andererseits diese Funktion vorgeschrieben ist, so sind damit auch die Koordinaten des Anschlußpunktes eindeutig bestimmt. Übrigens ist $F(h)$ nahezu der Ausflußmenge Q proportional; die lineare Abhängigkeit der Ausflußmenge von der Flüssigkeitshöhe gilt jedoch nur für $h \geqq a$, d. h. längs der Kurve (40), während für $0 \leqq h \leqq a$ die Ausflußmenge nahezu proportional mit $\frac{2}{3} b h^{3/2}$ ist. Das ergibt sich aus (29) sofort, wenn man für $\varphi(y)$ den festen Wert b einsetzt. In der Fig. 2 zeigt die Abszisse der punktierten Kurve eine zur Ausflußmenge proportionale Größe an; die Gerade (41) ist die Tangente dieser Kurve im Punkte $h = a$.

Es ist gewiß merkwürdig, daß die in Fig. 2 skizzierte technische Aufgabe bei gegebener linearer Abhängigkeit der Ausflußmenge nur dann eine Lösung zuläßt, wenn der rechteckig abgeschnittene Teil in ganz bestimmter Weise bemessen ist.

8. Diese Aufgaben sind in mannigfacher Weise verallgemeinerungsfähig; z. B. indem man in Fig. 2 die gerade Strecke a durch eine beliebige (eindeutige und stetige) gegebene Kurve $x = \chi(y)$ ersetzt. An Stelle der Integralgleichung (29) tritt dann die folgende:

$$(42) \qquad \int_{y=a}^{h} \sqrt{h-y}\,\varphi(y)\,dy = F(h) - \int_{y=0}^{a} \sqrt{h-y}\,\chi(y)\,dy,$$

in der (29) für $\chi(y) = b$ enthalten ist. Das Integral auf der rechten Seite ist jetzt eine bekannte Funktion von h. Indem man sich der Umformungen (30) bedient, kann man dieser Integralgleichung leicht die Gestalt

$$\int_{s=0}^{x} \sqrt{x-s}\,\psi(s)\,ds = G(x) - \int_{s=-a}^{0} \sqrt{x-s}\,\chi(s+a)\,ds = f(x)$$

geben. Die in 3. und 4. angegebenen Verfahren reichen aus, um unter den dort gemachten Voraussetzungen auch sie zu lösen. Wir wollen jedoch hierauf nicht näher eingehen, vielmehr ein anderes Lösungsverfahren der allgemeinen Integralgleichung (7) betrachten, das von der wesentlichsten jener Voraussetzungen, nämlich der Annahme der Existenz des Grenzwertes (15) $\lim_{s \to +0} s\,\varphi(s)$, frei ist.

9. Zu dem Ende übertrage man zunächst das in 2. benutzte Verfahren zur Lösung der Integralgleichung (8) fast wörtlich auf die Integralgleichung

$$(7) \qquad \int_{s=0}^{x} (x-s)^{\beta}\,\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (\beta > -1,\ \neq 0),$$

wo $f(x)$ eine im Bereiche $0 < x \leqq X$ hinreichend oft differenzierbare gegegebene Funktion sein soll. Es sei $\mu > -1$ eine noch passend zu wählende Zahl. Man multipliziere (7) beiderseits mit $(z-x)^{\mu}$, integriere in bezug auf x zwischen den Grenzen 0 und z, wende die Dirichletsche Formel (9) für Doppelintegrale an, so erhält man

$$\int_{s=0}^{z} \varphi(s) \int_{x=s}^{z} (z-x)^{\mu}(x-s)^{\beta}\, dx\, ds = \int_{x=0}^{z} (z-x)^{\mu} f(x)\, dx .$$

Die rechte Seite ist bei gegebenem $f(x)$ eine bekannte Funktion von z und μ, die mit $f(z,\mu)$ bezeichnet werden möge. Wendet man noch die Formel

$$(11) \qquad \int_{x=s}^{z} (z-x)^{\mu}(x-s)^{\beta} dx = \frac{\Pi(\mu)\,\Pi(\beta)}{\Pi(\mu+\beta+1)} (z-s)^{\mu+\beta+1}$$

an, und wählt man jetzt $\mu > -1$ so, daß

$$(12) \qquad \mu + \beta + 1 = n$$

eine *ganze nicht negative Zahl* wird, was stets möglich ist, so erhält man

$$(43) \qquad \int_{s=0}^{z} \frac{(z-s)^{n}}{n!} \varphi(s)\, ds = \frac{f(z,\mu)}{\Pi(\mu)\,\Pi(\beta)},$$

und hieraus leicht im Bereiche $0 < z \leqq X$ als Lösung der Integralgleichung (7)

$$(44) \quad \varphi(s) = \frac{1}{\Pi(\mu)\,\Pi(\beta)} \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} f(s,\mu) = \frac{1}{\Pi(\mu)\,\Pi(\beta)} \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} \int_{x=0}^{s} (s-x)^{\mu} f(x)\, dx .$$

Dieses Ergebnis ist eine Erweiterung der Formel (2), die aus (44) für $\beta = -\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, $\mu = \alpha - 1$, $n = 0$ wegen (13) oder

$$\Pi(\alpha)\,\Pi(1-\alpha) = \pi / \sin \alpha\pi$$

hervorgeht.

Aus (44) folgt unmittelbar, daß $\varphi(s) \equiv 0$ ist, wenn $f(s,\mu)$ eine ganze rationale Funktion von s ist, deren Grad die Zahl n nicht übersteigt.

10. Nun nehme man im besonderen $f(x) = x^{\lambda}$, betrachte also die Integralgleichung

$$(45) \qquad \int_{s=0}^{x} (x-s)^{\beta} \varphi(s)\, ds = x^{\lambda},$$

wo $\lambda > -1$ eine sonst beliebige reelle Zahl bedeuten soll. Dann hat man für $x = st$

$$f(s,\mu) = \int_{x=0}^{s} (s-x)^{\mu} x^{\lambda}\, dx = s^{\mu+\lambda+1} \int_{t=0}^{1} (1-t)^{\mu} t^{\lambda}\, dt = \frac{\Pi(\mu)\,\Pi(\lambda)}{\Pi(\mu+\lambda+1)} s^{\mu+\lambda+1}.$$

Aus (44) folgt jetzt weiter wegen

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} s^{\mu+\lambda+1} = \frac{\Pi(\mu+\lambda+1)}{\Pi(\mu+\lambda-n)} s^{\mu+\lambda-n}$$

als Lösung der Integralgleichung (45):

$$\varphi(s) = \frac{\Pi(\lambda)}{\Pi(\beta)\,\Pi(\mu+\lambda-n)} s^{\mu+\lambda-n},$$

oder im Hinblick auf (12):

$$\varphi(s) = \frac{\Pi(\lambda)}{\Pi(\beta)\,\Pi(\lambda-\beta-1)} s^{\lambda-\beta-1}, \tag{46}$$

jedoch mit der einschränkenden Bemerkung, daß $\varphi(s) \equiv 0$ ist, wenn $\mu+\lambda$ eine positive ganze Zahl und kleiner als n ist, d. h. wenn $\mu+\lambda$ eine positive ganze Zahl und $\lambda < \beta+1$ ist, oder auch: in (46) darf als Exponent von s keine negative ganze Zahl herauskommen. In diesem Falle würde übrigens auch $\Pi(\lambda-\beta-1)$ unendlich werden.

11. Es durchlaufe nun λ eine beliebige endliche oder auch unendliche Folge von reellen Zahlen, die jedoch sämtlich oberhalb (-1) gelegen sein sollen. Aus der Linearität der Integralgleichung (45) folgt jetzt, daß die Integralgleichung

$$\int_{s=0}^{x} (x-s)^{\beta} \varphi(s)\, ds = \sum_{\lambda} C_{\lambda} x^{\lambda} \tag{47}$$

die Lösung

$$\varphi(s) = \frac{1}{\Pi(\beta)} \sum_{\lambda} C_{\lambda} \frac{\Pi(\lambda)}{\Pi(\lambda-\beta-1)} s^{\lambda-\beta-1} \tag{48}$$

hat. Hierin bedeuten die C_{λ} Konstanten, und λ durchläuft bei der Summation die oben erwähnte Zahlenfolge; ist sie unendlich, so müssen die entstehenden Reihen nicht nur konvergieren, sondern sich in einem Integrationsbezirke gliedweise integrieren lassen. Außerdem müssen in $\varphi(s)$ diejenigen Glieder ausgelassen werden, in denen der Exponent von s eine negative ganze Zahl sein würde.

12. Wir wollen dieses sehr einfache Ergebnis auf die Integralgleichung (31) mit $F(h) = A_0 + A_1 h$ oder

$$G(x) = A_0 + A_1 a + A_1 x = A + Bx$$

anwenden:

$$\int_{s=0}^{x} \sqrt{x-s}\, \psi(s)\, ds = A + Bx - \frac{2}{3} b\left((x+a)^{3/2} - x^{3/2}\right). \tag{49}$$

Die rechte Seite läßt sich in der Form $\sum C_{\lambda} x^{\lambda}$ darstellen, denn man hat für $|x| < a$

$$(x+a)^{3/2} = a^{3/2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{x}{a} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \sum_{\lambda=3}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{3\cdot 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2\lambda-5)}{2^{\lambda}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 \ldots \lambda} \left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda}\right).$$

Demnach haben die Konstanten C_λ für $\lambda = 0, 1, {}^3/_2, 2$ die Werte

$$(50)\qquad \begin{cases} C_0 = A - \frac{2}{3} b a^{3/2}, \\ C_1 = B - b\sqrt{a}, \\ C_{3/2} = \frac{2}{3} b, \\ C_2 = -\frac{1}{4} b a^{-1/2} \end{cases}$$

und für $\lambda = 3, 4, 5, \ldots$

$$C_\lambda = (-1)^{\lambda-1} \cdot 2 b a^{3/2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\lambda - 5)}{2^\lambda \cdot \lambda!\, a^\lambda}.$$

Benutzt man die Formeln

$$\Pi(-{}^1/_2) = \sqrt{\pi}, \qquad \Pi(-{}^3/_2) = -2\sqrt{\pi}, \qquad \Pi(0) = \Pi(1) = 1,$$

$$\Pi(\lambda - {}^3/_2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\lambda - 3)}{2^\lambda} \cdot 2\sqrt{\pi} \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots),$$

so ergibt sich aus (48) für $\beta = {}^1/_2$

$$\pi \psi(s) = -C_0 s^{-3/2} + 2 C_1 s^{-1/2} + \pi b - 2 b \sum_{\lambda=2}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{2\lambda - 3} \left(\frac{s}{a}\right)^{\lambda - 3/2}.$$

Die hier auftretende Potenzreihe des Argumentes $(s/a)^{1/2}$ ist die für $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{s/a}$. Mithin erhält man

$$(51)\qquad \pi \psi(s) = -C_0 s^{-3/2} + 2 C_1 s^{-1/2} + 2 b \operatorname{arc\,tg} \sqrt{a/s}.$$

Dieses Ergebnis gilt zunächst nur für $|s| < a$. Da aber die Funktion für alle von Null verschiedenen Werte von s erklärt ist und der Integralgleichung (49) wirklich genügt, so stellt sie deren Lösung dar.

Sie stimmt mit der durch (34) bestimmten Funktion $\psi(s)$ wegen $G''(x) = 0$ überein bis auf das erste Glied, das dort infolge der damaligen Voraussetzung $\lim_{s \to +0} s\,\psi(s) = 0$ verschwinden mußte. Von dieser immerhin beschränkenden Voraussetzung ist die zuletzt eingeschlagene Methode frei.

Berlin, im März 1930.

(Eingegangen am 19. März 1930.)

Ein neues Analogon zum Satze von Desargues in Räumen von gerader Dimension.

Von

E. A. Weiss in Bonn a. Rh.

Poncelet hat als erster ein räumliches Analogon zum Satze von Desargues angegeben: Er betrachtet an Stelle zweier perspektiver Dreiecke in der Ebene zwei perspektive Tetraeder im Raume. Aber die perspektive Lage zweier Tetraeder ist eine in vieler Hinsicht zu spezielle Verallgemeinerung der perspektiven Lage zweier Dreiecke: Zwei Dreiecke, die zueinander in bezug auf einen Kegelschnitt polar sind, sind perspektiv. Zwei Tetraeder, die in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung polar sind, brauchen nicht perspektiv zu sein. Sie befinden sich in einer allgemeineren, der hyperboloidischen Lage: Die Verbindungslinien entsprechender Ecken und ebenso die Schnittlinien entsprechender Ebenen gehören je einem Regulus an (Chasles). Hiermit ist ein Satz gefunden, der sich nach Schläfli auf Räume beliebiger Dimension verallgemeinern läßt. Für den Schläflischen Satz hat L. Berzolari einen einfachen analytischen Beweis gegeben[1]). Er sagt, daß zwei zugeordnete Simplexe im $\mathfrak{R}_{n-1}$ sich als n-Ecke (und dual als n-Flache) „*in Schläflischer Lage*“ befinden, wenn das System der n Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Simplexe den Rang $n-1$ besitzt. Der Schläflische Satz kann dann so ausgesprochen werden: „Zwei Simplexe im $\mathfrak{R}_{n-1}$, die zueinander in bezug auf eine reguläre M^2_{n-2} polar sind, befinden sich als n-Ecke und n-Flache in Schläflischer Lage.“ Berzolari hat auch das folgende Analogon zum Satze von Desargues hinzugefügt: „Zwei Simplexe, die sich als n-Ecke in Schläflischer Lage befinden, befinden sich auch als n-Flache in Schläflischer Lage, und umgekehrt.“

[1]) L. Berzolari, Sui sistemi di $n+1$ rette dello spazio ad n dimensioni, situate in posizione di Schläfli. Rendiconti Palermo 20 (1905).

Im folgenden gehen wir der algebraischen Grundlage der besprochenen Analogien nach, finden invariante Beweise der genannten Sätze und geben in Räumen gerader Dimension ein neues Analogon zum Satze von Desargues, welches gleichzeitig dazu dient, die Beziehungen zweier Simplexe in Schläflischer Lage ausführlicher als bisher zu beschreiben. Die Zeichen, welche zur Behandlung des allgemeinen Falles dienen sollen, werden in einem einleitenden Abschnitt eingeführt, der die Sätze von Desargues und Chasles in eine für die folgende Verallgemeinerung geeignete Form kleidet.

1. Die Sätze von Desargues und Chasles.

Zwei zugeordnete Triangel vom Range 3 mit den Eckpunkten $p_1\, p_2\, p_3$; $q_1\, q_2\, q_3$ und den Seiten $a_1\, a_2\, a_3$; $b_1\, b_2\, b_3$ nennen wir *fremd*, wenn keine Seite des einen durch einen nicht-zugeordneten Punkt des andern läuft. Zwei fremde Triangel sind nach dem Satze von Desargues *„stets zugleich"* als Dreiecke und Dreiseite perspektiv. Setzt man nämlich:

$$(1) \qquad (b_1\, p_2)(b_2\, p_3)(b_3\, p_1) - (p_1\, b_2)(p_2\, b_3)(p_3\, b_1) = R_{123},$$

so wird:

$$(2) \qquad \boxed{\begin{aligned}(p_1\, q_1,\, p_2\, q_2,\, p_3\, q_3)\cdot(q_1\, q_2\, q_3) &= -\,R_{123},\\ (b_1\, a_1,\, b_2\, a_2,\, b_3\, a_3)\cdot(a_1\, a_2\, a_3) &= +\,R_{123},\end{aligned}}$$

so daß die Perspektivitätsbedingung sowohl für die beiden Dreiecke als auch für die beiden Dreiseite gleichzeitig durch das Verschwinden des Ausdruckes R_{123} gegeben wird[2]). Diesen Ausdruck nennen wir *Dreierring*.

Den Satz von Desargues in dieser Form zu beweisen, in der eines der beiden Triangel als Dreieck, das andere als Dreiseit auftritt, bietet zwei Vorteile. Erstens folgt ohne Rechnung der von Schläfli verallgemeinerte Satz: Zwei Triangel, die in bezug auf eine reguläre Kurve zweiter Ordnung $(l\, x)^2 = 0$ polar und dazu fremd sind, sind perspektiv. — Der Dreierring verschwindet, wenn man:

$$(3) \qquad b_i = l\,(l\, p_i); \qquad (b_i\, p_k) = (l\, p_i)(l\, p_k) = (p_i\, p_k)$$

einsetzt — und zweitens hat man beide Sätze unmittelbar im $\mathfrak{R}_{n-1}$. Es genügt zu diesem Zwecke, die p_i als Zeichen für Punkte, die b_i als Zeichen für $\mathfrak{R}_{n-2}$ im $\mathfrak{R}_{n-1}$ anzusehen und die durch Nullsetzen des Dreierringes entstehende Beziehung auf zwei zueinander duale Weisen zu deuten[3]).

[2]) In dieser Gestalt findet sich die Perspektivitätsbedingung bei E. Study, Einleitung in die Theorie der Invarianten .... Braunschweig (1923), S. 62.

[3]) Da es im binären Gebiete noch kein Dualitätsprinzip gibt, fehlt dort ein Analogon. Das Verschwinden des für zwei Tripel zugeordneter Punkte gebildeten Dreierringes besagt nur, daß die Paare entsprechender Punkte einer Involution angehören.

Man hat etwa im $\mathfrak{R}_3$: Ein Dreieck $p_1 p_2 p_3$ vom Range 3 sei einem Dreiflach $b_1 b_2 b_3$ vom Range 3 zugeordnet und fremd. Laufen dann die Verbindungsebenen der Punkte des Dreiecks mit den entsprechenden Kanten des Dreiflaches durch eine Gerade, so liegen die Schnittpunkte der Seiten des Dreiecks mit den entsprechenden Ebenen des Dreiflaches auf einer Geraden. Und umgekehrt.

Treten diese Lagebeziehungen ein, so nennen wir Dreieck und Dreiflach *perspektiv*. Ist ein Dreieck vom Range 3 zu einem Dreiflach (vom Range 3) polar und außerdem fremd, so ist es zu diesem Dreiflach perspektiv.

Auf perspektive Dreiecke und Dreiflache wird man nun durch den Beweis des Satzes von Chasles geführt. Wir stellen die Bedingung dafür auf, daß zwei fremde Vierecke $p_1 p_2 p_3 p_4$ und $q_1 q_2 q_3 q_4$ vom Range 4 im $\mathfrak{R}_3$ hyperboloidisch liegen: Der Rang des Systems der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte muß 3 werden. Dazu ist notwendig:

$$(4) \qquad (\widehat{p_4 q_4}, \widehat{p_3 q_3}, \widehat{p_2 q_2}, \widehat{p_1 q_1}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \equiv 0 \quad \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}\ [4].$$

Um diese Forderung umzugestalten, multiplizieren wir die linke Seite mit der (nach Voraussetzung von Null verschiedenen) Determinante:

$$(5) \qquad (g_{14}, g_{24}, g_{34}, g_{13}, g_{23}, g_{12})$$

der sechs Kanten:

$$(6) \quad g_{14} = \widehat{q_2 q_3},\ g_{24} = \widehat{q_1 q_3},\ g_{34} = \widehat{q_1 q_2},\ g_{13} = \widehat{q_2 q_4},\ g_{23} = \widehat{q_1 q_4},\ g_{12} = \widehat{q_3 q_4}$$

des zweiten Vierecks. Setzen wir dann noch für die Ebenen dieses Vierecks:

$$(7) \qquad b_1 = \widehat{q_2 q_3 q_4},\quad b_2 = \widehat{q_1 q_3 q_4},\quad b_3 = \widehat{q_1 q_2 q_4},\quad b_4 = \widehat{q_1 q_2 q_3},$$

so erhalten wir die Bedingung in der Forderung, daß die vierreihigen Determinanten der Matrix M_4:

$$(8) \qquad \begin{array}{c|cccc} 14 & (p_4 b_1) & * & * & (p_1 b_4) \\ 24 & (p_4 b_2) & * & -(p_2 b_4) & * \\ 34 & (p_4 b_3) & (p_3 b_4) & * & * \\ \hline 13 & * & -(p_3 b_1) & * & (p_1 b_3) \\ 23 & * & -(p_3 b_2) & -(p_2 b_3) & * \\ 12 & * & * & (p_2 b_1) & (p_1 b_2) \end{array}$$

verschwinden sollen[5]. Die Matrix hat dann den Rang 3; denn auf Grund

[4]) Links steht eine sechsreihige, aus Plückerschen Koordinaten gebildete Determinante.

[5]) Der abgeteilte Teil der Matrix M_4 ist die dem Satze von Desargues entsprechende Matrix M_3.

unserer Voraussetzung (*fremde* Vierecke) können nicht alle dreireihigen Determinanten gleich Null werden.

Um eine Übersicht über die 15 vierreihigen Determinanten der Matrix M_4 zu erhalten, ordnen wir jeder ihrer Zeilen das Indexpaar der Zeile in (5) zu, aus der sie entstanden ist, und *bilden jede Determinante auf ein Schema ab*, indem wir in einem Viereck mit den Eckpunkten 1, 2, 3, 4 die Seiten ausziehen, welche die Indexpaare der Determinantenzeilen tragen. Den möglichen Typen vierreihiger Determinanten entsprechen dann die möglichen Typen von Vierseiten, die man in das Viereck einzeichnen kann. Man sieht also unmittelbar, daß nur zwei Typen vierreihiger Determinanten zu unterscheiden sind:

1. 12 *Determinanten vom Dreieckstypus*: z. B.

$$(12, 23, 31; 34) = -R_{123}\cdot(b_3\, p_4).$$

2. 3 *Determinanten vom Viereckstypus*: z. B.

$$(12, 23, 34, 41) = +R_{1234}.$$

Dabei bezeichnen wir mit R_{1234} den *Viererring*:

$$(9)\qquad R_{1234} = (b_1\, p_2)(b_2\, p_3)(b_3\, p_4)(b_4\, p_1) - (p_1\, b_2)(p_2\, b_3)(p_3\, b_4)(p_4\, b_1).$$

Hieraus schließen wir zunächst, daß das Verschwinden der vier Dreierringe R_{234}, R_{341}, R_{412}, R_{123} eine notwendige Bedingung dafür ist, daß der Rang unserer Matrix 3 wird[6]). Diese Bedingung ist aber auch hinreichend; denn das Verschwinden der Dreierringe zieht das Verschwinden der Viererringe nach sich. Es ist etwa:

$$\begin{aligned}(10)\qquad R_{1234}\cdot(b_3\, p_1) &= +(b_1\, p_2)(b_2\, p_3)(b_3\, p_4)(b_4\, p_1)\cdot(b_3\, p_1)\\ &\quad -(p_1\, b_2)(p_2\, b_3)(p_3\, b_4)(p_4\, b_1)\cdot(b_3\, p_1)\\ (\text{wegen } R_{123}=0)\qquad &= +(p_1\, b_2)(p_2\, b_3)(b_3\, p_4)(b_4\, p_1)\cdot(p_3\, b_1)\\ &\quad -(p_1\, b_2)(p_2\, b_3)(p_3\, b_4)(p_4\, b_1)\cdot(p_1\, b_3)\\ &= +(p_1\, b_2)(p_2\, b_3)\cdot R_{341} = 0.\end{aligned}$$

Wir können nun nacheinander folgende Sätze aussprechen:

I. Hauptsatz. *Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei zugeordnete fremde Tetraeder, von denen eines als Viereck, das andere als Vierflach gegeben ist, sich als Vierecke in hyperboloidischer Lage befinden, ist das Verschwinden der aus ihren Punkten und Ebenen gebildeten Dreierringe. D. h. jedes Dreieck des Vierecks muß zu dem entsprechenden Dreiflach des Vierflaches perspektiv sein.*

---

[6]) Von diesen Bedingungen sind nur drei unabhängig.

Stellt man die duale Überlegung an, vertauscht aber dabei die Rolle der beiden Tetraeder, so ändern sich nur die Vorzeichen der Dreierringe. Wir können daher fortfahren:

II. *Zwei zugeordnete fremde Tetraeder sind stets zugleich als Vierecke und Vierflache in hyperboloidischer Lage.*

Ein Überlegung, die sich aus (3) ergibt, liefert weiter (ohne Rechnung) den Satz von Chasles:

III. *Zwei Tetraeder, die in bezug auf eine reguläre Fläche zweiter Ordnung polar und dazu fremd sind, befinden sich in hyperboloidischer Lage.*

Schließlich ergibt sich durch das Verschwinden der Viererringe ein Satz, der etwa in der Formel

$$R_{1234} = 0; \qquad DV(p_1 p_3, b_2 b_4) = DV(p_2 p_4, b_1 b_3) \tag{11}$$

zum Ausdruck kommt.

2. Die Sätze von Berzolari und Schläfli.

Wir betrachten jetzt im $\mathfrak{R}_{n-1}$ zwei fremde Simplexe $p_1 p_2 \dots p_n$ und $b_1 b_2 \dots b_n$. Die Bedingung dafür, daß sie sich als n-Ecke in Schläflischer Lage befinden, besteht darin, daß die, analog zu M_4 gebildete Matrix M_n von n Spalten und $\frac{n(n-1)}{2}$ Zeilen den Rang $n-1$ besitzen muß.

Wie im Falle $n = 4$ kann man jeder Zeile von M_n ein Indexpaar zuordnen und jede ihrer Determinanten auf ein n-Seit abbilden, das einem n-Eck mit den Eckpunkten $1, 2, \dots, n$ einbeschrieben ist. Aus dem leicht erkennbaren Bildungsgesetz der Matrix M_n leitet man dann zunächst folgenden Hilfssatz ab:

IV. *Eine n-reihige Determinante der Matrix M_n, deren Bild ein m-seitiges Polygon enthält, besitzt den diesem Polygon entsprechenden m-Ring als Faktor.*

Aus der einfachen, durch vollständige Induktion zu beweisenden Bemerkung:

V. *Schreibt man einem n-Eck ein n-Seit ein, so entsteht mindestens ein Polygon.*

folgt dann:

VI. *Jede n-reihige Determinante der Matrix M_n enthält mindestens einen Ring als Faktor.*

Da die Faktoren der Determinanten, welche keine Ringe sind, nach Voraussetzung von Null verschiedene Klammerausdrücke $(b_i p_k)$ werden und man genau wie in (10) beweisen kann:

VII. *Das Verschwinden aller Dreierringe zieht das Verschwinden aller höheren Ringe nach sich.*

so ergibt sich schließlich:

VIII. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Matrix M_n den Rang $n-1$ besitzt, ist das Verschwinden aller Dreierringe*[7]).

Wie im Falle $n=4$ erkennt man nämlich, daß unter der Voraussetzung *fremder* Simplexe der Rang nicht kleiner werden kann.

Beispiel. Übersicht über die 252 fünfreihigen Determinanten der Matrix M_5:

I. *Determinanten vom Dreieckstypus*:

1. 60 Determinanten vom Typus:

$$(12, 23, 31; 34, 45) = R_{123} \cdot (b_3\, p_4) \cdot (b_4\, p_5).$$

2. 30 Determinanten vom Typus:

$$(12, 23, 31; 34, 35) = R_{123} \cdot (b_3\, p_4) \cdot (b_3\, p_5).$$

3. 60 Determinanten vom Typus:

$$(12, 23, 31; 34, 15) = R_{123} \cdot (b_3\, p_4) \cdot (b_1\, p_5).$$

II. *Determinanten vom Viereckstypus*:

4. 60 Determinanten vom Typus:

$$(12, 23, 34, 41; 45) = R_{1234} \cdot (b_4\, p_5).$$

5. 30 Determinanten vom Typus:

$$(12, 23, 34, 41; 24) = 0.$$

III. *Determinanten vom Fünfeckstypus*:

6. 12 Determinanten vom Typus:

$$(12, 23, 34, 45, 51) = R_{12345}.$$

Aus VIII folgen nun unmittelbar Sätze, die den für Tetraeder in hyperboloidischer Lage ausgesprochenen Sätzen analog sind:

IX. *Zwei zugeordnete fremde Simplexe sind stets zugleich als n-Ecke und n-Flache in Schläflischer Lage.* (*Berzolari.*)

X. *Befinden sich zwei Simplexe in Schläflischer Lage, so ist jedes Dreieck des einen zu dem entsprechenden Dreiflach des anderen perspektiv.*

XI. *Sind zwei Simplexe im $\mathfrak{R}_{n-1}$ in bezug auf eine reguläre M^2_{n-2} polar und dazu fremd, so befinden sie sich in Schläflischer Lage.* (*Schläfli.*)

---

[7]) Die Gleichungen $R_{ikl} = 0$ stellen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ unabhängige Bedingungen dar.

3. Ein neues Analogon zum Satze von Desargues.

Die Sätze von Berzolari und Schläfli sind insofern Verallgemeinerungen der Sätze von den perspektiven und polaren Dreiecken, als alle *diese Sätze durch Nullsetzen von geeigneten* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *Dreierringen im* $\mathfrak{R}_{n-1}$ *entstehen.* Eine andere, ebenso naheliegende Verallgemeinerung derselben Sätze ergibt sich, wenn man den in den Gleichungen (1), (2), (3) zusammengefaßten Beweis der Sätze von den perspektiven und polaren Dreiecken für höhere Dimensionen verallgemeinert und also *die Beziehungen aufsucht, die zwischen zwei zugeordneten Simplexen bestehen, wenn ein aus ihren Punkten und Flachen gebildeter n-Ring verschwindet.* Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß durch die Aufeinanderfolge der Indizes in einem n-Ring die Punkte und Flache der beiden Simplexe in bestimmter Weise verbunden sind. Der neue Satz handelt also von zwei zugeordneten *„in gleicher Weise verbundenen"* Simplexen. Zu jedem Flache eines verbundenen n-Ecks gehört nun eine Gerade, die Schnittgerade des Flaches mit den $n-3$ nicht benachbarten Flachen und dual gehört zu jedem Punkte eines verbundenen n-Flaches ein $\mathfrak{R}_{n-3}$, der Verbindungs-$\mathfrak{R}_{n-3}$ des Punktes mit den $n-3$ nicht benachbarten Punkten. Nun lautet das Analogon zum Satze von Desargues:

XII. *In einem Raume* $\mathfrak{R}_{n-1}$ *von gerader Dimension sei einem n-Eck vom Range n ein n-Flach vom Range n zugeordnet und fremd und beide seien in gleicher Weise verbunden. Laufen dann die Verbindungs-*$\mathfrak{R}_{n-3}$ *der Punkte des n-Ecks mit den entsprechenden* $\mathfrak{R}_{n-3}$ *des n-Flaches durch einen Punkt, so liegen die Schnittpunkte der Geraden des n-Ecks mit den entsprechenden Flachen des n-Flaches in einem Flach, und umgekehrt.*

Wir sagen dann, daß das verbundene n-Eck zu dem verbundenen n-Flach *perspektiv* ist.

Beweis. Im R_4 gelten die den Gleichungen (2) entsprechenden Gleichungen:

(12)
$$\begin{aligned}&(p_1 q_1 q_3 q_4,\ p_2 q_2 q_4 q_5,\ p_3 q_1 q_3 q_5,\ p_4 q_1 q_2 q_4,\ p_5 q_2 q_3 q_5)\cdot(q_1 q_2 q_3 q_4 q_5) = +R_{123}\\ &(b_1 a_1 a_3 a_4,\ b_2 a_2 a_4 a_5,\ b_3 a_1 a_3 a_5,\ b_4 a_1 a_2 a_4,\ b_5 a_2 a_3 a_5)\cdot(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) = -R_{123}\end{aligned}$$

und analoge Gleichungen in Räumen von höherer gerader Dimension.

Wir bemerken noch, daß das Analogon XII dem Satze von Desargues noch insofern näher steht, als der Satz von Berzolari, als es wie der Satz von Desargues die beiden Simplexe nur einer Bedingung unterwirft.

Als Gegenstück zum Satze von Schläfli folgt nun wieder nach (3) ein neues Analogon zum Satze von den polaren Dreiecken:

XIII. *Ist ein verbundenes n-Eck vom Range n in einem Raume* $\mathfrak{R}_{n-1}$ *gerader Dimension zu einem* (*in gleicher Weise verbundenen*) *n-Flach* (*vom Range n*) *in bezug auf eine reguläre* M^2_{n-2} *polar und dazu fremd, so ist das n-Eck zum n-Flach perspektiv.*

Da schließlich die Schläflische Lage zweier Simplexe durch das Verschwinden aller Dreier- und damit aller höheren Ringe charakterisiert ist, folgt endlich, immer unter Verwendung des Begriffes perspektiv in der eben angegebenen verallgemeinerten Bedeutung, als Ergänzung zu X.

XIV. *Befinden sich zwei Simplexe in Schläflischer Lage, so ist jedes verbundene n-Eck ungerader Eckenzahl des einen zu dem entsprechenden verbundenen n-Flach des zweiten perspektiv.*

(Eingegangen am 28. März 1930.)

Beiträge zur Gruppentheorie. I.

Über eine Gruppenmetrik [1]).

Von

Karl Menger in Wien.

Inhalt.

Seite

1. Problemstellung 396
2. Metrische Gruppen und ihre Abstandsverhältnisse 399
3. Über Kongruenzen von Gruppen 403
4. Über G-metrische Mengen und die Teilmengen metrischer Gruppen 405
5. Über Pseudo-G-Quadrupel 408
6. Sätze von O. Taussky über Pseudo-G-Quadrupel 412
7. Über G-metrische Mengen mit mehr als vier Elementen . . 415

1. Problemstellung.

In der vorliegenden Abhandlung soll erstens ein *Abstandsbegriff* in die Gruppentheorie eingeführt werden, der eine Art einfacher *Geometrie der Gruppen* ermöglicht, nämlich metrische Untersuchungen jeder Gruppe z. B. betreffend kongruente Figuren (bestehend aus Gruppenelementen), betreffend Symmetralen und Spiegelbilder, betreffend kongruente Selbstabbildungen der Gruppe usw. Es sollen zweitens Elemente beliebiger Gruppen als *Metrisierungsmittel* für beliebige Mengen (d. h. zur Definition des Abstandes von Elementepaaren beliebiger Mengen) verwendet werden in derselben Art, in der die reellen oder komplexen Zahlen als Abstände von Elementepaaren beliebiger Mengen (die dann halbmetrische Räume heißen) verwendet werden. Und es sollen drittens unter den mit Hilfe einer Gruppe G metrisierten Mengen speziell die *Teilmengen der Gruppe selbst* gekennzeichnet werden,

[1]) Ein Auszug der folgenden Arbeit erschien im Wiener akad. Anzeiger 1930.

so wie unter den metrischen Räumen mit reellen Abstandszahlen jene gekennzeichnet sind[2]), welche mit Teilmengen der Geraden, d. h. der Menge aller reellen Zahlen, kongruent sind.

Ehe wir diese Untersuchungen darstellen, mögen die Probleme und Methoden zunächst an einem ganz einfachen Beispiel erläutert werden, welches sich nicht auf die Metrik selbst, sondern auf Orientiertheit bezieht. Wir werden erstens eine Orientierung von Gruppen erklären, werden zweitens Elemente beliebiger Gruppen als Orientierungsmittel beliebiger Mengen verwenden und werden drittens unter den mit Hilfe dieser Gruppe orientierten Mengen die Teilmengen einer orientierten Gruppe kennzeichnen.

Es sei G eine Gruppe. Das aus den Elementen a und b komponierte Element bezeichnen wir mit $a + b$, das Einheitselement von G mit 0, das zum Element a inverse Element mit $-a$. Statt $a + (-b)$ schreiben wir kurz $a - b$.

Wir wollen die Gruppe G *orientiert* nennen, wenn jedem geordneten Paar a, b von Elementen von G das Element $b - a$, welches wir auch mit ab bezeichnen werden, als *„gerichteter Abstand"* zugeordnet ist. Offenbar genügt dieser gerichtete Abstand für je zwei Elemente a und b von G der Beziehung

$$ab = -ba \begin{cases} \neq 0, & \text{wenn } a \neq b, \\ = 0, & \text{wenn } a = b. \end{cases}$$

Ist beispielsweise G die Menge der reellen (bzw. der komplexen) Zahlen, welche hinsichtlich der Addition eine Gruppe bildet, so ist diese Gruppe G nach der Orientierung, die jedem geordneten Paar a, b von Zahlen die Zahl $b - a$ als gerichteten Abstand zuordnet, mit dem $\vec{R}_1$ (bzw. mit dem $\vec{K}_1$), d. h. mit dem gerichteten eindimensionalen reellen (bzw. komplexen) euklidischen Raum identisch.

Eine Menge M heiße, wenn G eine vorgelegte Gruppe ist, *G-orientiert*, wenn jedem geordneten Paar p, q von Elementen von M ein Element von G, welches wir mit pq bezeichnen wollen, zugeordnet ist gemäß der Bedingung

$$pq \begin{cases} \neq 0 & \text{für } p \neq q, \\ = 0 & \text{für } p = q. \end{cases}$$

Die orientierte Gruppe G selbst und alle ihre Teilmengen sind dieser Definition zufolge G-orientierte Mengen. Ist G die additive Gruppe der reellen Zahlen, so ist G-orientiert eine Menge M, wenn jedem geordneten Paar p, q von Elementen von M eine reelle Zahl zugeordnet ist, die dann und nur dann verschwindet, falls die beiden Elemente identisch sind.

---

[2]) Zweite Untersuchung über allgemeine Metrik, Math. Annalen **100** (1928).

Zwei G-orientierte Mengen M und M' mögen *kongruent* heißen, wenn die eine, etwa M', eindeutiges Bild der anderen Menge M ist derart, daß je zwei Elementen p und q von M zwei Elemente p' und q' von M' entsprechen, für welche $p'q' = pq$ und $q'p' = qp$ gilt. Eine dieser Bedingung genügende eindeutige Abbildung nennen wir eine *kongruente Abbildung*. Eine kongruente Abbildung führt je zwei verschiedene Elemente von M, d. h. je zwei Elemente von M, deren Abstand $\neq 0$ ist, in zwei Elemente von M', deren Abstand $\neq 0$ ist, die also verschieden sind, über und ist demnach eo ipso eineindeutig.

Es fragt sich nun, wie die Teilmengen der orientierten Gruppe G unter den G-orientierten Mengen kongruent gekennzeichnet sind, m. a. W. unter welchen Bedingungen eine vorgelegte G-orientierte Menge M mit einer Teilmenge von G kongruent ist. Die Antwort ist in folgendem Satze enthalten:

Damit die G-orientierte Menge M mit einer Teilmenge der orientierten Gruppe G kongruent sei, ist notwendig und hinreichend, daß für je drei Elemente p, q, r von M die Beziehung gilt

$$pq + rp + qr = 0.$$

Diese Bedingung ist notwendig. Ist nämlich M eine Teilmenge von G, so gilt für je drei Elemente a, b, c von M die Beziehung

$$(b-a) + (a-c) + (c-b) = 0, \quad \text{d. h.} \quad ab + ca + bc = 0.$$

Dieselbe Beziehung muß daher für je drei Elemente jeder mit M kongruenten G-orientierten Menge gelten.

Die Bedingung ist hinreichend. Wir wollen die Annahme machen, sie sei für je drei Elemente der G-orientierten Menge M erfüllt. Sind p und q irgend zwei Elemente von M, so ist die Bedingung insbesondere für das Elementetripel p, q, q erfüllt und ergibt $pq + qp + qq = 0$. Da M als G-orientiert vorausgesetzt ist, gilt $qq = 0$, also $pq + qp = 0$ oder, was gleichbedeutend ist, $pq = -qp$ für je zwei Elemente p und q von M.

Zur Herstellung einer kongruenten Abbildung von M auf eine Teilmenge von G wählen wir irgendein Element p von M und ordnen ihm irgendein Element p' von G zu. Ist dann q irgendein Element von M, so ordnen wir ihm das Element $q' = pq + p'$ von G zu, wo pq den gerichteten Abstand von p nach q, also ein Element von G bezeichnet, zu welchem das Element p' von G addiert werden kann. Auf diese Weise ist M eindeutig auf eine Teilmenge von G abgebildet. Wir behaupten, daß diese Abbildung kongruent ist. Es seien also q und r irgend zwei Elemente von M, und q' bzw. r' ihre Bilder in G. Wir haben nachzuweisen, daß die beiden Beziehungen gelten $q'r' = qr$ und $r'q' = rq$. Da q' und r' Elemente der orientierten Gruppe G sind, gilt $q'r' = -r'q'$. In M gilt

für q und r die (oben für je zwei Elemente von M bewiesene) Beziehung $qr = -rq$. Es genügt daher, von den beiden zu beweisenden Beziehungen eine, etwa die erste, nachzuweisen. Falls eines der Elemente q und r, etwa r, mit p identisch ist, so gilt $p'q' = q' - p' = (pq + p') - p' = pq$. In diesem Falle ist also die Behauptung bewiesen. Sind q und r beide von p verschieden, so verwenden wir die voraussetzungsgemäß gültige Beziehung $pq + rp + qr = 0$, aus der $qr = -rp - pq$ folgt. Anderseits gilt, da p', q', r' Elemente von G sind, $p'q' + r'p' + q'r' = 0$, also $q'r' = -r'p' - p'q'$. Wegen $r'p' = rp$ und $p'q' = pq$ folgt daraus $q'r' = qr$, d. h. die behauptete Beziehung. Damit ist die Bedingung auch als hinreichend bewiesen.

2. Metrische Gruppen und ihre Abstandsverhältnisse.

Wir fassen in der Gruppe G (so wie dies bei der Definition des absoluten Betrages eines Elementes der additiven Gruppe aller reellen Zahlen geschieht) die zueinander inversen Elemente zu Paaren zusammen und bezeichnen mit $|G|$ die Menge aller dieser Paare. Ist $|a|$ ein Element von $|G|$, so bezeichnen wir die (untereinander gleichen) Ordnungen der beiden in $|a|$ enthaltenen Elemente von G als *Ordnung* von $|a|$. Ist das Element $|a|$ von $|G|$, bestehend aus den Elementen a und $-a$ von G, von der Ordnung 2, so gilt $2a = 0$, also $a = -a$, und $|a|$ besteht demnach aus zwei gleichen Elementen von G. Umgekehrt gilt für jedes aus zwei gleichen Elementen a, a von G bestehende Element $|a|$ von $|G|$ die Beziehung $a = -a$, und daher $2a = 0$. Ein solches Element ist also von höchstens zweiter Ordnung, d. h. entweder von zweiter Ordnung oder von erster Ordnung, in welch letzterem Falle es aus den Elementen 0, 0 von G besteht und im folgenden auch kurz mit 0 bezeichnet werden soll.

Wir nennen eine Gruppe G *rechtsseitig metrisch*, wenn je zwei Elementen a und b von G das aus den Elementen $b - a$ und $a - b$ bestehende Element von $|G|$ als *Abstand* zugeordnet ist. Diesen Abstand bezeichnen wir auch kurz mit ab. Es gilt dann offenbar für je zwei Elemente a und b von G

$$ab = ba \begin{cases} \neq 0 & \text{für } a \neq b, \\ = 0 & \text{für } a = b. \end{cases}$$

Entsprechend heißt die Gruppe G *linksseitig metrisch*, wenn als Abstand der Elemente a und b das aus den Elementen $-a + b$ und $-b + a$ bestehende Element von $|G|$ zugeordnet ist. Ist G eine Abelsche Gruppe, so sind diese beiden Abstandsdefinitionen identisch und wir nennen die Gruppe *metrisch* schlechthin. Die folgenden Untersuchungen beschränken wir auf Abelsche Gruppen.

Ist a ein Element von G und $|d|$ ein Element von $|G|$, bestehend aus den Elementen d und $-d$ von G, so muß, wenn das Element b von G vom Element a den Abstand $|d|$ haben soll, eine der vier folgenden Beziehungen gelten:

$$d = b - a, \quad d = a - b, \quad -d = b - a, \quad -d = a - b.$$

Dieselben reduzieren sich offenbar auf zwei Beziehungen: Damit ein Element von a den Abstand $|d|$ habe, ist notwendig und hinreichend, daß es Lösung von einer der beiden Gleichungen $d = x - a$ und $d = a - x$ sei, d. h. das Element muß entweder mit $a + d$ oder $a - d$ identisch sein. Diese beiden Elemente sind identisch dann und nur dann, wenn $2d = 0$ gilt, wenn also d von höchstens zweiter Ordnung ist. Wir haben also, indem wir der kürzeren Ausdrucksweise halber ein Gruppenelement g, das nicht eine Ordnung $\leqq n$ (wo n eine natürliche Zahl ist) besitzt (für welches also die Beziehung $ng \neq 0$ gilt), als ein Element einer Ordnung $> n$ bezeichnen, folgenden

Satz I. *Ist $|d|$ ein Element von $|G|$ von einer Ordnung > 2, so gibt es zu jedem Element a von G genau zwei Elemente, die von a den Abstand $|d|$ besitzen. Ist $|d|$ von der Ordnung 2, so gibt es zu jedem Element a genau ein von a verschiedenes Element im Abstand $|d|$ von a. Den Abstand 0 von a hat nur das Element a selbst.*

Es seien nun zwei verschiedene Elemente a und b von G und zwei Elemente $|d|$ und $|e|$ von $|G|$ bestehend aus den Elementen d, $-d$ bzw. e, $-e$ von G gegeben. Damit ein Element von G existiere, das von a den Abstand $|d|$ und von b den Abstand $|e|$ hat, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß eines der höchstens zwei Elemente, die von a den Abstand $|d|$ haben, mit einem der höchstens zwei Elemente, die von b den Abstand $|e|$ haben, identisch ist; m. a. W., daß mindestens eine der vier folgenden Beziehungen besteht:

$$(1)\ a + d = b + e, \qquad (2)\ a - d = b + e,$$
$$(3)\ a + d = b - e, \qquad (4)\ a - d = b - e.$$

Damit mehr als ein Element existiere, welches von a den Abstand $|d|$ und von b den Abstand $|e|$ hat, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß zwei Elemente existieren, die von a den Abstand $|d|$ haben, und zwei Elemente, die von b den Abstand $|e|$ haben, und daß jedes der beiden ersten mit einem der beiden zweiten Elemente identisch sei, daß m. a. W. mindestens zwei von den vier angeführten Beziehungen zusammen bestehen. Nun folgt aus dem Zusammenbestehen von (1) und (2) oder von (3) und (4) die Beziehung $2d = 0$, und aus dem Zusammenbestehen von (1) und (3) oder von (2) und (4) die Beziehung $2e = 0$. Wenn aber d oder e von

der Ordnung 2 ist, so existiert nach Satz I bloß ein Element, welches von a den Abstand $|d|$, bzw. von b den Abstand $|e|$ hat. Aus dem Zusammenbestehen von (1) und (4) oder von (2) und (3) folgt $2a = 2b$, also $2(a - b) = 0$, d. h. die Elemente a und b haben einen Abstand der Ordnung 2. Haben umgekehrt a und b einen Abstand der Ordnung 2 und existiert ein Element, das von a den Abstand $|d|$ und von b den Abstand $|e|$ hat, wo $|d|$ und $|e|$ von Ordnungen > 2 sind, so gilt eine der vier Beziehungen (1), (2), (3), (4) und aus ihr folgt auf Grund von $2a = 2b$ eine zweite dieser Beziehungen, so zwar, daß entweder (1) und (4) oder (2) und (3) zusammen bestehen. Es existiert dann also auch ein zweites Element, welches von a den Abstand $|d|$ und von b den Abstand $|e|$ hat, und dasselbe ist von dem ersten verschieden, da $|d|$ und $|e|$ Ordnungen > 2 haben. Zusammenfassend können wir also aussprechen folgenden

Satz II. *Zu je zwei Elementen a und b, deren Abstand eine Ordnung > 2 besitzt, und zu je zwei Elementen $|d|$ und $|e|$ von $|G|$ existiert höchstens ein Element, das von a den Abstand $|d|$ und von b den Abstand $|e|$ besitzt. Ist der Abstand von a und b von der Ordnung 2, so existiert zu jedem Element c von G, dessen Abstände von a und b Ordnungen > 2 besitzen, genau ein von c verschiedenes Element c', für welches $ca = c'a$ und $cb = c'b$ gilt*[3]). (Wir werden dasselbe als das *Spiegelbild* von c in bezug auf a und b bezeichnen.)

Um ein Beispiel eines Spiegelbildes in bezug auf zwei Punkte, deren Abstand die Ordnung 2 hat, zu erlangen, betrachten wir die multiplikative Gruppe der vierten Einheitswurzeln. Die vier Elemente dieser Gruppe sind $1, -1, i, -i$. Das Kompositionszeichen $+$ der Gruppe ist die Multiplikation, das Einheitselement 1. Der Abstand von 1 und -1 ist $\left(\frac{-1}{1}, \frac{1}{-1}\right) = (-1, -1)$, also von der Ordnung 2, ebenso der Abstand von i und $-i$, der $\left(\frac{i}{-i}, \frac{-i}{i}\right) = (-1, -1)$ ist. Die vier anderen Punktepaare haben den Abstand $(i, -i)$. Die Elemente i und $-i$ sind also Spiegelbilder in bezug auf die Elemente 1 und -1. Die Elemente 1 und -1 sind Spiegelbilder in bezug auf i und $-i$.

Sind a und b zwei Elemente der Gruppe G, so bezeichnen wir jenes Element von G, das von a denselben Abstand hat wie b, als das *Spiegelbild von b an a*. Damit das Element b mit seinem Spiegelbild an a identisch sei, ist dem Vorangehenden zufolge notwendig und hinreichend, daß der Abstand von a und b von höchstens zweiter Ordnung ist. Das Spiegelbild eines Elementes c an zwei Elementen a und b, deren Abstand die

[3]) Den Hinweis auf die Ausnahmerolle der Abstände der Ordnung 2 verdanke ich Fräulein O. Taussky.

Ordnung 2 hat, ist nichts anderes als das Spiegelbild von c an a und das Spiegelbild von c an b, welche beiden Spiegelbilder eben deshalb, weil der Abstand von a und b die Ordnung 2 hat, identisch sind.

Sind a und b zwei verschiedene Elemente von G, so bezeichnen wir als *Symmetrale von a und b* die (eventuell leere) Menge aller Elemente von G, die denselben Abstand von a wie von b haben, für welche also $ac = bc$ gilt. Für ein Element c der Symmetrale von a und b muß also entweder $a - c = b - c$ oder $a - c = c - b$ gelten. Der erste Fall kann wegen der Verschiedenheit von a und b nicht eintreten, also muß der zweite vorliegen und daher die Beziehung $2c = a + b$ gelten. Ist c' ein anderes Element der Symmetrale von a und b, so gilt $2c' = 2c = a + b$, also $2(c - c') = 0$. Es haben also je zwei Elemente der Symmetrale von a und b einen Abstand der Ordnung 2. Umgekehrt gehört offenbar neben jedem Element c der Symmetrale von a und b auch jedes Element, dessen Abstand von c die Ordnung 2 hat, der Symmetrale an. Diese Tatsachen können kurz formuliert werden, wenn wir die Menge aller Elemente der Gruppe G, deren Ordnung $\leqq 2$ ist, mit G_2 bezeichnen und eine Menge, bestehend aus den Elementen $a + g$, wo a ein festes Element von G und g ein beliebiges Element von G_2 ist, eine *mit G_2 kongruente Menge* nennen. G_2 ist offenbar eine Untergruppe von G, welche, wenn die Gruppe keine Elemente der Ordnung 2 enthält, bloß aus dem Einheitselement besteht. Wir haben bewiesen:

Satz III. *Die Symmetrale von zwei verschiedenen Elementen der Gruppe G ist entweder leer oder kongruent mit G_2.*

Wir können dies auch dahin ausdrücken, daß zwei Elemente, die Spiegelbilder in bezug auf ein Element a sind, auch Spiegelbilder in bezug auf die Menge $a + G_2$ sind. Insbesondere bestehen nach Satz III in Gruppen ohne Elemente der Ordnung 2 die Symmetralen aus höchstens einem Element. Enthält eine Gruppe Elemente der Ordnung 2, so können dieselben nur in der Symmetrale solcher Elementepaare liegen, in deren Symmetrale auch das Element O liegt, d. h. in der Symmetrale von zueinander inversen Elementen. Wenn eine Gruppe G nur Elemente von höchstens zweiter Ordnung enthält, wenn sie m. a. W. mit G_2 identisch ist, so gibt es keine verschiedenen zueinander inversen Elemente von G. Wir sehen also: *In einer Gruppe ohne Elemente einer Ordnung > 2 ist die Symmetrale von je zwei verschiedenen Elementen leer.*

Anderseits wollen wir nun zeigen: *In einer zyklischen Gruppe von ungerader Ordnung ist die Symmetrale von keinem Elementenpaar leer.* Seien nämlich ka $(0 \leqq k \leqq 2n)$ die Elemente der Gruppe. Sind ka und la irgend zwei verschiedene Elemente, so ist die ganze Zahl x so bestimmbar

daß xa gleichen Abstand von ka und la hat. Wir haben zu diesem Zweck nur $xa - ka = la - xa$, also $2x \equiv k + l \pmod{2n+1}$ zu wählen.

Man bestätigt endlich noch unmittelbar folgende oft anwendbare Bemerkung: *Sind* c_a *und* c_b *Spiegelbilder von* c *in bezug auf* a *und* b, *so gilt* $c_a c_b = 2ab$.

3. Über Kongruenzen von Gruppen.

Wir bezeichnen eine Selbstabbildung der Gruppe G, also eine Zuordnung von einem Element a' von G zu jedem Element a von G als *Kongruenz*, wenn sie abstandstreu ist, d. h. wenn für je zwei Elemente a und b von G und ihre Bildelemente a' und b' die Beziehung gilt: $a'b' = ab$. Die Kongruenzen einer Gruppe bilden offenbar ihrerseits eine Gruppe, denn hintereinander ausgeführte Kongruenzen lassen sich durch eine einzige ersetzen. Die identische Selbstabbildung ist das Einheitselement der Kongruenzengruppe, und zu jeder Kongruenz existiert eine inverse.

Ist t ein bestimmtes Element von G und wird jedem Element x von G das Element $x' = x + t$ zugeordnet, so entsteht eine Selbstabbildung von G, welche als Translation um t oder kurz als *Translation* bezeichnet werden möge. Dieselbe ist offenbar eine Kongruenz. Ferner ist klar, daß die Translationen von G eine Gruppe, also eine Untergruppe der Kongruenzengruppe bilden, welche mit der Gruppe G isomorph ist. Sind a und a' irgend zwei Elemente von G, so existiert genau eine Translation, welche a in a' überführt, nämlich $x' = x + a' - a$.

Ist s ein bestimmtes Element von G und ordnen wir jedem Element von G sein Spiegelbild in bezug auf s zu, so entsteht offenbar eine kongruente Selbstabbildung von G, welche wir als Spiegelung an s oder kurz als *Spiegelung* bezeichnen wollen. Bezeichnet x' das Bild von x vermöge der Spiegelung an s, so gilt $x' - s = s - x$, also $x' = 2s - x$. Zwei Spiegelungen an den Elementen s und r hintereinander ausgeführt ergeben eine Translation um $2(r - s)$, denn aus $x' = 2s - x$ und $x'' = 2r - x'$ folgt $x'' = 2(r - s) + x$. Für $r = s$ ergibt sich naturgemäß die Identität.

Wir beweisen nun

Satz IV. *Sind* a, b *und* a', b' *zwei kongruente Paare von Elementen von* G, *so gibt es eine Kongruenz von* G, *welche entweder eine Translation ist oder sich aus einer Translation und einer Spiegelung zusammensetzt und* a *in* a' *und* b *in* b' *überführt.*

Wir betrachten die Translation $x' = x + a' - a$, welche a in a' überführt. Wenn $b' = b + a' - a$ ist, so führt diese Translation auch b in b' über und wir sind am Ziel. Andernfalls ist b' ein von $b + a' - a$ verschiedenes Element von G, das von a' den Abstand ab hat. Nun hat

$b+a'-a$ von a' den Abstand $a'b'=ab$. Wenn also $b' \neq b+a'-a$ gilt, so ist b' das Spiegelbild von $b+a'-a$ an a', d. h. $2a'-(b+a'-a) = a+a'-b$. In diesem Falle führen wir nach der Translation $x'=x+a'-a$ noch die Spiegelung um das Element a' aus, $x''=2a'-x'$, und erhalten so die Kongruenz $x''=a+a'-x$. Diese Abbildung führt a in a' und b in b' über, womit unser Satz für jeden Fall bewiesen ist. —

Es sei nun G eine Gruppe, deren sämtliche Elemente von höchstens zweiter Ordnung sind. Es seien zwei Kongruenzen von G gegeben, welche beide dem Element a das Element a' zuordnen. Es sei dann b irgendein Element von G. Vermöge der ersten Kongruenz sei ihm das Element b', vermöge der zweiten das Element b'' zugeordnet. Sowohl b' als auch b'' müssen wegen der Kongruenz der beiden Abbildungen von a' den Abstand ab haben. Derselbe hat auf Grund der Voraussetzung über alle Gruppenelemente die Ordnung 2. Daher gibt es nur ein einziges Element, das von a' den Abstand ab hat. Es muß mithin $b'=b''$ gelten, d. h. die beiden Kongruenzen ordnen jedem Element von G dasselbe Bildelement zu und sind mithin identisch. In einer Gruppe ohne Element einer Ordnung >2 ist also jede Kongruenz durch Angabe eines Elementes und seines Bildes festgelegt.

Enthält G auch ein Element einer Ordnung >2 und sind zwei Kongruenzen gegeben, welche a in a' überführen, so bestimmen wir ein Element b, das von a einen Abstand hat, dessen Ordnung >2 ist. Es seien b' und b'' die Bilder von b vermöge der beiden Kongruenzen. Wenn erstens $b'=b''$ gilt und c irgendein Element von G ist, so müssen für seine Bilder c' und c'' die Beziehungen gelten:

$$c'a'=ca, \quad c'b'=cb \quad \text{und} \quad c''a'=ca, \quad c''b'=cb.$$

Da es aber nicht zwei verschiedene Elemente geben kann, die von a' und b', deren Abstand eine Ordnung >2 besitzt, dieselben Abstände haben, so muß $c'=c''$ gelten, d. h. wenn $b'=b''$ gilt, so sind die beiden Kongruenzen identisch. Ist zweitens $b' \neq b''$, so sind, da sowohl b' als auch b'' von a' den Abstand ab haben müssen, b' und b'' Spiegelbilder in bezug auf a', und es sind dann offenbar für jedes Element c seine Bilder c' und c'' Spiegelbilder in bezug auf a'. In diesem Falle gibt es also zwei zueinander in bezug auf a' spiegelbildliche Kongruenzen, welche a in a' überführen. Zusammenfassend können wir sagen:

Satz V. *Sind a und a' zwei Elemente der Gruppe G, so existieren genau zwei Kongruenzen, welche a in a' überführen. Dieselben sind zueinander spiegelbildlich in bezug auf a' und dann und nur dann miteinander identisch, wenn G bloß Elemente von höchstens zweiter Ordnung enthält.*

Zugleich geht aus dem Beweise offenbar hervor folgender

Satz VI. *Sind a, b und a', b' zwei kongruente Paare von Elementen der Gruppe G, so gibt es genau eine Kongruenz, welche a in a' und b in b' überführt, falls der Abstand $ab = a'b'$ von einer Ordnung > 2 ist oder falls alle Elemente von G die Ordnung 2 haben, und es gibt genau zwei (zueinander spiegelbildliche) Kongruenzen, welche a in a' und b in b' überführen, falls ab die Ordnung 2 hat, aber Elemente einer Ordnung > 2 existieren.*

Als Korollar entnehmen wir diesen Überlegungen, *daß jede Kongruenz einer Gruppe entweder eine Translation ist oder sich aus einer Translation und einer Spiegelung zusammensetzt.*

4. Über G-metrische Mengen und die Teilmengen metrischer Gruppen.

Es sei eine Gruppe G gegeben. Eine Menge M von irgendwelchen Elementen heiße metrisch in bezug auf G oder kurz *G-metrisch*, wenn je zwei Elementen p und q von M ein Element von $|G|$, welches wir mit pq bezeichnen und den *Abstand* von p und q nennen, zugeordnet ist gemäß den Bedingungen:

$$pq = qp \begin{cases} = 0 & \text{für } p = q \\ + 0 & \text{für } p + q \end{cases}, \quad \text{für je zwei Elemente } p \text{ und } q \text{ von } M.$$

Die in bezug auf die additive Gruppe der reellen Zahlen metrischen Mengen sind offenbar identisch mit den halbmetrischen Räumen. So wird nämlich jede Menge genannt, in der je zwei Elementen p und q eine nichtnegative reelle Zahl $pq = qp$ zugeordnet ist, die für Paare identischer Elemente und nur für solche $= 0$ ist. Der Sinn der Definition der G-metrischen Menge ist also die Heranziehung beliebiger Gruppen statt speziell der Gruppe reeller Zahlen als Metrisierungsmittel beliebiger Mengen.

Kongruent heißen zwei G-metrische Mengen M und M', wenn eine eindeutige Abbildung von M auf M' existiert, so daß für je zwei Elemente p und q von M und ihre Bildelemente p' und q' die Beziehung gilt: $pq = p'q'$.

Die metrische Gruppe G selbst sowie alle Teilmengen von G sind offenbar G-metrische Mengen. Aber nicht jede G-metrische Menge muß eine Teilmenge von G oder mit einer Teilmenge von G kongruent sein. Betrachten wir eine Menge, bestehend aus drei Elementen, die paarweise den Abstand 1 haben, so liegt ein halbmetrischer Raum, d. h. eine in bezug auf die additive Gruppe der reellen Zahlen metrische Gruppe vor, die doch nicht mit einer Teilmenge der Geraden kongruent ist, da es nicht drei reelle Zahlen gibt, die paarweise den Abstand 1 haben.

Es erhebt sich infolgedessen die Frage nach der Kennzeichnung jener G-metrischen Mengen, die mit einer Teilmenge von G kongruent sind. Es ist diesbezüglich vor allem klar, *daß jede aus höchstens zwei Elementen bestehende G-metrische Menge mit einer Teilmenge von G kongruent ist.* Bezüglich der aus drei Elementen p_1, p_2, p_3 bestehenden Mengen gilt, wenn der Abstand $p_i p_j$ gleich dem aus den Elementen r_{ij} und $-r_{ij}$ von G bestehenden Element von $|G|$ ist, folgender

Satz VII. *Damit die aus p_1, p_2, p_3 bestehende G-metrische Menge, in welcher p_i und p_j den Abstand r_{ij}, $-r_{ij}$ haben, mit einer Teilmenge von G kongruent sei, ist notwendig und hinreichend das Bestehen von einer der vier Relationen* $r_{12}+r_{23}+r_{31}=0$, $r_{12}+r_{23}-r_{31}=0$, $r_{12}-r_{23}+r_{31}=0$, $-r_{12}+r_{23}+r_{31}=0$ *oder m. a. W. das Bestehen einer Relation* $\varepsilon_1 r_{23}+\varepsilon_2 r_{31}+\varepsilon_3 r_{12}=0$, *wo die* $\varepsilon_i = \pm 1$ *sind.*

Sind die Elemente p_1, p_2, p_3 mit drei Elementen p_1', p_2', p_3' von G kongruent, so gilt

$$(p_1'-p_2')+(p_2'-p_3')+(p_3'-p_1')=0.$$

Da der Abstand von p_i und p_j gleich dem aus den Elementen $p_i'-p_j'$, $p_j'-p_i'$ von G bestehenden Element von $|G|$ ist, so ergibt sich hieraus die Notwendigkeit der im Satz VII für Tripel ausgesprochenen Bedingung. Nehmen wir umgekehrt für drei Elemente p_1, p_2, p_3 die Gültigkeit einer Beziehung $\varepsilon_1 r_{23}+\varepsilon_2 r_{13}+\varepsilon_3 r_{12}=0$ $(\varepsilon_i=\pm 1)$ an, so können wir drei kongruente Elemente von G angeben. Wir ordnen p_1 irgendein Element p_1' von G zu und dem Element p_2 das Element $p_2'=p_1'+r_{12}$. Ordnen wir sodann p_3 das Element $p_3'=p_1'-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}r_{13}$ zu, so sind p_1', p_2', p_3' mit p_1, p_2, p_3 kongruent. Denn es ist $p_3'p_1'$ gleich dem aus r_{13} und $-r_{13}$ bestehenden Element von $|G|$, so wie $p_3 p_1$. Und es ist $p_3'-p_2'=p_1'-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}r_{13}-p_1'-r_{12}$, d. i. aber unter Berücksichtigung der vorausgesetzten Beziehung $=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}r_{23}$, womit Satz VII bewiesen ist.

Wir ziehen zunächst eine Folgerung aus Satz VII. Wir wollen sagen, drei Elemente a, b, c einer G-metrischen Menge bilden ein *gleichseitiges Dreieck*, wenn $ab=bc=ca$ gilt, welch gemeinsamen Wert wir als die *Seitenlänge* des Dreieckes bezeichnen. Sind a, b, c drei Elemente von G, die ein gleichseitiges Dreieck bilden, dessen Seitenlänge das aus den Elementen s und $-s$ bestehende Element $\neq 0$ von $|G|$ ist, dann muß Satz VII zufolge eine Relation $\varepsilon_1 s+\varepsilon_2 s+\varepsilon_3 s=0$ $(\varepsilon_i=\pm 1)$ gelten, also eine Beziehung $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)s=0$. Es ist unmöglich, daß von den drei Zahlen ε_i zwei denselben und die dritte den andern Wert hat, da hieraus $s=0$ folgen würde, was der Voraussetzung widerspricht. Es müssen also

alle drei Werte ε_i einander gleich sein, d. h. es muß $3s = 0$ gelten und somit s die Ordnung 3 haben. Wir haben also zu Satz VII folgendes

Korollar. *Die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreieckes von Gruppenelementen besitzt die Ordnung* 3. *In einer Gruppe ohne Elemente der Ordnung* 3 *existieren keine gleichseitigen Dreiecke.*

Wir führen nun das Problem der Kennzeichnung der Teilmengen von G unter den G-metrischen Mengen zurück auf die Lösung dieses Problems für die aus vier Elementen bestehenden Mengen durch den Beweis von folgendem

Satz VIII. *Eine G-metrische Menge, von der je vier Elemente mit vier Elementen von G kongruent sind, ist mit einer Teilmenge von G kongruent.*

Wir zeigen vor allem: *Ist M eine G-metrische Menge, in der je zwei verschiedene Elemente einen Abstand der Ordnung* 2 *haben und von der je drei Elemente mit drei Elementen von G kongruent sind, so ist M mit einer Teilmenge von G kongruent.* Es sei p irgendein Element von M. Wir ordnen ihm irgendein Element p' von G zu. Da der Abstand pq die Ordnung 2 hat, so gibt es nur ein Element q' von G, das von p' den Abstand pq hat. Dieses Element q' ordnen wir dem Element q zu. Auf diese Weise ist eine eindeutige Abbildung von M auf eine Teilmenge von G definiert. Wir behaupten, daß diese Abbildung kongruent ist. Seien also q und r irgend zwei Elemente von M, q' und r' ihre Bilder in G. Wir haben zu zeigen, daß $p'q' = pq$ gilt. Dies ist auf Grund der Definition der Abbildung klar für den Fall, daß einer der Punkte q und r mit p identisch ist. Andernfalls betrachten wir das Tripel p, q, r und wissen auf Grund der Annahme, daß ein kongruentes Elemententripel $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ in G existiert. Wir unterwerfen nun G jener Kongruenz, welche $\bar{q}$ in p' überführt. (Nach Satz V gibt es nur eine solche Kongruenz.) Bei dieser Kongruenz gehen $\bar{q}$ und $\bar{r}$ in zwei Elemente über, die von p' die Abstände $\bar{q}\bar{p}$ bzw. $\bar{r}\bar{p}$, d. h. die Abstände qp bzw. rp haben. Nun gibt es aber bloß ein Element, das von p' den Abstand qp hat, nämlich q', und nur ein Element, das von p' den Abstand rp hat, nämlich r'. Es muß also das Tripel $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ mit p', q', r' kongruent sein. Also gilt $\bar{q}\bar{r} = q'r'$, und daher wegen $\bar{q}\bar{r} = qr$ die Beziehung $q'r' = qr$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Es sei nun M irgendeine G-metrische Menge, von der je vier Elemente mit vier Elementen von G kongruent sind. Wir behaupten, daß M mit einer Teilmenge von G kongruent ist. Haben je zwei verschiedene Elemente von G einen Abstand zweiter Ordnung, so ist die Behauptung eine Folge der eben bewiesenen. Wir können also annehmen, daß zwei Elemente p

und q von M existieren, deren Abstand eine Ordnung >2 hat. Wir ordnen ihnen zwei kongruente Elemente p' und q' von G zu. Ist r irgendein Element von M, so existiert, da $p'q'$ von einer Ordnung >2 ist, nach Satz I höchstens ein Element r' von G, das von p' den Abstand rp und von q' den Abstand rq hat. Anderseits muß es mindestens ein Element r' dieser Art geben. Denn nach Annahme existiert ein zu p, q, r kongruentes Elementetripel $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ von G. Es gibt nach Satz VI nur eine Kongruenz, welche $\bar{p}$ in p' und $\bar{q}$ in q' überführt, da der Abstand $\bar{p}\bar{q}$ von einer Ordnung >2 ist. Diese Kongruenz führt $\bar{r}$ in ein Element r' über das von p' den Abstand $\bar{r}\bar{p} = rp$ und von q' den Abstand $\bar{r}\bar{q} = rq$ hat. Es entspricht also jedem Element r von M genau ein Element r', welches von p' bzw. q' denselben Abstand hat wie r von p bzw. q. Dieses Element r' ordnen wir r zu und haben damit eine eindeutige Abbildung von M auf eine Teilmenge von G definiert.

Wir behaupten, daß diese Abbildung kongruent ist. Es seien nämlich r und s irgend zwei Elemente von M und r' bzw. s' ihre Bilder in G. Wir haben zu zeigen, daß $r's' = rs$ gilt. Dies ist sicher der Fall, wenn mindestens eines der Elemente r und s mit p oder q identisch ist. Andernfalls betrachten wir die vier Elemente p, q, r, s. Nach Annahme entsprechen ihnen vier kongruente Elemente $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}$ von G. Es gibt eine und, da der Abstand $\bar{p}\bar{q}$ von einer Ordnung >2 ist, nach Satz VI nur eine Kongruenz, welche $\bar{p}$ in p' und $\bar{q}$ in q' überführt. Dieselbe führt $\bar{r}$ und $\bar{s}$ in zwei Elemente über, die den Abstand $\bar{r}\bar{s} = rs$ haben und die von p' bzw. q' dieselben Abstände haben wie $\bar{r}$ und $\bar{s}$ von $\bar{p}$ bzw. von $\bar{q}$, d. h. wie r und s von p bzw. von q. Nun gibt es aber nur ein Element, das von p' und q' den Abstand rp bzw. rq hat, nämlich r', und es gibt nur ein Element, das von p' und q' den Abstand sp bzw. sq hat, nämlich s'. Es muß also also bei der Kongruenz, die $\bar{p}$ in p' und $\bar{q}$ in q' überführt, $\bar{r}$ in r' und $\bar{s}$ in s' übergehen, d. h. es gilt $\bar{r}\bar{s} = r's'$ und mithin $r's' = rs$. Damit ist Satz VIII bewiesen.

5. Über Pseudo-G-Quadrupel.

Wir haben festgestellt, daß aus der Kongruenz von je vier Elementen einer G-metrischen Menge mit einem Quadrupel von G die Kongruenz der ganzen Menge mit einer Teilmenge von G folgt. Wir wollen nun untersuchen, was aus der Kongruenz von je drei Elementen einer G-metrischen Menge mit einem Elementetripel von G für die Menge folgt, und behandeln dieses Problem zunächst für den Fall, daß die Menge aus vier Elementen besteht. Es sind zwei Fälle möglich: Entweder ist die Menge mit einem Quadrupel von G kongruent oder dies ist nicht der Fall. Im letzteren Falle bezeichnen wir die Menge als ein *Pseudo-G-Quadrupel*. So heißt also *eine*

aus vier Elementen bestehende G-metrische Menge, die nicht mit vier Elementen von G kongruent ist, von der aber je drei Elemente mit einem Elementetripel von G kongruent sind.

Wir schicken den die diesbezüglichen Hauptresultate enthaltenden Sätzen XII und XIII zunächst drei vorbereitende Sätze voran.

Satz IX. *Sind je drei von den vier Elementen p_1, p_2, p_3, p_4 einer G-metrischen Menge mit drei Elementen von G kongruent und haben zwei von ihnen einen Abstand der Ordnung 2, so sind die vier Elemente mit vier Elementen von G kongruent.*

Es sei etwa $2\,p_1\,p_2 = 0$. Dann ordnen wir p_1 und p_2 zwei Elemente p_1' und p_2' von G zu, für welche $p_1'\,p_2' = p_1\,p_2$ gilt. Es existieren höchstens zwei verschiedene Elemente $\bar{p}_3$ und $\bar{\bar{p}}_3$ von G, die von p_1' bzw. p_2' die Abstände $p_1\,p_2$ bzw. $p_2\,p_3$ haben, und höchstens zwei Elemente $\bar{p}_4$ und $\bar{\bar{p}}_4$, welche von p_1' bzw. p_2' die Abstände $p_1\,p_4$ bzw. $p_2\,p_4$ haben. Dabei liegen $\bar{p}_3$ und $\bar{\bar{p}}_3$ zueinander spiegelbildlich sowohl in bezug auf p_1' als auch in bezug auf p_2', und dasselbe gilt für $\bar{p}_4$ und $\bar{\bar{p}}_4$. Nun ist das Tripel p_1, p_3, p_4 nach Annahme mit drei Elementen von G kongruent. Wir ordnen p_1 und p_3 die Elemente p_1' bzw. $\bar{p}_3$ zu. Der Bildpunkt von p_4 muß von p_1' den Abstand $p_1\,p_4$ haben, daher entweder mit $\bar{p}_4$ oder mit $\bar{\bar{p}}_4$ identisch sein. Der Abstand $p_3\,p_4$ ist daher entweder $= \bar{p}_3\,\bar{p}_4$ oder $= \bar{p}_3\,\bar{\bar{p}}_4$. Im ersten Falle sind p_1, p_2, p_3, p_4 mit $p_1', p_2', \bar{p}_3, \bar{p}_4$, im zweiten Falle mit $p_1', p_2', \bar{p}_3, \bar{\bar{p}}_4$ kongruent. Jedenfalls sind also die Elemente p_1, p_2, p_3, p_4 mit vier Elementen von G kongruent, womit Satz IX bewiesen ist.

Satz X. *Bilden die Elemente p_1, p_2, p_3, p_4 ein Pseudo-G-Quadrupel, so gelten die Beziehungen*

$$2\,p_1\,p_2 = 2\,p_3\,p_4, \qquad 2\,p_1\,p_3 = 2\,p_2\,p_4, \qquad 2\,p_1\,p_4 = 2\,p_2\,p_3.$$

Es seien also p_1, p_2, p_3, p_4 vier Elemente, die nicht mit vier Elementen von G kongruent sind, während je drei von ihnen mit drei Elementen von G kongruent sind. Es seien p_1', p_2', p_3' bzw. p_1', p_2', p_4' zwei Tripel von G, die mit p_1, p_2, p_3 bzw. mit p_1, p_2, p_4 kongruent sind. Dann ist $p_3'\,p_4' \neq p_3\,p_4$, da sonst p_1, p_2, p_3, p_4 mit p_1', p_2', p_3', p_4', also mit vier Elementen von G kongruent wären, während sie als ein Pseudo-G-Quadrupel vorausgesetzt sind. Nun bestimmen wir zum Tripel p_1, p_3, p_4 ein kongruentes Tripel p_1', p_3', p_4^1 in G. Es ist $p_4^1 \neq p_4'$, da sonst $p_3\,p_4 = p_3'\,p_4'$ gelten würde. Es hat aber p_4^1 von p_1' den gleichen Abstand wie p_4'. Also sind p_4' und p_4^1 spiegelbildlich in bezug auf p_1', und wir sehen wegen $p_3\,p_4 = p_3'\,p_4^1$: Der Abstand $p_3\,p_4$ ist gleich dem Abstand von p_3' und dem zu p_4' in bezug auf p_1' spiegelbildlich gelegenen Element. In analoger Weise entnimmt man aus der Betrachtung eines zu p_2, p_3, p_4 kongruenten Tripels p_2', p_3', p_4^2, daß $p_3\,p_4$ gleich ist dem Abstand von p_3' und dem zu p_4' in

bezug auf p_3' spiegelbildlich gelegenen Element. Daraus folgt, daß $p_3' p_4^1 = p_3' p_4^2$ gilt. Die Elemente p_4^1 und p_4^2 sind also entweder *identisch* oder in bezug auf p_3' *spiegelbildlich*.

Der erste Fall kann nicht vorliegen, denn sonst müßte einer der beiden folgenden Unterfälle vorliegen: *Entweder* wäre $p_4' = p_4^1 = p_4^2$, d. h. das Element p_4' wäre mit seinen Spiegelbildern in bezug auf p_1' und p_2' identisch und die Abstände $p_1' p_4'$ und $p_2' p_4'$ wären von der Ordnung 2. Nach Satz IX aber kann kein Elementepaar des Pseudo-G-Quadrupels p_1, p_2, p_3, p_4 und daher auch keines der Elementepaare p_1', p_4' und p_2', p_4' einen Abstand der Ordnung 2 besitzen, also kann dieser erste Unterfall nicht vorliegen. *Oder* es wäre $p_4' \neq p_4^1 = p_4^2$. Dann existierten zwei verschiedene Elemente, nämlich p_4' und $p_4^1 = p_4^2$, die von p_1' und p_2' die gleichen Abstände besäßen. Dann müßte der Abstand $p_1' p_2'$, welcher $= p_1 p_2$ ist, die Ordnung 2 besitzen. Da p_1, p_2, p_3, p_4 ein Pseudo-G-Quadrupel bilden, ist dies nach Satz IX unmöglich; also kann auch der zweite Unterfall nicht vorliegen. Es kann also nicht die Beziehung $p_4^1 = p_4^2$ gelten und es müssen demnach die Elemente p_4^1 und p_4^2 spiegelbildlich in bezug auf p_3' sein.

Daraus folgt, daß $p_4^1 p_4^2 = 2 p_3' p_4^1 = 2 p_3' p_4^2$ gilt. Wegen $p_3 p_4 = p_3' p_4^1 = p_3' p_4^2$ ergibt sich hieraus

$$(\dagger) \qquad 2 p_3 p_4 = p_4^1 p_4^2.$$

Anderseits sind p_4^1 und p_4^2 die Spiegelbilder von p_4' an p_1' bzw. p_2'. Mithin gilt nach der Schlußbemerkung des Abschnittes 2 die Beziehung $p_4^1 p_4^2 = 2 p_1' p_2'$. Wegen $p_1' p_2' = p_1 p_2$ folgt hieraus $p_4^1 p_4^2 = 2 p_1 p_2$ und ein Vergleich dieser Beziehung mit (†) ergibt $2 p_3 p_4 = 2 p_1 p_2$, also eine der drei zu beweisenden Beziehungen. Zu den beiden anderen gelangt man ganz analog, indem man bloß statt des Paares p_1, p_2 die Paare p_1, p_3 bzw. p_1, p_4 in der Argumentation auszeichnet, oder m. a. W. durch eine Umnumerierung der Elemente des Quadrupels. Damit ist Satz X bewiesen.

Satz XI. *Sind a_1, a_2, a_3, a_4 vier Elemente der metrischen Gruppe G, deren Abstände für eine gewisse natürliche Zahl n den Beziehungen genügen*

$$n a_1 a_2 = n a_3 a_4, \qquad n a_1 a_3 = n a_2 a_4, \qquad n a_1 a_4 = n a_2 a_3,$$

dann besitzt der Abstand von mindestens zwei der vier Elemente eine Ordnung $\leqq 2n$.

In der Tat:

$n a_1 a_2 = n a_3 a_4$ bedeutet entweder $\alpha 1)$ $n a_1 - n a_3 = n a_3 - n a_4$

oder $\beta 1)$ $n a_1 - n a_3 = n a_4 - n a_3$

$n a_1 a_3 = n a_2 a_4$ bedeutet entweder $\alpha 2)$ $n a_1 - n a_3 = n a_2 - n a_4$
oder $\beta 2)$ $n a_1 - n a_3 = n a_4 - n a_2$

$n a_1 a_4 = n a_2 a_3$ bedeutet entweder $\alpha 3)$ $n a_1 - n a_4 = n a_2 - n a_3$
oder $\beta 3)$ $n a_1 - n a_4 = n a_3 - n a_2$.

Die vorausgesetzten Beziehungen haben also zur Folge, daß $[\alpha 1)$ oder $\beta 1)]$ und $[\alpha 2)$ oder $\beta 2)]$ und $[\alpha 3)$ oder $\beta 3)]$ gilt, also eine von acht Kombinationen. $\gamma_1 1)$, $\gamma_2 2)$, $\gamma_3 3)$, wo die γ_i entweder α oder β sind.

Das Zusammenbestehen von $\alpha 1)$ und $\alpha 2)$ und $\alpha 3)$ sowie das von $\beta 1)$ und $\beta 2)$ und $\beta 3)$ hat zur Folge, daß für alle sechs Abstände $a_i a_k$ die Beziehung gilt $2n a_i a_k = 0$. In diesen beiden Fällen haben also alle sechs Abstände Ordnungen $\leqq 2n$.

Das Zusammenbestehen von $\alpha 1)$ und $\beta 2)$ und $\alpha 3)$ } hat zur Folge
sowie das von $\beta 1)$ und $\beta 2)$ und $\alpha 3)$ } $2n a_1 a_2 = 2n a_3 a_4 = 0$.

Das Zusammenbestehen von $\alpha 1)$ und $\beta 2)$ und $\beta 3)$ } hat zur Folge
sowie das von $\alpha 1)$ und $\alpha 2)$ und $\beta 3)$ } $2n a_1 a_3 = 2n a_2 a_4 = 0$.

Das Zusammenbestehen von $\beta 1)$ und $\alpha 2)$ und $\alpha 3)$ } hat zur Folge
sowie das von $\beta 1)$ und $\alpha 2)$ und $\beta 3)$ } $2n a_1 a_4 = 2n a_2 a_3 = 0$.

In jedem der acht Fälle, von denen einer der Voraussetzung zufolge vorliegen muß, hat also der Abstand von mindestens einem Elementepaar $a_i a_j$ (und daher auch der Abstand des dazu fremden Elementenpaares $a_k a_l$) eine Ordnung $\leqq 2n$, womit Satz XI bewiesen ist.

Satz XII. *Ist G eine Gruppe ohne Elemente der Ordnung 2 und M eine G-metrische Menge bestehend aus vier Elementen p_1, p_2, p_3, p_4, von denen je drei mit drei Elementen von G kongruent sind, so ist, damit M ein Pseudo-G-Quadrupel sei, notwendig und hinreichend die Gültigkeit der Beziehungen*

$$p_1 p_2 = p_3 p_4, \quad p_1 p_3 = p_2 p_4, \quad p_1 p_4 = p_2 p_3.$$

Die Bedingungen sind notwendig. Wenn M ein Pseudo-G-Quadrupel ist, so gelten nach Satz X die Beziehungen

$$2p_1 p_2 = 2p_3 p_4, \quad 2p_1 p_3 = 2p_2 p_4, \quad 2p_1 p_4 = 2p_2 p_3,$$

und folglich sind, da G kein Element der Ordnung 2 enthält, auch die Bedingungen von Satz XII erfüllt. — Die Bedingungen sind hinreichend. Setzen wir nämlich voraus, sie seien für das Quadrupel M bestehend aus den Elementen p_1, p_2, p_3, p_4 erfüllt. Machen wir dann die Annahme, M sei mit vier Elementen p_1', p_2', p_3', p_4' von G kongruent, so führt dieselbe zu einem Widerspruch. Denn für die vier Elemente von G müßten ebenfalls

die Beziehungen

$$p_1' p_2' = p_3' p_4', \quad p_1' p_3' = p_2' p_4', \quad p_1' p_4' = p_2' p_3'$$

gelten. Wenden wir auf diese vier Elemente von G Satz XI für den Fall $n = 1$ an, so sehen wir, daß mindestens einer der Abstände $p_i' p_j'$ von der Ordnung 2 sein muß. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß G kein Element der Ordnung 2 enthält. Die Annahme, daß M mit einer Teilmenge von G kongruent sei, führt also auf einen Widerspruch, womit die Bedingungen von Satz XII auch als hinreichend erwiesen sind.

6. Sätze von O. Taussky über Pseudo-G-Quadrupel hinsichtlich beliebiger Gruppen.

Im vorigen Abschnitt wurden die Pseudo-G-Quadrupel für den Fall der Gruppen ohne Elemente der Ordnung 2 durch Satz XII gekennzeichnet. In diesem in seiner Gänze von Frl. O. Taussky stammenden Abschnitt[4]) wird gezeigt, daß die angegebenen Bedingungen für beliebige Gruppen nicht hinreichend sind und es werden andersartige Bedingungen angegeben, welche das Problem für beliebige Gruppen lösen.

Satz X zufolge gelten für vier Elemente p_1, p_2, p_3, p_4, die hinsichtlich der Gruppe G ein Pseudo-G-Quadrupel bilden, stets die Beziehungen

$$2p_1 p_2 = 2p_3 p_4, \quad 2p_1 p_3 = 2p_2 p_4, \quad 2p_1 p_4 = 2p_2 p_3.$$

Das Bestehen dieser Beziehungen für vier Elemente ist aber nicht hinreichend, damit dieselben ein Pseudo-G-Quadrupel bilden, wie folgendes Beispiel zeigt: G sei die zyklische Gruppe der Ordnung 4 mit dem erzeugenden Element a; dann bilden die Elemente $0, a, 2a, 3a$ ein Quadrupel, welches den obigen Bedingungen genügt.

Eine hinreichende Bedingung, damit die vier Elemente p_1, p_2, p_3, p_4 ein Pseudo-G-Quadrupel bilden, ist das Bestehen der Beziehungen

$$p_1 p_2 = p_3 p_4, \quad p_1 p_3 = p_2 p_4, \quad p_1 p_4 = p_2 p_3.$$

Diese Bedingungen sind hinsichtlich Gruppen ohne Elemente der Ordnung 2 Satz XII zufolge auch notwendig. Daß sie im allgemeinen nicht notwendig sind, erkennt man an folgendem Beispiel:

G sei die zyklische Gruppe der Ordnung 16 mit dem erzeugenden Element a, also $16a = 0$. Es seien p_1, p_2, p_3, p_4 vier Elemente mit folgenden Abständen:

$$p_1 p_2 = (a, -a), \quad p_3 p_4 = (7a, -7a), \quad p_1 p_3 = (10a, -10a),$$
$$p_2 p_4 = (2a, -2a), \quad p_1 p_4 = (a, -a), \quad p_2 p_3 = (9a, -9a).$$

[4]) Vgl. O. Taussky, Wiener Akad. Anz., Juni 1930.

Diese vier Elemente bilden ein Pseudo-G-Quadrupel, denn je drei von ihnen sind mit drei Elementen von G kongruent (das Tripel p_1, p_3, p_4 mit $0, 6a, 15a$), ohne daß die vier Elemente mit vier Elementen von G kongruent sind. Von den Bedingungen

$$p_1 p_2 = p_3 p_4, \quad p_1 p_3 = p_2 p_4, \quad p_1 p_4 = p_2 p_3$$

ist aber keine erfüllt.

Der Aufstellung von Bedingungen, die zugleich notwendig und hinreichend sind, schicken wir drei Hilfssätze voran.

1. Bestehen zwischen drei Abständen p_{ik}, p_{kj}, p_{jl}, von denen keine die Ordnung 2 haben, die beiden Relationen

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 p_{ik} + \varepsilon_2 p_{kj} + \varepsilon_3 p_{ji} = 0 \\ \eta_1 p_{ik} + \eta_2 p_{kj} + \eta_3 p_{ji} = 0 \\ \varepsilon_i = \pm 1, \quad \eta_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, 3,\end{gathered}$$

dann sind entweder alle $\eta_i = +\varepsilon_i$ oder alle $\eta_i = -\varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3$. Andernfalls ergäbe sich sofort für einen der drei Abstände die Ordnung 2.

2. Bezeichnen wir für vier Elemente p_1, p_2, p_3, p_4 einer G-metrischen Menge den Abstand von p_i und p_j mit (p_{ij}, p_{ji}), wo $p_{ji} = -p_{ij}$ und $2p_{ij} \neq 0$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, und gelten die Beziehungen

$$\begin{gathered}\varepsilon_{12} p_{12} + \varepsilon_{23} p_{23} + \varepsilon_{31} p_{31} = 0 \\ \varepsilon_{21} p_{21} + \varepsilon_{14} p_{14} + \varepsilon_{42} p_{42} = 0 \\ \varepsilon_{34} p_{34} + \varepsilon_{41} p_{41} + \varepsilon_{13} p_{13} = 0 \\ \varepsilon_{43} p_{43} + \varepsilon_{32} p_{32} + \varepsilon_{24} p_{24} = 0\end{gathered} \qquad (\varepsilon_{ij} = \pm 1), \tag{1}$$

so gilt entweder für sämtliche Koeffizienten ε_{ij} die Beziehung $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, oder es gibt mindestens zwei Koeffizienten ε_{ij}, für die $\varepsilon_{ij} = +\varepsilon_{ji}$ gilt. Angenommen nämlich, es wäre etwa bloß $\varepsilon_{34} = +\varepsilon_{43}$ und sonst $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$. Addieren wir die vier Relationen (1), so erhalten wir

$$2\varepsilon_{12} p_{12} + 2\varepsilon_{23} p_{23} + 2\varepsilon_{31} p_{31} + 2\varepsilon_{14} p_{14} + 2\varepsilon_{42} p_{42} = 0.$$

Die Summe der ersten drei Terme ist 0 infolge der ersten Gleichung von (1); die Summe der beiden letzten Terme ist infolge der zweiten Gleichung $-2\varepsilon_{21} p_{21}$, und das wäre $= 0$, was gegen die Annahme ist.

Es müssen also mindestens zwei der $\varepsilon_{ij} = +\varepsilon_{ji}$ sein.

3. Wenn unter den Voraussetzungen von 2. nicht alle $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ gewählt werden können, dürfen wir stets annehmen, daß nur für zwei Koeffizienten ε_{ij} die Beziehung $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ gilt, und zwar kann man die Numerierung stets so einrichten, daß $\varepsilon_{23} = +\varepsilon_{32}$, $\varepsilon_{14} = +\varepsilon_{41}$, alle übrigen $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ sind.

Es ist offensichtlich, daß wir von vornherein im System (1)

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_{23} = -\varepsilon_{32}, \quad \varepsilon_{13} = -\varepsilon_{31}$$

annehmen können. Sind nun nicht alle $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$, so können wir die Numerierung so wählen, daß gerade $\varepsilon_{24} = +\varepsilon_{42}$. Dann kommen nach Satz 2 nur noch drei Fälle in Betracht:

$$\begin{array}{lll} 1.\ \varepsilon_{14} = +\varepsilon_{41}, & 2.\ \varepsilon_{14} = -\varepsilon_{41}, & 3.\ \varepsilon_{14} = +\varepsilon_{41}, \\ \varepsilon_{34} = -\varepsilon_{43}, & \varepsilon_{34} = +\varepsilon_{43}, & \varepsilon_{34} = +\varepsilon_{43}. \end{array}$$

Durch Anwendung des Schlusses beim Beweis von 2. sieht man, daß die beiden ersten Fälle zu einem Widerspruch gegen die Annahmen $2p_{34} \neq 0$ bzw. $2p_{24} \neq 0$ führen. Da wegen $\varepsilon_{24} = +\varepsilon_{42}$ nach Satz 2 einer der drei Fälle eintreten muß, so muß der dritte vorliegen; d. h. es gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}p_{12} + \varepsilon_{23}p_{23} + \varepsilon_{31}p_{31} &= 0, \\ -\varepsilon_{12}p_{21} + \varepsilon_{14}p_{14} + \varepsilon_{42}p_{42} &= 0, \\ \varepsilon_{34}p_{34} + \varepsilon_{14}p_{41} - \varepsilon_{31}p_{13} &= 0, \\ \varepsilon_{34}p_{43} - \varepsilon_{23}p_{32} + \varepsilon_{42}p_{24} &= 0. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir nun die 4. Gleichung mit -1, so erhalten wir

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varepsilon_{12}p_{12} + \varepsilon_{23}p_{23} + \varepsilon_{31}p_{31} &= 0, \\ -\varepsilon_{12}p_{21} + \varepsilon_{14}p_{14} + \varepsilon_{42}p_{42} &= 0, \\ \varepsilon_{34}p_{34} + \varepsilon_{14}p_{41} - \varepsilon_{31}p_{13} &= 0, \\ -\varepsilon_{34}p_{43} + \varepsilon_{23}p_{32} - \varepsilon_{42}p_{24} &= 0, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Nun beweisen wir

Satz XIII. *Damit die aus den Elementen p_1, p_2, p_3, p_4 bestehende G-metrische Menge, in der p_i und p_j den Abstand (p_{ij}, p_{ji}) $(p_{ji} = -p_{ij}, 2p_{ij} \neq 0)$ haben, ein Pseudo-G-Quadrupel sei, ist notwendig und hinreichend, daß vier Beziehungen bestehen:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik}p_{ik} + \varepsilon_{kj}p_{kj} + \varepsilon_{ji}p_{ji} &= 0 \qquad (i \neq k \neq j \neq i), \\ \varepsilon_{ij} &= -\varepsilon_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Wir führen den Beweis indirekt, indem wir zeigen:

Wenn je drei Elemente eines G-metrischen Quadrupels mit drei Elementen von G kongruent sind (so daß also nach Satz VII die vier Beziehungen (1) bestehen), so ist, damit das Quadrupel mit einer Teilmenge von G kongruent sei, notwendig und hinreichend, daß nicht alle Koeffizienten ε_{ij} so bestimmbar seien, daß $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ gilt. Es ist also nach Satz 3 notwendig und hinreichend, daß die Koeffizienten so bestimmbar sind, daß die Beziehungen (2) gelten.

Die Bedingung ist erstens *hinreichend.*

Es möge Größen ε_{ij} geben, so daß (2) gilt, also $\varepsilon_{14} = +\varepsilon_{41}$, $\varepsilon_{23} = +\varepsilon_{32}$, alle übrigen $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$: dann sind die folgenden vier Gruppenelemente p_1', p_2', p_3', p_4' kongruent mit p_1, p_2, p_3, p_4

$$p_1' \text{ beliebig}, \quad p_2' = p_1' + \varepsilon_{12} p_{12}, \quad p_3' = p_1' - \varepsilon_{13} p_{13}, \quad p_4' = p_1' - \varepsilon_{14} p_{14}.$$

Die Bedingung ist zweitens *notwendig*.

Das heißt: wenn das Quadrupel mit einer Teilmenge p_1', p_2', p_3', p_4' von G kongruent ist, ist es stets möglich, ε_{ij} so zu bestimmen, daß in den vier Gleichungen (1) $\varepsilon_{14} = +\varepsilon_{41}$, $\varepsilon_{23} = +\varepsilon_{32}$, für alle übrigen Koeffizienten ε_{ij} die Beziehung $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ gilt. Die zwischen den Abständen p_{12}, p_{23}, p_{31} und p_{21}, p_{14}, p_{42} nach Annahme bestehenden Relationen seien

$$\varepsilon_{12} p_{12} + \varepsilon_{23} p_{23} + \varepsilon_{31} p_{31} = 0,$$
$$\varepsilon_{21} p_{21} + \varepsilon_{14} p_{14} + \varepsilon_{42} p_{42} = 0$$

und es sei $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}$.

Weiters sei ε_{12} so bestimmt, daß $p_2' = p_1' + \varepsilon_{12} p_{12}$. Da $2 p_{12} \neq 0$, kann das Element p_3' dann nur $p_3' = p_1' - \varepsilon_{13} p_{13}$, das Element $p_4' = p_1' - \varepsilon_{14} p_{14}$ sein. Da die Abbildung kongruent ist, muß nun auch $p_3' p_4' = p_3 p_4$ sein, d. h. es muß einen Koeffizienten geben, den wir mit ε_{34} bezeichnen können, der $+1$ oder -1 ist, so daß

$$p_4' - p_3' = -\varepsilon_{34} p_{34} = p_1' - \varepsilon_{14} p_{14} - p_1' + \varepsilon_{31} p_{31}.$$

Das heißt aber, die zwischen p_{13}, p_{34}, p_{41} bestehende Relation kann in die Form gebracht werden

$$\varepsilon_{34} p_{34} + \varepsilon_{14} p_{41} - \varepsilon_{31} p_{13} = 0.$$

Es ist dann auch

$$-\varepsilon_{34} p_{43} + \varepsilon_{23} p_{32} - \varepsilon_{42} p_{24} = 0.$$

Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung gezeigt und Satz XIII bewiesen.

7. Über G-metrische Mengen mit mehr als vier Elementen.

Wir haben durch Satz VIII die Frage, ob eine G-metrische Menge mit einer Teilmenge von G kongruent ist, zurückgeführt auf die Frage, ob je *vier* Elemente von M mit vier Elementen von G kongruent sind. Wir haben sodann festgestellt, daß aus der Kongruenz von je *drei* Elementen von M mit drei Elementen von G *nicht* notwendig Kongruenz von M mit einer Teilmenge von G folgt. Denn es gibt, wie wir sahen, Mengen, die aus *vier* Elementen bestehen, und die nicht mit Teilmengen von G kongruent sind, obwohl je drei ihrer Elemente mit drei Elementen von G kongruent sind, die sogenannten Pseudo-G-Quadrupel. Wir werden nunmehr

zeigen, daß für *mehr als vier* Elemente enthaltende G-metrische Mengen schon aus der Kongruenz von je *drei* Elementen mit drei Elementen von G auf die Kongruenz mit einer Teilmenge von G geschlossen werden kann. Allerdings werden wir dies mit einer gewissen Einschränkung über die Gruppe G beweisen, daß sie nämlich keine Elemente zweiter oder dritter Ordnung enthält.

Satz XIV. *Ist G eine Gruppe ohne Elemente der Ordnung 2 und 3 und ist M eine G-metrische Menge, welche mehr als vier Elemente enthält und von der je drei Elemente mit drei Elementen von G kongruent sind, dann ist M mit einer Teilmenge von G kongruent.*

Es genügt zum Beweise der Kongruenz von M mit einer Teilmenge von G nach Satz VIII aus den Voraussetzungen herzuleiten, daß je vier Elemente von M mit vier Elementen von G kongruent sind. Wäre dies nicht der Fall, so enthielte M vier Elemente, die nicht mit vier Elementen von G kongruent sind, ein Pseudo-G-Quadrupel bilden. Wir haben zum Beweise von Satz XIV demnach zu zeigen, daß eine G-metrische Menge M nicht ein Pseudo-G-Quadrupel und ein von dessen vier Elementen verschiedenes fünftes Element enthalten kann.

Wir machen also die Annahme, M enthalte ein Pseudo-G-Quadrupel, bestehend etwa aus den Elementen p_1, p_2, p_3, p_4, und ein von diesen vier Elementen verschiedenes Element p_5, und leiten aus dieser Annahme einen Widerspruch her. Wir folgern aus der Annahme zunächst folgende Zwischenbehauptung:

Aus den fünf Elementen p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 lassen sich außer dem Pseudo-G-Quadrupel p_1, p_2, p_3, p_4 noch mindestens zwei weitere Quadrupel herausgreifen, welche Pseudo-G-Quadrupel sind. Gibt es unter den vier weiteren Quadrupeln mindestens drei Pseudo-G-Quadrupel, so sind wir am Ziel. Ist dies nicht der Fall, so gibt es unter ihnen zwei Quadrupel, etwa p_1, p_2, p_3, p_5 und p_1, p_2, p_4, p_5, die beide mit Quadrupeln von G kongruent sind. Dann behaupten wir, daß die Quadrupel p_1, p_3, p_4, p_5 und p_2, p_3, p_4, p_5 Pseudo-G-Quadrupel sind. Es seien etew p_1', p_2', p_3', p_5' vier mit p_1, p_2, p_3, p_5 kongruente Elemente von G und es seien $p_1'', p_2'', p_4'', p_5''$ vier mit p_1, p_2, p_4, p_5 kongruente Elemente von G. Wir üben zunächst auf G jene Kongruenz aus, welche p_1'' in p_1' und p_2'' in p_2' überführt. Da G nach Voraussetzung keine Elemente der Ordnung 2 enthält, gibt es nach Satz VI nur *eine* solche Kongruenz und dieselbe muß offenbar p_5'' in p_5' überführen. Das Element, in welches p_4'' übergeführt wird, heiße p_4'. Es ist dann also p_1', p_2', p_4', p_5' ein mit p_1, p_2, p_4, p_5 kongruentes Quadrupel. Es muß dabei $p_3' p_4' \neq p_3 p_4$ gelten. Wäre nämlich $p_3' p_4' = p_3 p_4$, so wären p_1', p_2', p_3', p_4' vier mit p_1, p_2, p_3, p_4 kongruente Elemente von G, während solche Elemente, da p_1, p_2, p_3, p_4 ein Pseudo-G-Quadrupel bilden sollen, nicht existieren.

Wir betrachten nun das Quadrupel p_1, p_3, p_4, p_5. Es gilt $p_1' p_5' = p_1 p_5$. Aus der vorausgesetzten Kongruenz von p_1, p_2, p_3, p_5 mit p_1', p_2', p_3', p_5' folgt $p_3' p_1' = p_3 p_1$ und $p_3' p_5' = p_3 p_5$. Aus der vorausgesetzten Kongruenz von p_1, p_2, p_4, p_5 mit p_1', p_2', p_4', p_5' folgt $p_4' p_1' = p_4 p_1$ und $p_4' p_5' = p_4 p_5$. Wir machen nun die Annahme, p_1, p_3, p_4, p_5 sei mit einem Quadrupel $\bar{p}_1, \bar{p}_3, \bar{p}_4, \bar{p}_5$ von Elementen von G kongruent, und leiten aus dieser Annahme einen Widerspruch her. Wir üben auf G jene Kongruenz aus, welche $\bar{p}_1$ in p_1' und $\bar{p}_5$ in p_5' überführt. Dieselbe führt $\bar{p}_3$ in p_3' und $\bar{p}_4$ in p_4' über, denn diese Elemente haben, wie wir sahen, von p_1' und p_5' dieselben Abstände, wie p_3 und p_4 von p_1 und p_5, also wie $\bar{p}_3$ und $\bar{p}_4$ von $\bar{p}_1$ und $\bar{p}_5$ und sind, da $p_1' p_5'$ von einer Ordnung > 2 ist, die einzigen Elemente mit diesen Abständen von p_1' und p_5'. Dann muß also $\bar{p}_3 \bar{p}_4 = p_3' p_4'$ gelten, und da $p_3' p_4' \neq p_3 p_4$ ist, so gilt $\bar{p}_3 \bar{p}_4 \neq p_3 p_4$ im Widerspruch gegen die Annahme, daß p_1, p_3, p_4, p_5 mit $\bar{p}_1, \bar{p}_3, \bar{p}_4, \bar{p}_5$ kongruent ist. Da je drei Elemente von M mit drei Elementen von G kongruent sind, bilden also p_1, p_3, p_4, p_5 ein Pseudo-G-Quadrupel und analog beweist man, daß p_2, p_3, p_4, p_5 ein Pseudo-G-Quadrupel bilden, womit die Zwischenbehauptung bewiesen ist.

Wir haben also festgestellt: Wenn M außer dem Pseudo-G-Quadrupel p_1, p_2, p_3, p_4 noch das Element p_5 enthält, so gibt es unter diesen fünf Elementen noch mindestens zwei Quadrupel, die Pseudo-G-Quadrupel sind. Wir wollen etwa annehmen, daß p_1, p_3, p_4, p_5 und p_2, p_3, p_4, p_5 Pseudo-G-Quadrupel seien. (Wären zwei andere Quadrupel Pseudo-G-Quadrupel, so wäre in der folgenden Argumentation bloß die Numerierung entsprechend zu ändern.) Da G keine Elemente der Ordnung 2 enthält, so gilt, da p_1, p_2, p_3, p_4 ein Pseudo-G-Quadrupel sind, $p_3 p_4 = p_1 p_2 = p_1' p_2'$. Da p_1, p_3, p_4, p_5 ein Pseudo-G-Quadrupel sind, so gilt $p_3 p_4 = p_1 p_5 = p_1' p_5'$, und da p_2, p_3, p_4, p_5 ein Pseudo-G-Quadrupel sind, so gilt $p_3 p_4 = p_2 p_5 = p_2' p_5'$. Es gilt also $p_1' p_2' = p_1' p_5' = p_5' p_1'$, d. h. die Gruppe G enthält drei Elemente, nämlich p_1', p_2', p_5', die ein gleichseitiges Dreieck bilden. Da wir vorausgesetzt haben, daß G keine Elemente der Ordnung 3 enthält und dem Korollar von Satz VII zufolge die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks von der Ordnung 3 sein muß, so ist damit aus der Annahme ein Widerspruch gegen die Voraussetzung hergeleitet und Satz XIV bewiesen.

Wir haben übrigens aus der ad absurdum zu führenden Annahme hergeleitet, daß M drei Elemente p_1, p_2, p_5 enthält, für welche $p_1 p_2 = p_2 p_5 = p_5 p_1$ gilt. Da dieselben anderseits, wie je drei Elemente von M, mit drei Elementen von G kongruent sind, also mit einem gleichseitigen Dreieck von G kongruent sind, und die Seitenlänge eines solchen Dreiecks von der Ordnung 3 sind, so muß auch der gemeinsame Abstand $p_1 p_2 = p_2 p_5 = p_5 p_1$ die Ordnung 3 haben. Statt in Satz XIV vorauszusetzen, daß G keine Ele-

mente der Ordnung 3 enthält, würde also die Voraussetzung genügen, *daß M keine zwei Elemente enthält, deren Abstand die Ordnung* 3 *hat*, oder, was noch schwächer ist, *daß M kein gleichseitiges Dreieck enthält.*

Diese Annahme aber kann nicht ohne weiteres entbehrt werden, wie aus folgendem einfachen Beispiel von O. Taussky[5]) hervorgeht: Es sei G eine Gruppe der Ordnung 3, etwa bestehend aus den Elementen a, 0, $-a$. Es sei ferner M eine Menge irgendeiner Mächtigkeit > 3, in der je zwei verschiedene Elemente als Abstand das Element a, $-a$ von $|G|$ haben. Dann ist M eine G-metrische Menge, von der je drei Elemente mit einer Teilmenge von G, nämlich mit ganz G, kongruent sind, die aber selbst nicht mit einer Teilmenge von G kongruent ist.

Zusammenfassend können wir für Gruppen *ohne Elemente der Ordnung* 2 *und* 3 also sagen: *Eine G-metrische Menge M, von der je drei Elemente mit drei Elementen von M kongruent sind, d. h. der Relation von Satz VI genügen, ist entweder mit einer Teilmenge von G kongruent, oder sie ist ein Pseudo-G-Quadrupel, d. h. sie besteht aus genau vier Elementen* p_1, p_2, p_3, p_4, *welche den Beziehungen genügen* $p_1 p_2 = p_3 p_4$, $p_1 p_3 = p_2 p_4$, $p_1 p_4 = p_2 p_3$.

---

[5]) loc. cit. [3]). Daselbst wird auch gezeigt, *daß die Beschränkung von Satz* XIV *auf Gruppen ohne Elemente der Ordnung* 2 *entbehrlich ist.*

(Eingegangen am 30. März 1930.)

Über einige neue Extremaleigenschaften der Kugel.

Von

G. Szegö in Königsberg.

In einer Arbeit mit dem Titel „Über einige Extremalaufgaben der Potentialtheorie“ (Math. Zeitschr. **31**, S. 583—593) habe ich u. a. den folgenden Satz bewiesen (vgl. S. 586):

I. *Unter allen geschlossenen analytischen Flächen mit gegebenem Volumen hat die Kugel die kleinste Kapazität.*

Hierbei ist die Kapazität k der betreffenden Fläche F folgendermaßen erklärt worden. Es gibt bekanntlich eine eindeutig bestimmte, außerhalb von F reguläre harmonische Funktion G, welche auf F den konstanten Wert 1 besitzt und im Unendlichen eine Entwicklung von der Form

$$G = \frac{k}{r} + \frac{Y_1(\theta, \varphi)}{r^2} + \frac{Y_2(\theta, \varphi)}{r^3} + \ldots + \frac{Y_m(\theta, \varphi)}{r^{m+1}} + \ldots \tag{1}$$

hat, wo $Y_m(\theta, \varphi)$ eine Kugelflächenfunktion m-ter Ordnung bedeutet. Wir nennen G die Greensche Funktion von F. Die Kapazität ist somit gleich der „Masse“ von G im Unendlichen. Der obige Satz kann übrigens, wenn J den Rauminhalt des von F begrenzten Körpers bezeichnet, auch in der Form

$$J \leqq \frac{4\pi}{3} k^3 \tag{2}$$

ausgesprochen werden.

Heute soll eine andere neue Extremaleigenschaft der Kugel bewiesen werden, die im Schlußparagraphen der genannten Arbeit vermutungsweise ausgesprochen worden ist[1]).

II. *Unter allen geschlossenen analytischen Flächen gegebenen Durchmessers hat die Kugel die größte Kapazität.*

Unter dem Durchmesser von F ist wie gewöhnlich das Maximum der Entfernungen $|P_1 P_2|$ zu verstehen, wenn P_1 und P_2 unabhängig voneinander

[1]) Vgl. S. 592 sowie den Hinweis in Fußnote [18]) auf eine Stelle bei J. C. Maxwell.

F durchlaufen. Bezeichnet D diesen Durchmesser, so lautet die entsprechende Ungleichung

$$D \geqq 2k. \tag{3}$$

Kombiniert man (2) mit (3), so folgt hieraus ein bekannter Satz von Bieberbach[2]).

Die Ungleichung (3) gilt freilich, wie man durch Grenzübergang sofort sieht, nicht nur für analytische Flächen, sondern *für beliebige beschränkte und abgeschlossene Punktmengen*, wobei die Kapazität k im allgemeinen Falle auf die in der Potentialtheorie übliche Weise zu definieren ist[3]). Aus dem nachfolgenden Beweis geht auch hervor, daß das Gleichheitszeichen in (3) außer der Kugel nur für die abgeschlossenen Mengen eintreten kann, die aus der Vollkugel durch Entfernen einer beliebigen Anzahl von Gebieten entstehen. Sie besitzen natürlich denselben Durchmesser und dieselbe Kapazität wie die Kugel selbst.

§ 1.

Eine Integralungleichung für die Kapazität konvexer Flächen.

1. Da die Kapazität einer beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge eine monoton wachsende (nicht abnehmende) Mengenfunktion ist, so genügt es, die Ungleichung (3) für konvexe Flächen zu beweisen. (Der Durchmesser bleibt beim Übergang zur konvexen Hülle unverändert.) Dieser Beweis beruht auf einer eigenartigen Ungleichung für die Kapazität, aus der sich auch manche anderen Schlüsse ziehen lassen (vgl. § 2). Das Wesentliche an den folgenden Überlegungen ist die Benutzung der zu der gegebenen, als konvex vorausgesetzten Fläche F gehörigen *Parallelflächen*. Die Schar derselben tritt hier an die Stelle der Äquipotentialflächen, die beim Beweis von I a. a. O. eine Hauptrolle spielten.

Wir nehmen zunächst an, daß F eine *analytische* konvexe Fläche ist, welche den Nullpunkt in ihrem Inneren enthält. Es sei $H(\alpha, \beta, \gamma)$ die Stützebenenfunktion von $F = F_0$. Wir bezeichnen mit h einen Parameter $h > -\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ genügend klein) und F_h sei die konvexe Fläche mit der Stützebenenfunktion

$$H(\alpha, \beta, \gamma) + h\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \tag{4}$$

Es seien ferner $D(h)$ und $k(h)$ der Durchmesser bzw. die Kapazität von F_h.

---

[2]) Vgl. etwa W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 123. — Im folgenden wird dieses Buch mit K. K. zitiert.

[3]) Vgl. O. D. Kellogg, Foundations of potential theory, Berlin 1929, Chapter XI, 19, S. 330.

Ich behaupte dann:

(5) a) $D(h) = D(0) + 2h = D + 2h;$

(6) b) $\frac{dk(h)}{dh} = k'(h) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{F_h}\left(\frac{\partial G_h}{\partial n}\right)^2 d\sigma.$

Hier bezeichnet G_h die zu der Fläche F_h gehörige Greensche Funktion.

Die Behauptung a) ist eine unmittelbare Folge der Definition des Durchmessers. Bezeichnen nämlich P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte von F_h, $h > 0$, und P_1', P_2' die entsprechenden, auf der gleichen Normalen gelegenen Punkte von F, so ist

$$|P_1P_2| \leqq |P_1'P_2'| + 2h \leqq D + 2h,$$

so daß

$$D(h) \leqq D + 2h$$

gilt. Weiterhin seien P_1' und P_2' auf F so gewählt, daß $|P_1'P_2'| = D$ ist. Dann stimmt $P_1'P_2'$ der Richtung nach mit der Normale in P_1' und P_2' überein; wenn also P_1 und P_2 analoge Bedeutung wie oben haben, so gilt

$$D + 2h = |P_1'P_2'| + 2h = |P_1P_2| \leqq D(h),$$

woraus a) folgt.

Zum Beweis von b) setzen wir $h = 0$ voraus; wir schreiben dann $G_0 = G$, $k(0) = k$. Es sei $g(x, y, z)$ diejenige außerhalb von F reguläre harmonische Funktion, welche auf F die Randbedingung

(7) $$g = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2} = -\frac{\partial G}{\partial n}$$

erfüllt (n ist die nach außen gerichtete Normale), die ferner im Unendlichen „massenlos“ ist, d. h. eine Entwicklung von der Form

$$g = c + \frac{Y_1(\theta, \varphi)}{r^2} + \frac{Y_2(\theta, \varphi)}{r^3} + \cdots$$

besitzt. Die Konstante c hat dann, wie wir zeigen wollen, den Wert

(8) $$c = \frac{1}{4\pi k}\iint\limits_F\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^2 d\sigma.$$

Durch Anwendung der Greenschen Formel in dem von F und von einer großen Kugel K begrenzten Bereiche folgt nämlich

$$\iint\limits_F\left(G\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma = \iint\limits_K\left(G\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma$$

(die Normale ist in beiden Integralen nach außen gerichtet). Auf F gilt nun $G = 1$, ferner hat man laut Voraussetzung

$$\iint\limits_F \frac{\partial g}{\partial n}\,d\sigma = 0,$$

so daß die linke Seite der obigen Gleichung $\iint_F \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^2 d\sigma$ wird. Die rechte Seite ist aber gleich $4\pi c k$, denn der Ausdruck

$$G\frac{\partial g}{\partial n} - (g-c)\frac{\partial G}{\partial n}$$

für $r \to \infty$ wie r^{-4} gegen Null geht und

$$-\iint_K \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = 4\pi k$$

ist. (Diese Schlußweise zeigt auch: Eine außerhalb von F harmonische Funktion, welche auf F die Randbedingung (7) erfüllt und im Unendlichen den Wert (8) besitzt, muß im Unendlichen „massenlos" sein.)

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$; wir bezeichnen mit x, y, z einen beliebigen Punkt von F, ferner mit

$$x' = x - \varepsilon \frac{G_x}{\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}},$$

$$y' = y - \varepsilon \frac{G_y}{\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}},$$

$$z' = z - \varepsilon \frac{G_z}{\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}}$$

die Koordinaten des entsprechenden Punktes von F_ε. Für die außerhalb von F reguläre Funktion

$$\bar{G}(x,y,z) = G + \varepsilon(g-c)$$

gilt dann

$$\begin{aligned}\bar{G}(x',y',z') &= G(x,y,z) - \varepsilon\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2} + \varepsilon(g-c) + O(\varepsilon^2)\\ &= 1 - \varepsilon c + O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

wo das Restglied $O(\varepsilon^2)$ durch ε^2 dividiert für $\varepsilon \to +0$ ***gleichmäßig*** beschränkt bleibt. Wir betrachten nun die harmonische Funktion

$$\bar{G} - \frac{k}{k(\varepsilon)} G_\varepsilon,$$

wobei G_ε die Greensche Funktion von F_ε ist. Sie ist im Unendlichen massenlos und gleich Null; außerdem hat auf F_ε sowohl ihr Minimum als auch ihr Maximum die Form

$$1 - \varepsilon c - \frac{k}{k(\varepsilon)} + O(\varepsilon^2).$$

Daraus folgt

$$\frac{k}{k(\varepsilon)} = 1 - \varepsilon c + O(\varepsilon^2),$$

d. h.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{k(\varepsilon) - k}{\varepsilon} = c\,k = \frac{1}{4\pi} \iint_F \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^2 d\sigma .$$

Da die Fläche F analytisch ist, so lassen sich die Funktionen G und g ein Stück ins Innere von F analytisch fortsetzen[4]). Die vorige Überlegung bleibt somit auch für genügend kleine negative ε, $\varepsilon \to -0$, richtig, womit b) bewiesen ist.

2. Aus b) folgt wegen der Schwarzschen Ungleichung, wenn O_h die Oberfläche von F_h bedeutet,

$$[4\pi k(h)]^2 = \left(\iint_{F_h} \frac{\partial G_h}{\partial n}\, d\sigma\right)^2 \leqq O_h \iint_{F_h} \left(\frac{\partial G_h}{\partial n}\right)^2 d\sigma = 4\pi k'(h)\, O_h .$$

Also erhält man durch Integration zwischen den Grenzen 0 und ∞

$$\boxed{\frac{1}{k} \geqq 4\pi \int_0^\infty \frac{dh}{O_h}} . \tag{9}$$

Das ist die gesuchte Integralungleichung. Ihre Gültigkeit kann sofort für den Fall ausgedehnt werden, wo F die Randfläche eines beliebigen konvexen Körpers mit mindestens einem inneren Punkte ist. Wählt man nämlich diesen Punkt zum Koordinatenanfangspunkt und bezeichnet ε eine genügend kleine positive Zahl, so gibt es nach einem Satz von Minkowski[5]) eine konvexe analytische Fläche $\overline{F}$, welche in geläufiger Bezeichnung die Ungleichungen

$$(1-\varepsilon)\,F < \overline{F} < F \tag{10}$$

erfüllt. Für die entsprechenden Oberflächen O_h und $\overline{O}_h$ hat man dann $\overline{O}_h < O_h$, so daß wegen (9)

$$4\pi \int_0^\infty \frac{dh}{O_h} < 4\pi \int_0^\infty \frac{dh}{\overline{O}_h} \leqq \frac{1}{\overline{k}}$$

ist, wenn $\overline{k}$ die Kapazität von $\overline{F}$ bedeutet. Infolge (10) gilt schließlich

$$(1-\varepsilon)\,k < \overline{k},$$

d. h.

$$4\pi \int_0^\infty \frac{dh}{O_h} < \frac{1}{1-\varepsilon}\,\frac{1}{k},$$

woraus für $\varepsilon \to 0$ die Behauptung folgt.

---

[4]) Vgl. L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Encyklop. d. math. Wiss. II C 3, S. 244.

[5]) Gesammelte Abhandlungen 2, S. 233—235.

§ 2.
Folgerungen.

Aus (9) ergibt sich ohne Schwierigkeit der zu beweisende Satz II. Wir schicken zunächst einige bekannte Tatsachen aus der Theorie der konvexen Körper voraus.

Im folgenden bezeichnen wir bzw. mit J_h, O_h, M_h den Rauminhalt, die Oberfläche und das Integral der mittleren Krümmung von F_h; wir setzen ferner $J_0 = J$, $O_0 = O$, $M_0 = M$. Es ist [6])

$$(11) \qquad \begin{cases} J_h = J + Oh + Mh^2 + \frac{4\pi}{3}h^3, \\ O_h = O + 2Mh + 4\pi h^2, \\ M_h = M + 4\pi h. \end{cases}$$

Ferner gelten die Minkowskischen Ungleichungen

$$(12) \qquad O^2 \geqq 3JM, \qquad M^2 \geqq 4\pi O,$$

deren Kombination die isoperimetrische Ungleichung

$$(13) \qquad O^3 \geqq 36\pi J^2$$

liefert. Die Zahl $\frac{1}{4\pi}M$ ist gleich dem Mittelwert der Stützebenenfunktion auf der Einheitskugel [7]). Bedeutet also D den Durchmesser von F, so gilt [8])

$$(14') \qquad D \geqq \frac{1}{2\pi}M,$$

also wegen der zweiten Ungleichung (12)

$$(14'') \qquad D \geqq \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}O^{\frac{1}{2}}$$

und wegen (13)

$$(14''') \qquad D \geqq \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}.$$

Die letzte Ungleichung stammt von Bieberbach [2]). In der zweiten Ungleichung (12) sowie in den Ungleichungen (13), (14') bis (14''') kann das Gleichheitszeichen nur für die Kugel eintreten.

Aus (9) erhält man nun mit Rücksicht auf (14'')

$$\frac{1}{k} \geqq 4\int_0^\infty \frac{dh}{(D+2h)^2} = \frac{2}{D},$$

---

[6]) Vgl. etwa K. K., S. 102.

[7]) K. K., S. 110, Formel (9).

[8]) G. Pólya, Über geometrische Wahrscheinlichkeiten an konvexen Körpern, Berichte der Sächsischen Ges. der Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse, **69** (1917), S. 457–458; vgl. insbes. S. 458.

d. h. den Satz II. Eine schärfere Ungleichung ergibt sich durch Benutzung der zweiten Ungleichung (12):

$$\frac{1}{k} \geqq (4\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dh}{M_h^2} = (4\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dh}{(M + 4\pi h)^2} = \frac{4\pi}{M},$$

d. h.

$$M \geqq 4\pi k. \tag{15}$$

III. *Unter allen konvexen Flächen mit gegebenem Integral der mittleren Krümmung hat die Kugel die größte Kapazität.*

Eine noch schärfere Ungleichung ergibt sich aus (9), indem man den genauen Ausdruck (11) für O_h einträgt. Man erhält auf diese Weise

$$\frac{1}{k} \geqq 4\pi \int_0^\infty \frac{dh}{O + 2Mh + 4\pi h^2}.$$

Durch Auswertung des letzten Integrals folgt

$$\boxed{\frac{1}{k} \geqq \frac{4\pi}{M} \frac{1}{2\lambda} \log \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \quad \text{mit} \quad \lambda = \sqrt{1 - \frac{4\pi O}{M^2}}}. \tag{16}$$

Man hat $0 \leqq \lambda < 1$.

Durch Kombination von (16) mit (2) geht die Ungleichung

$$\frac{4\pi}{M} \frac{1}{2\lambda} \log \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \leqq \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} J^{-\frac{1}{3}}$$

hervor, die freilich keineswegs neu ist. Sie folgt vielmehr unmittelbar aus der leicht beweisbaren Ungleichung

$$\frac{1}{2\lambda} \log \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \leqq \frac{1}{(1-\lambda^2)^{\frac{2}{3}}} \qquad (0 \leqq \lambda < 1)$$

durch Berücksichtigung der ersten Ungleichung (12).

Schließlich sei noch bemerkt, daß man analoge Ungleichungen für die Greensche Konstante c aufstellen kann, die in der eingangs erwähnten Arbeit auf S. 587 erklärt worden ist. Sie bilden jedoch eine unmittelbare Folge der hier behandelten Abschätzungen der Kapazitätskonstante k, da aus der a. a. O. S. 587 bewiesenen Ungleichung (7) stets $k \geqq c$ folgt.

(Eingegangen am 14. Juni 1930.)

Allgemeine lineare Differenzengleichungen mit asymptotisch konstanten Koeffizienten.

Von

S. Bochner in München.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

§ 1. Fragestellung 426
§ 2. Überleitende Betrachtungen 428
§ 3. Ein Hilfssatz 431
§ 4. Exponentialpolynome 434
§ 5. Die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten 437
§ 6. Ein Approximationsverfahren 441
§ 7. Die Gleichungen mit asymptotisch konstanten Koeffizienten . 445
Anhang. Auflösungsformeln für Gleichungen mit speziellen Spannen und konstanten Koeffizienten 448

§ 1.

Fragestellung.

Poincaré[1]) hat als erster Differenzengleichungen der Gestalt

$$\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho(x)\, u(x+\varrho) = 0, \tag{1}$$

in welchen die Koeffizienten asymptotisch konstant sind,

$$\lim_{x\to+\infty} c_\varrho(x) = c_\varrho \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, r) \tag{2}$$

daraufhin untersucht, was über das asymptotische Verhalten ihrer Lösungen für $x \to +\infty$ ausgesagt werden könne. Diese Fragestellung war seither Gegenstand mehrerer Arbeiten. Unter andern hat Herr Perron[2]) auch

[1]) Journal of math. 7 (1885), S. 237—258.

[2]) a) Crelle 147 (1917), S. 36—53; b) Crelle 161 (1929), S. 42—63.

Gleichungssysteme der Gestalt

$$u_\varrho(x+1) = \sum_{k=1}^{r} c_{\varrho k}\, u_k(x) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r), \tag{3}$$

in welchen die Koeffizienten asymptotisch konstant sind,

$$\lim_{x \to +\infty} c_{\varrho k}(x) = c_{\varrho k}, \tag{4}$$

in Betracht gezogen. Solche Gleichungssysteme sind allgemeiner als einzelne Gleichungen (1); denn man kann jede Gleichung (1) auf ein Gleichungssystem (3) zurückführen. Außerdem sind neben den homogenen Gleichungen (1) und (3) auch die dazugehörigen (umfassenderen) inhomogenen Gleichungen

$$\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho(x)\, u(x+\varrho) = \varphi(x) \tag{5}$$

und

$$u_\varrho(x+1) = \sum_{k=1}^{r} c_{\varrho k}(x)\, u_k(x) + \varphi_\varrho(x) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r) \tag{6}$$

untersucht worden.

Den Gleichungen (5) und (6) stellen wir die wesentlich allgemeineren Gleichungen

$$\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho(x)\, u(x+\delta_\varrho) = \varphi(x) \tag{7}$$

und

$$u_\varrho(x+\omega_\varrho) = \sum_{k=1}^{r} c_{\varrho k}(x)\, u_k(x) + \varphi_\varrho(x) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r) \tag{8}$$

gegenüber. Als „Spannen“ δ_ϱ und ω_ϱ lassen wir irgendwelche positive reelle Zahlen ohne jede arithmetische Einschränkung zu. In bezug auf ihre Größenanordnung setzen wir fest

$$0 \leqq \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_r, \tag{9}$$

$$0 < \omega_1 \leqq \omega_2 \leqq \ldots \leqq \omega_r. \tag{10}$$

Unter „speziellen Spannen“ werden wir die auf die Gleichungen (5) und (6) führenden Werte

$$\delta_\varrho = \varrho \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, r), \tag{11}$$

$$\omega_\varrho = 1 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r) \tag{12}$$

verstehen.

Der Übergang von den speziellen zu den allgemeinen Spannen ist nicht eine bloß äußerliche Verallgemeinerung. Versucht man es, die auf (5) und (6) bezüglichen Betrachtungen zu übertragen, so stößt man auf eine Schwierigkeit, die sich nicht direkt beheben läßt. Sie besteht im folgenden. Bei der Untersuchung von (5) und (6) betrachtet man das Polynom

$$e(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_r t^r \tag{13}$$

bzw. die Determinante

$$d(t) = \begin{vmatrix} t - c_{11}, & -c_{12}, & \dots, & -c_{1r} \\ -c_{21}, & t - c_{22}, & \dots, & -c_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -c_{r1}, & -c_{r2}, & \dots, & t - c_{rr} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

und benutzt, daß sich $e(t)$, für $c_r \neq 0$, in ein Produkt

$$c_r(t - t_1)(t - t_2)\dots(t - t_r) \tag{15}$$

zerlegen läßt, bzw. daß sich $d(t)$ durch eine lineare Transformation

$$\bar{u}_\varrho(x) = \sum_{k=1}^{r} a_{\varrho k} u_k(x) \qquad (\varrho = 1, 2, \dots, r) \tag{16}$$

auf eine passende Normalform, etwa auf die Normalform

$$c_{\varrho k} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho < k, \tag{17}$$

bringen läßt. Das Analogon zu (13) für allgemeine Spannen ist das „irreguläre“ Polynom

$$e(t) = c_0 t^{\delta_0} + c_1 t^{\delta_1} + \dots + c_r t^{\delta_r}, \tag{18}$$

oder, nach Einführung der uniformisierenden Variablen $t = e^\tau$, das Exponentialpolynom

$$E(\tau) = c_0 e^{\delta_0 \tau} + c_1 e^{\delta_1 \tau} + \dots + c_r e^{\delta_r \tau}. \tag{19}$$

Für allgemeine Spannen gibt es aber nunmehr kein brauchbares Analogon zur Produktdarstellung (15). — Entsprechendes tritt für Gleichungssysteme ein. Ein Gleichungssystem der Gestalt (8) mit allgemeinen ω's wird durch eine lineare Transformation überhaupt nicht in ein ähnlich gebautes Gleichungssystem übergeführt, läßt sich also erst recht nicht auf „Normalformen“ zurückführen.

Wir werden aber diese Schwierigkeit umgehen und den wichtigsten Sätzen auch für die allgemeinen Gleichungen (7) und (8) Geltung verschaffen. In der vorliegenden Note werden wir nur die einzelne Gleichung (7) untersuchen, und in einer zweiten Note werden wir die Gleichungen (8) und noch allgemeinere Gleichungssysteme behandeln.

§ 2.

Überleitende Betrachtungen.

Wir betrachten die Poincarésche Gleichung (1) auf einer „rechten“ Halbgeraden, etwa für $0 \leqq x$. Sind alle Koeffizienten daselbst konstant, $c_\varrho(x) = c_\varrho$, so besteht die Gesamtheit der Lösungen im allgemeinen aus der Gesamtheit der Funktionen

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \pi_\varrho(x) t_\varrho^x, \tag{20}$$

wobei die Zahlen t_ϱ die Nullstellen von $e(t)$ bedeuten. Eine Abweichung tritt nur ein, falls mehrfache Nullstellen vorkommen. Ist etwa $t_1 = t_2 = \ldots = t_\mu$, so tritt in der Summe (20) an Stelle des Summanden

$$\sum_{\varrho=1}^{\mu} \pi_\varrho(x)\, t_\varrho^x$$

der Ausdruck

$$\sum_{\varrho=1}^{\mu} x^{\varrho-1} \pi_\varrho(x)\, t_\varrho^x .$$

Die $\pi(x)$ sind willkürlich, und zwar sind es: a) willkürliche Konstanten, falls die Variable x nur diskrete Werte im Abstande 1, etwa die Werte $0, 1, 2, \ldots$, durchläuft (diskreter Fall); b) willkürliche Funktionen mit der Periode 1, $\pi(x+1) = \pi(x)$, falls etwa die Variable x alle positiven reellen Werte durchläuft (kontinuierlicher Fall). Im letzteren Falle gehören die Funktionen $\pi(x)$ zur selben „Regularitätsklasse" wie die gesuchten Lösungen. Das heißt, fragt man etwa nach der Gesamtheit der Lösungen, welche stückweise stetig oder im Endlichen beschränkt sind, so sind die $\pi(x)$ irgendwelche stückweise stetige oder überall[3]) beschränkte Funktionen.

Sind die Nullstellen t_ϱ alle einfach und sogar dem absoluten Betrage nach verschieden:

$$|t_1| < |t_2| < \ldots < |t_r|, \tag{21}$$

so ist im diskreten Falle für jede Lösung $u(x)$, welche für große x nicht verschwindet, der Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{u(x+1)}{u(x)} \tag{22}$$

vorhanden und gleich einer der Zahlen t_ϱ; im kontinuierlichen Falle bedarf es gewisser Vorbehalte in der Formulierung. Die Einschränkung (21) ist derart wirksam, daß, wie Poincaré loc. cit. gezeigt hat, im diskreten Falle der angegebene Grenzwertsatz auch für nur asymptotisch konstante Koeffizienten bestehen bleibt; der kontinuierliche Fall ist nicht untersucht worden. Herr Perron[4]) hat dann den Poincaréschen Satz (neuerdings[5]) auch für Gleichungssysteme und auch für nichtlineare Störungsglieder) dahin präzisiert, daß zu jedem t_ϱ eine Lösung $u^\varrho(x)$ vorhanden ist, für welche

$$\lim_{x \to \infty} \frac{u^\varrho(x+1)}{u^\varrho(x)} = t_\varrho . \tag{23}$$

---

[3]) Eine im Endlichen beschränkte Funktion, welche periodisch ist, ist überall beschränkt.

[4]) Crelle **137** (1910), S. 6–64.

[5]) Vgl. [2]), insbesondere b).

Man kann sogar diese Lösungen $u^{\varrho}(x)$ derart konstruieren, daß sie ein Fundamentalsystem bilden, aus dem man jede andere Lösung als eine lineare Verbindung mit Koeffizienten $\pi(x)$ herstellen kann.

Wenn man aber die Einschränkung (21) fallen läßt, kann man über das asymptotische Verhalten des Quotienten

$$\frac{u(x+1)}{u(x)} \tag{24}$$

nichts Derartiges mehr aussagen. Herr Perron[4]) hat dies eingehend an Beispielen illustriert, und weiterhin dargelegt, daß es, wenn (21) nicht gilt, angebracht ist, den Grenzwert

$$\limsup_{x\to\infty} \sqrt[x]{|u(x)|} \tag{25}$$

zu betrachten[6]). Man kann dann auch inhomogene Gleichungen untersuchen, und der kontinuierliche Fall ist nicht im Nachteil gegenüber dem diskreten.

Nunmehr betrachten wir die Gleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{r} c_{\varrho}\, u_{\varrho}(x+\delta_{\varrho}) = 0 \tag{26}$$

und ihre charakteristische Funktion $E(\tau)$. Für spezielle Spannen sind (vorausgesetzt, daß $c_r \neq 0$) durch die Produktdarstellung

$$E(\tau) = c_r(e^{\tau}-t_1)(e^{\tau}-t_2)\dots(e^{\tau}-t_r) \tag{27}$$

die „Wurzelzahlen" t_{ϱ} eindeutig definiert. Für allgemeine Spannen gibt es kein Analogon zu (27), also auch keine „Wurzelzahlen", also auch kein Analogon zur Bedingung (21). Auch wenn man „zufällig" $E(\tau)$ in ein Produkt

$$c_r(e^{\Omega_1\tau}-T_1)(e^{\Omega_2\tau}-T_2)\dots(e^{\Omega_\varrho\tau}-T_\varrho) \tag{28}$$

mit reellen Exponenten Ω zerlegen kann, gibt es kein Analogon zu (21). Denn diese Produktzerlegung ist nicht eindeutig. Man kann z. B. $e^{\Omega\tau}-T$ durch $\left(e^{\frac{1}{2}\Omega\tau}-\sqrt{T}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\Omega\tau}+\sqrt{T}\right)$ ersetzen. Infolgedessen werden wir nicht über den Quotienten (24), sondern über den Grenzwert (25) Aussagen machen. Außerdem werden wir Stabilitätsfragen und das eventuelle Vorhandensein des Grenzwerts

$$\lim_{\tau\to\infty} u(x)$$

erörtern.

---

[6]) Herr F. Lettenmeyer hat in einer in den Münchener Berichten im Druck befindlichen Arbeit den schärferen Grenzwert $\lim \sqrt[x]{|u(x)|}$, sogar auch $\lim \sqrt[x]{u(x)}$, in Betracht gezogen.

Für die Lösungen der Gleichung (26) gibt es kein Analogon zur Formel (20). Das heißt es gibt keinen analogen Aufbau aus endlich vielen unabhängigen Lösungen, und es werden daher alle Aussagen hinfällig, welche die „Anzahl“ der Lösungen von einer bestimmten Eigenschaft betreffen. Es liegt dies am folgenden. Die Funktiou $E(\tau)$ hat im allgemeinen unendlich viele Nullstellen $\tau_1, \tau_2, \ldots$. Ihre Vielfachheiten seien $\mu_1, \mu_2, \ldots$. Jede konvergente Summe der Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu 1} + a_{\nu 2} x + \ldots + a_{\nu \mu_\nu} x^{\mu_\nu - 1}) e^{\tau_\nu x} \tag{29}$$

ist eine Lösung von (26). Ohne uns um die Frage zu kümmern, ob dies alle Lösungen sind, betrachten wir die Beziehungen zwischen den Ausdrücken (29) und (20). Für spezielle Spannen bestehen die τ_ν aus den Zahlen

$$\log t_\varrho + 2 m \pi \sqrt{-1} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r;\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{30}$$

Sind insbesondere die Nullstellen t_ϱ von $e(t)$ einfach, so sind es auch die Nullstellen τ_ν von $E(\tau)$. Den Ausdruck (29) kann man dann schreiben:

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{\varrho m} e^{x(\log t_\varrho + 2 m \pi \sqrt{-1})} \Big).$$

Führt man die Funktionen

$$\pi_\varrho(x) = \sum_m b_{\varrho m} e^{2 m \pi \sqrt{-1} x}$$

ein, so ist die Darstellung (20) gewonnen. Hiermit ist die Formel (20) als eine Eigentümlichkeit der speziellen Spannen erkannt.

Mit dem Versagen der Formel (20) hängt es zusammen, daß für allgemeine Spannen der diskrete Fall keine Sonderstellung genießt. Die sachgemäße Übertragung des diskreten Falles auf allgemeine Spannen besteht darin, daß man als Werte x nur diejenigen Zahlen zuläßt, welche sich in der Gestalt

$$m_0 \delta_0 + m_1 \delta_1 + \ldots + m_r \delta_r \tag{31}$$

mit ganzen Zahlen m_ϱ darstellen lassen. Diese Werte x sind aber für allgemeine Spannen überall dicht verteilt. Zur Festlegung einer Lösung genügt es daher auch im diskreten Falle nicht mehr, sie in endlich vielen (etwa konsekutiven) Punkten zu kennen.

§ 3.

Ein Hilfssatz.

1. Alle Zahlen sind komplexe Zahlen, alle Funktionen sind komplexwertig; nur die unabhängige Variable x ist reell.

2. Die mit den Spannen δ_ϱ gebildeten Zahlen (31) ordnen wir in eine feste Folge und bezeichnen sie mit

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots; \quad \lambda_0 = 0. \tag{32}$$

3. Unter einer Punktmenge $\mathfrak{P}$ verstehen wir eine Punktmenge des Intervalls $-\infty < x < +\infty$, welche so beschaffen ist, daß mit irgendeinem Punkte $\bar{x}$ auch die Gesamtheit der Punkte

$$\bar{x} + \lambda_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu $\mathfrak{P}$ gehört. Jede solche Punktmenge $\mathfrak{P}$ erstreckt sich nach beiden Seiten ins Unendliche. Auf einer Punktmenge $\mathfrak{P}$ werden wir dieselben Bezeichnungen wie auf dem Gesamtintervall verwenden, also z. B. mit

$$x_0 \leqq x < x_1 \tag{33}$$

die Gesamtheit derjenigen Punkte aus $\mathfrak{P}$ bezeichnen, welche im Intervall (33) enthalten sind und unter $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ den Grenzwert verstehen, welchem (eventuell) die Funktion $F(x)$ zustrebt, wenn die Variable x auf der Punktmenge $\mathfrak{P}$ gegen $-\infty$ konvergiert.

4. Unseren nachfolgenden Betrachtungen liegt irgendeine Punktmenge $\mathfrak{P}$ zugrunde. Unter einer Funktion $f(x)$ werden wir eine Zahlenverteilung auf $\mathfrak{P}$ verstehen, von der, sofern aus dem Zusammenhang nichts Gegenteiliges zu ersehen ist, über das Verhalten im Endlichen nur vorausgesetzt wird, daß sie in jedem Punkte von $\mathfrak{P}$ einen eindeutigen endlichen Wert hat und auf jedem endlichen Intervall beschränkt ist:

$$|f(x)| \leqq g(x_0) \quad \text{für} \quad -x_0 \leqq x \leqq x_0.$$

5. Unter der „rechten Stufe“ von $f(x)$ verstehen wir die Zahl

$$\mathfrak{R}(f) = \limsup_{x \to +\infty} \frac{\log |f(x)|}{x} = R. \tag{34}$$

Sie kann auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein. Letzteres tritt z. B. ein, wenn $f(x)$ für alle großen positiven x verschwindet. Ähnlich definieren wir die „linke Stufe“:

$$\mathfrak{L}(f) = \liminf_{x \to -\infty} \frac{\log |f(x)|}{x} = -\limsup_{x \to +\infty} \frac{\log |f(-x)|}{x} = L. \tag{35}$$

Und als „Gesamtstufe“ von $f(x)$ definieren wir das Zahlenpaar

$$\mathfrak{G}(f) = (L, R). \tag{36}$$

Über solche Zahlenpaare vereinbaren wir die Schreibweise:

a) $(L, R) < (L', R')$ falls $L > L'$ und $R < R'$

b) $(L, R) \leqq (L', R')$ falls $L \geqq L'$ und $R \leqq R'$.

Wenn wir also schreiben

$$\mathfrak{G}(f) < (\alpha, \beta),$$

so meinen wir

$$\mathfrak{L}(f) > \alpha, \quad \mathfrak{R}(f) < \beta.$$

Man verifiziert leicht folgendes:

1. $\mathfrak{R}(cf) = \mathfrak{R}(f)$ falls $c \neq 0$,
2. $\mathfrak{R}(f(x+\delta)) = \mathfrak{R}(f(x))$.
3. Aus $\mathfrak{R}(f) \leqq \alpha$ und $\mathfrak{R}(g) \leqq \alpha$ folgt $\mathfrak{R}(f+g) \leqq \alpha$.
4. Aus $\mathfrak{R}(f) < \mathfrak{R}(g)$ folgt $\mathfrak{R}(f+g) = \mathfrak{R}(g)$.

Entsprechendes gilt für die linke Stufe mit „$>$“ statt „$<$“.

6. Ist $\mathfrak{G}(f) < (-\infty, +\infty)$, so gibt es zwei Zahlen $\underline{b}$ und $\overline{b}$ mit der Bedingung $\underline{b} \leqq \overline{b}$ und eine Schranke A, so daß

$$|f(x)| \leqq A e^{\overline{b}x} \quad \text{für} \quad x \geqq 0, \tag{37}$$

$$|f(x)| \leqq A e^{\underline{b}x} \quad \text{für} \quad x \leqq 0. \tag{38}$$

Diese beiden Relationen wollen wir abgekürzt schreiben

$$|f(x)| \leqq A(e^{\underline{b}x}, e^{\overline{b}x}). \tag{39}$$

Wir werden auch sagen, daß die Funktion $f(x)$ der Eigenschaft $\mathfrak{G}$ mit den Exponenten $\underline{b}$ und $\overline{b}$ und der Schranke A genügt.

Man findet leicht folgendes: Genügt eine Funktion $f(x)$ der Relation (37) bzw. (38) nur für $x_0 \leqq x$ bzw. $x \leqq x_1$, so genügt sie bereits der Eigenschaft $\mathfrak{G}$ mit den Exponenten $\underline{b}$ und $\overline{b}$. Weiterhin: Zugleich mit $f(x)$ bzw. $f(x)$ und $g(x)$ genügen auch $cf(x)$, $f(x+\delta)$ bzw. $f(x)+g(x)$ der Eigenschaft $\mathfrak{G}$, sogar mit denselben Exponenten.

Hilfssatz I. Voraussetzung: *Gegeben seien*

1. *reelle Zahlen $\underline{b}$ und $\overline{b}$, für welche $\underline{b} \leqq \overline{b}$, und beliebige Zahlen γ_{λ_n}, für welche*

$$\sum_{\lambda_n \geqq 0} |\gamma_{\lambda_n}| e^{\overline{b}\lambda_n} + \sum_{\lambda_n \leqq 0} |\gamma_{\lambda_n}| e^{\underline{b}\lambda_n} \tag{40}$$

endlich ist, und

2. *eine Funktion $\varphi(x)$ und eine Schranke A, so daß*

$$|\varphi(x)| \leqq A(e^{\underline{b}x}, e^{\overline{b}x}). \tag{41}$$

Behauptung: *Es gibt ein A', so daß*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{\lambda_n} \varphi(x+\lambda_n)| \leqq A'(e^{\underline{b}x}, e^{\overline{b}x}). \tag{42}$$

Für A' kann man die Zahl $3AC$ einsetzen, wobei C den Wert von (40) bezeichnet.

Beweis. Für $x = 0$ ist die Behauptung sofort zu verifizieren. Wir behandeln in extenso den Fall $x > 0$, für $x < 0$ verläuft der Beweis analog. Wir zerlegen die abzuschätzende Summe in

$$\sum_{\lambda_n \geqq 0} + \sum_{-x \leqq \lambda_n < 0} + \sum_{\lambda_n < -x} \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

Es ist:

1. $\Sigma_1 \leqq A \sum_{\lambda_n \geqq 0} |\gamma_{\lambda_n}| e^{\bar{b}(x+\lambda_n)} \leqq AC e^{\bar{b}x}$,

2. $\Sigma_2 \leqq A \sum_{-x \leqq \lambda_n < 0} |\gamma_{\lambda_n}| e^{\bar{b}(x+\lambda_n)} \leqq A e^{\bar{b}x} \sum_{\lambda_n < 0} |\gamma_{\lambda_n}| e^{\bar{b}\lambda_n} \leqq AC e^{\bar{b}x}$,

3. $\Sigma_3 \leqq A \sum_{\lambda_n < -x} |\gamma_{\lambda_n}| e^{\underline{b}(x+\lambda_n)} \leqq AC e^{\underline{b}x} \leqq AC e^{\bar{b}x}$.

§ 4.

Exponentialpolynome.

1. Wir betrachten die (mit den Grenzwerten c_ϱ der Koeffizienten $c_\varrho(x)$, gebildete) charakteristische Funktion

$$E(\tau) = \sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho e^{\delta_\varrho \tau} \tag{43}$$

für komplexe Werte der Variablen τ, $\tau = \tau' + \sqrt{-1}\,\tau''$. Es ist bequem vorauszusetzen, daß $r \geqq 1$, $c_0 \neq 0$, $c_r \neq 0$. Unter diesen Voraussetzungen hat $E(\tau)$ unendlich viele Nullstellen [7]). Sie liegen alle in einem beschränkten Streifen $\tau_0' < \tau' < \tau_1'$, denn für große negative τ' überwiegt in (43) das Glied $e^{\delta_0 \tau}$ und für große positive τ' das Glied $e^{\delta_r \tau}$. Wir betrachten auf der τ'-Achse die Menge der Realteile aller Nullstellen von $E(\tau)$, nehmen ihre Häufungspunkte hinzu und bezeichnen die Gesamtmenge mit $\mathfrak{M}$. Die Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ auf der τ'-Achse besteht aus höchstens abzählbar vielen offenen Intervallen, darunter zwei Halbgeraden. Wir bezeichnen die linke Halbgerade mit $\mathfrak{J}_0$, die rechte mit $\mathfrak{J}_1$, die übrigen Intervalle in irgendeiner Reihenfolge mit $\mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \ldots$. Die Grenzen des Intervalls $\mathfrak{J}_\sigma$ werden wir mit $\underline{b}_\sigma$ und $\bar{b}_\sigma$ bezeichnen (also $\underline{b}_0 = -\infty$; $\bar{b}_1 = +\infty$), und unter $\mathfrak{J}_\sigma$ werden wir nicht nur das „Intervall"

$$\underline{b}_\sigma < \tau' < \bar{b}_\sigma, \tag{44}$$

sondern auch den „Streifen" (44) verstehen, d. h. auch die Gesamtheit der komplexen Zahlen τ, deren Realteil τ' die Relation (44) erfüllt.

2. Zu jedem $\mathfrak{J}_\sigma$ gibt es eine eindeutige Folge von Koeffizienten

$$\gamma_{\lambda_n} = \gamma_{\lambda_n}^{\sigma} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{45}$$

[7]) G. Pólya, Münchener Berichte 1920, S. 285—290; F. Ritt, Transact. Amer. Math. Soc. **31** (1929), S. 680—686.

so daß die (mit den Exponenten (32)) gebildete Reihe

$$\sum_{0}^{\infty} \gamma_{\lambda_n} e^{\lambda_n \tau} \tag{46}$$

im Streifen $\mathfrak{S}_\sigma$ absolut konvergiert und daselbst den Wert der Funktion $\frac{1}{E(\tau)}$ darstellt. Die letztere Funktion ist nämlich im Streifen $\mathfrak{S}_\sigma$ eine analytische fastperiodische Funktion[8]) und besitzt als solche eine verallgemeinerte Dirichletsche Reihe der Gestalt (46)[8a]). Die absolute Konvergenz dieser Reihe ist eine Folge der speziellen Bauart unserer fastperiodischen Funktion[9]). Aus der Identität

$$1 = E(\tau) \sum \gamma_{\lambda_n} e^{\lambda_n \tau} \tag{47}$$

ergeben sich die wichtigen Beziehungen

$$\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho \gamma_{\lambda_n - \delta_\varrho} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ 0 & \text{für } n \neq 0. \end{cases} \tag{48}$$

3. Wichtig ist, daß für $\sigma = 0$ bzw. $\sigma = 1$ die Reihe (46) „einseitig" ist, und zwar ist

$$\gamma_{\lambda_n} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_n \leqq -\delta$$

bzw.

$$\gamma_{\lambda_n} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_n \geqq -\delta_r.$$

Sie entsteht, indem man $\left\{\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho e^{\delta_\varrho \tau}\right\}^{-1}$ nach den Regeln für gewöhnliche Dirichletsche Reihen nach aufsteigenden bzw. absteigenden Potenzen von e^τ entwickelt.

4. Gegeben sei eine Funktion $\varphi(x)$. Wegen der Bauart von $\mathfrak{P}$ sind alle Funktionen $\varphi(x + \lambda_n)$ gleichfalls auf $\mathfrak{P}$ definiert. Wenn nun bei gegebenem σ die Funktion $\varphi(x)$ sich derart im Unendlichen verhält, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\lambda_n}^{\sigma} \varphi(x + \lambda_n) = u(x) \tag{49}$$

für alle x absolut konvergiert und daß ihre Summe im Endlichen beschränkt ist, so ist diese Funktion eine Lösung der Gleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho u(x + \delta_\varrho) = \varphi(x). \tag{50}$$

Denn die Reihe (49) genügt formal der Gleichung (50). D. h. setzt man

$$u(x + \delta_\varrho) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\lambda_n} \varphi(x + \lambda_n + \delta_\varrho) \quad (\varrho = 0, 1, \ldots, r), \tag{51}$$

---

[8]) H. Bohr, Acta Math. 47 (1926), S. 237—281; u. a. S. 257, Corollar 2.

[8a]) Daß die Reihe (46) die Exponenten (32) hat, ist bewiesen bei S. Bochner, Math. Annalen 96 (1927), S. 119—147, Satz XVIII.

[9]) S. Bochner, Jahresber. d. D. M. V. 39 (1930), S. 52—54.

substituiert diese Reihen in $\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho u(x+\delta_\varrho)$ und faßt nach gleichen Argumenten der Funktion $\varphi(\xi)$ zusammen, so entsteht

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho \gamma_{\lambda_n-\delta_\varrho}\Big)\varphi(x+\lambda_n). \tag{52}$$

Wegen (48) ist dies aber die Funktion $\varphi(x)$.

Zur Abkürzung werden wir die Reihe (49) und, falls sie konvergent ist, auch ihre Summe mit $\Gamma^\sigma\varphi$ (bzw. $\Gamma\varphi$) bezeichnen.

5. Für spezielle Spannen besteht die Menge $\mathfrak{M}$ aus endlich vielen Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_s$, $s \leqq r$. Es sind dies die Logarithmen der untereinander verschiedenen der absoluten Beträge der Nullstellen von $e(t)$. Den Entwicklungen von (46) entsprechen jetzt gewöhnliche Laurentreihen

$$\frac{1}{e(t)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\nu^\sigma t^\nu. \tag{53}$$

Von den dazugehörigen formalen Lösungen

$$\Gamma^\sigma\varphi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\nu^\sigma \varphi(x+\nu) \tag{54}$$

von (50) hat man bisher immer nur die „äußersten" Reihen, $\sigma = 0$ und $\sigma = 1$, betrachtet. Sie werden gewöhnlich „rekursiv" hergeleitet. Man erhält etwa $\Gamma^0\varphi$, indem man die Gleichungen

$$\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho u(x+\varrho+n) = \varphi(x+n)$$

links und rechts mit γ_n^0 multipliziert, sie über $n = 0, 1, 2, \ldots$ summiert und γ_n^0 aus der Forderung bestimmt, daß sich die Summe links auf $u(x)$ reduzieren soll.

Auf diese Art erhält man z. B. für die Gleichung

$$2u(x) - 3u(x+1) + u(x+2) = \varphi(x)$$

die Lösungen

$$\Gamma^0\varphi = \sum_{0}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{2^{\nu+1}}\Big)\varphi(x+\nu), \qquad \Gamma^1\varphi = \sum_{2}^{\infty}(2^{\nu-1}-1)\varphi(x-\nu).$$

Sie besitzt aber noch eine dritte Lösung der Gestalt (54), nämlich

$$\Gamma^2\varphi = -\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu+1}}\varphi(x+\nu) - \sum_{1}^{\infty}\varphi(x-\nu).$$

6. Wir haben bisher vorausgesetzt, daß $r \geqq 1$, $c_0 \neq 0$, $c_r \neq 0$. An den Betrachtungen hätte sich fast nichts geändert, wenn wir vorausgesetzt hätten, daß $r \geqq 1$ und daß zwei der Koeffizienten c_ϱ von Null verschieden

sind. Nimmt man aber nur an, daß $r \geqq 0$ und daß mindestens ein $c_\varrho \neq 0$, so ist, falls tatsächlich nur ein einziges c_ϱ von Null verschieden ist, die Menge $\mathfrak{M}$ leer und nur eine einzige Entwicklung $\Gamma\varphi$ vorhanden. Sie lautet

$$u(x) = \frac{1}{c_\varrho}\varphi(x - \delta_\varrho).$$

Wir werden bei unseren Betrachtungen diesen Fall nicht besonders erwägen, aber es ist jeweils sehr leicht, ihn zu ergänzen [10]).

§ 5.

Die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten.

1. Wir betrachten den Operator

$$\Lambda u = \sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho u(x + \delta_\varrho),$$

die dazugehörige charakteristische Funktion $E(\tau)$, ihre Menge $\mathfrak{M}$, die Intervalle $\mathfrak{J}_\sigma$ und die Entwicklungen $\Gamma^\sigma\varphi$. Unter der homogenen bzw. inhomogenen Gleichung verstehen wir im gegenwärtigen Paragraphen die Gleichung $\Lambda u = 0$ bzw. $\Lambda u = \varphi$.

2. Gegeben sei eine Funktion $u^0(x)$ auf einem Intervall

$$x_0 \leqq x < x_0 + \delta_r \tag{55}$$

und eine Funktion $\varphi(x)$ auf einer das Intervall (55) umfassenden Halbgeraden

$$\bar{x}_0 \leqq x < \infty, \quad \bar{x}_0 \leqq x_0. \tag{56}$$

Dann gibt es auf der Halbgeraden (56) eine und nur eine Funktion $u(x)$, welche daselbst der inhomogenen Gleichung genügt und in (55) mit $u^0(x)$ übereinstimmt. Man kann nämlich $u^0(x)$ nach rechts und links gemäß den Formeln

$$c_r u(x) = -\sum_{0}^{r-1} c_\varrho u(x + \delta_\varrho - \delta_r) + \varphi(x - \delta_r) \tag{57}$$

$$c_0 u(x) = -\sum_{1}^{r} c_\varrho u(x + \delta_\varrho) + \varphi(x) \tag{58}$$

fortsetzen. Diese Fortsetzung nach rechts kann durch sukzessives Anhängen von Intervallen der Länge

$$\delta_r - \delta_{r-1} = l > 0$$

vorgenommen werden. Daran erkennt man unschwer, daß falls $\Re(\varphi) < +\infty$ auch $\Re(u) < +\infty$.

---

[10]) Von praktischer Bedeutung wird dieser Fall erst bei Betrachtung der Poincaréschen Gleichung (73), weil ein Koeffizient c_ϱ verschwinden kann, ohne daß $c_\varrho(x)$ identisch verschwindet.

3. Wir werden im nachfolgenden unsere Gleichungen teils im Gesamtintervall $-\infty < x < +\infty$ und teils in rechten Halbgeraden $x_0 \leqq x < +\infty$ betrachten. Bezieht sich eine Aussage auf asymptotisches Verhalten für $x \to +\infty$, so wird stillschweigend angenommen, daß alle vorkommenden Funktionen nur auf einer Halbgeraden definiert sind bzw. betrachtet werden.

Hilfssatz II. Voraussetzung: *Wir betrachten ein Intervall* $\mathfrak{J}_\sigma$ *und eine Funktion* $\varphi(x)$, *für welche*

$$\mathfrak{G}(\varphi) < (\underline{b}_\sigma, \overline{b}_\sigma). \tag{59}$$

Behauptung: a) *Die Reihe* $\Gamma^\sigma \varphi$ *ist absolut konvergent und stellt eine Lösung* $u(x)$ *der inhomogenen Gleichung dar, für welche*

$$\mathfrak{G}(u) < (\underline{b}_\sigma, \overline{b}_\sigma). \tag{60}$$

b) $\Gamma^\sigma \varphi$ *ist die einzige Lösung der inhomogenen Gleichung, für welche* (60) *erfüllt ist.*

c) *Betrachtet man Zahlen* $\underline{b}$ *und* $\overline{b}$ *mit der Bedingung*

$$\underline{b}_\sigma < \underline{b} \leqq \overline{b} < \overline{b}_\sigma, \tag{61}$$

für welche

$$|\varphi(x)| < A(e^{\underline{b}x}, e^{\overline{b}x}), \tag{62}$$

so gilt

$$|u(x)| < A'(e^{\underline{b}x}, e^{\overline{b}x}), \tag{63}$$

und zwar kann man setzen $A' = AC$, *wo* C *von* $\varphi(x)$ *unabhängig ist.*

d) *Betrachtet man Zahlen* $\underline{b}$ *und* $\overline{b}$ *mit der Bedingung* (61), *für welche*

$$\mathfrak{G}(\varphi) \leqq (\underline{b}, \overline{b}), \tag{64}$$

so gilt

$$\mathfrak{G}(u) \leqq (\underline{b}, \overline{b}). \tag{65}$$

Beweis. Ad a) und c). Nach Voraussetzung (59) gibt es ein Zahlenpaar b und $\overline{b}$, für welches (61) und (62) erfüllt ist. Wir greifen irgendein solches Paar heraus. Nach § 4, 2. ist

$$\sum_{\lambda_n \geqq 0} |\gamma^\sigma_{\lambda_n}| \, e^{\overline{b}\lambda_n} + \sum_{\lambda_n \leqq 0} |\gamma^\sigma_{\lambda_n}| \, e^{\underline{b}\lambda_n} \tag{66}$$

endlich. Jetzt wende man Hilfssatz I an.

Ad d). Folgt leicht aus c).

Ad b). Es sei $u(x)$ eine Lösung, für welche (60) erfüllt ist. Wir bilden die Reihe

$$\Gamma^\sigma \varphi = \sum_n \gamma^\sigma_{\lambda_n} \varphi(x + \lambda_n) = \sum_n \left(\gamma^\sigma_{\lambda_n} \sum_\varrho c_\varrho u(x + \lambda_n + \delta_\varrho)\right).$$

Wegen (60) ist die Doppelreihe rechts absolut konvergent und man kann sie umordnen zu

$$\sum_n \left(u(x+\lambda_n) \sum_\varrho c_\varrho \gamma_{\lambda_n - \delta_\varrho} \right) = u(x).$$

Satz I. *Ist $u(x)$ eine Lösung der homogenen Gleichung, so ist entweder $u(x) \equiv 0$ oder $\mathfrak{R}(u)$ einer Zahl aus $\mathfrak{M}$ gleich.*

4. Beweis. Jedenfalls ist $\mathfrak{R}(u) < +\infty$, vgl. 2. Angenommen, es sei $R = \mathfrak{R}(u)$ eine Zahl aus $\mathfrak{F}_\sigma$. Wir nehmen ein positives ε so klein an, daß $R > \underline{b}_\sigma + \varepsilon$. Wir greifen einen Punkt x_0 heraus, von der Art, daß die Lösung $u(x)$ jedenfalls auf der rechten Halbgeraden $x_0 \leqq x < +\infty$ definiert ist (vgl. 3), und, unbekümmert darum, ob und inwieweit die Funktion $u(x)$ auch auf der linken Halbgeraden $-\infty < x < x_0$ definiert war, ergänzen wir sie daselbst durch die Festsetzung $u(x) = 0$. Die so definierte Funktion $u(x)$ hat denselben Wert $\mathfrak{R}(u)$ wie die ursprüngliche, sie ist aber nicht für alle x eine Lösung der homogenen Gleichung. Definiert man aber die Funktion $\varphi(x)$ durch die Relation $\varphi(x) = Au$, so ist $\varphi(x) = 0$ für $x_0 \leqq x$ und $x < x_0 - \delta_r$. Also haben wir

$$\mathfrak{G}(\varphi) < (\underline{b}_\sigma, \overline{b}_\sigma), \tag{68}$$

$$\mathfrak{G}(\varphi) < (R - \varepsilon,\ R - \varepsilon). \tag{69}$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{G}(u) < (\underline{b}_\sigma, \overline{b}_\sigma). \tag{67}$$

Durch Anwendung von Hilfssatz II ergibt sich zuerst aus (67) und (68), daß $u(x) = \Gamma^\sigma \varphi$, und dann aus (69), daß

$$\mathfrak{G}(\Gamma^\sigma \varphi) \leqq (R - \varepsilon, R - \varepsilon), \tag{70}$$

also

$$\mathfrak{R}(u) \leqq R - \varepsilon. \tag{71}$$

Dies ist aber ein Widerspruch.

Bleibt noch der Fall $R = -\infty$. Auf Grund ähnlicher „Ergänzungen" der Funktionen $u(x)$ und $\varphi(x)$ erhält man

$$u(x) = \sum_n \gamma^0_{\lambda_n} \varphi(x + \lambda_n).$$

Nach § 4, 3. kann man schreiben

$$u(x) = \sum_{\lambda_n \geqq -\delta_0} \gamma^0_{\lambda_n} \varphi(x + \lambda_n),$$

und daher ist $u(x) = 0$ für $x_0 + \delta_0 \leqq x$.

Satz II. *Es sei $u(x)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Dann ist $\mathfrak{R}(u)$ entweder gleich $\mathfrak{R}(\varphi)$ oder gleich einer Zahl aus $\mathfrak{M}$, welche größer ist als $\mathfrak{R}(\varphi)$.*

Bemerkung. Ist $\mathfrak{R}(\varphi) = +\infty$, so ist $\mathfrak{R}(u) = +\infty$.

5. Beweis. Es ist der Relation $\varphi = \Lambda u$ leicht anzusehen, daß $\Re(\varphi) \leqq \Re(u)$, vgl. § 3, 5. Angenommen, es wäre $R' = \Re(\varphi)$ kleiner als $R = \Re(u)$ und R endlich und keine Zahl aus $\mathfrak{M}$, also eine Zahl aus einem Intervall $\mathfrak{J}_\sigma$. Wir ergänzen die Funktionen $u(x)$ und $\varphi(x)$ auf $x < x_0$ wie in 4. und erhalten infolgedessen die Relationen (67) und (68). Daher ist $u = \Gamma^\sigma \varphi$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $R - \varepsilon > \underline{b}_\sigma$ und $R - \varepsilon > R'$. Für solches ε gilt (69) und daher auch (71), was aber widerspruchsvoll ist.

Satz III. a) *Ist* $\Re(\varphi)$ *kleiner als alle Zahlen aus* $\mathfrak{M}$, *so gibt es genau eine Lösung der inhomogenen Gleichung, für welche* $\Re(u) = \Re(\varphi)$. b) *Ist* $\Re(\varphi)$ *größer als alle Zahlen aus* $\mathfrak{M}$, *so ist für alle Lösungen* $\Re(u) = \Re(\varphi)$. c) *Ist* $\Re(\varphi)$ *eine sonstige nicht in* $\mathfrak{M}$ *enthaltene Zahl, so gibt es Lösungen, für welche* $\Re(u) = \Re(\varphi)$, *und Lösungen, für welche* $\Re(u) > \Re(\varphi)$.

6. Beweis. Ist $\Re(\varphi)$ in $\mathfrak{J}_\sigma$ gelegen und erweitert man φ auf $x < x_0$ durch die Festsetzung $\varphi(x) = 0$, so ergibt $u(x) = \Gamma^\sigma \varphi$ eine Lösung, für welche auf Grund von Hilfssatz II

$$\Re(u) = \Re(\varphi).$$

Aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man irgendeine andere, wenn man eine Lösung $v(x)$ der homogenen Gleichung hinzuaddiert. Der Beweis von a) und b) ergibt sich nunmehr aus Satz I durch Berücksichtigung von § 3, 5, 4. Ad c) berücksichtige man, daß für irgendeine Nullstelle τ_0 von $E(\tau)$ die Funktion $v(x) = e^{\tau_0 x}$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist, für welche $\Re(v) = \tau_0'$.

7. Gewisse Aussagen haben zur Voraussetzung, daß der Punkt $\tau' = 0$ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehören soll. Diese Voraussetzung betrifft die Verteilung der Nullstellen von $E(\tau)$. Sie ist der Annahme äquivalent, daß $E(\tau)$ für rein imaginäre Werte von τ wesentlich von Null verschieden ist, d. h. daß

$$|E(i\tau'')| \geqq \eta > 0$$

für $-\infty < \tau'' < +\infty$.

Satz IV. Voraussetzung: *Es sei*: α) $\tau' = 0$ *kein Punkt von* $\mathfrak{M}$, β) *die gegebene Funktion* $\varphi(x)$ *beschränkt,*

$$|\varphi(x)| \leqq A \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x < +\infty,$$

γ) $u(x)$ *eine Lösung der inhomogenen Gleichung, für welche* $\Re(u) = \Re(\varphi) \leqq 0$.

Behauptung: a) $u(x)$ *ist beschränkt,*

$$|u(x)| \leqq A' \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x < +\infty.$$

Ist $x_0 = -\infty$, *so kann man setzen* $A' = AC$, *wo* C *nicht von* $\varphi(x)$ *abhängt*[11]).

[11]) Abgesehen von dieser einen Stelle verstehen wir unter einer Halbgeraden $x_0 \leqq x < +\infty$ immer eine „echte" Halbgerade, d. h. $x_0 > -\infty$.

b) *Ist* $\varphi(x) = 0$ *für* $x_0 \leqq x < +\infty$, *so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\varepsilon' > 0$ *von folgender Beschaffenheit: Ist*

$$|u(x)| \leqq \varepsilon' \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x < x_0 + \delta_r,$$

so ist

$$|u(x)| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x < +\infty.$$

c) *Ist* $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$ *vorhanden, so ist auch* $\lim_{x \to +\infty} u(x)$ *vorhanden.*

8. Beweis. Ad a). Wir definieren $u(x) = 0$ für $x < x_0$ und $\varphi(x) = \Lambda u$. Es ist $|\varphi(x)| \leqq \bar{A}$, und zwar ist $|\varphi(x)| \leqq A$, falls $x_0 = -\infty$. Nach Hilfssatz II ist

$$u(x) = \Gamma^\sigma \varphi = \sum_n \gamma_{\lambda_n}^\sigma \varphi(x + \lambda_n), \tag{72}$$

wobei σ derjenige Index ist, für welchen $\underline{b}_\sigma < 0 < \bar{b}_\sigma$. Aus (72) folgt

$$|u(x)| \leqq \bar{A} \sum_n |\gamma_{\lambda_n}^\sigma| = \bar{A} C.$$

Ad b). Die eben benutzte Funktion $\varphi(x)$ verschwindet für $x_0 \leqq x$ und $x < x_0 - \delta_r$; für $x_0 - \delta_r \leqq x < x_0$ ist

$$|\varphi(x)| \leqq \varepsilon' \sum_0^r |c_\varrho| = \varepsilon' c.$$

Also ist nach a)

$$|u(x)| \leqq \varepsilon' c C \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x < +\infty.$$

Es genügt daher zu setzen: $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c C}$.

Ad c). Man kann, wie leicht zu rechtfertigen ist, folgendermaßen rechnen: $\lim \varphi(x) \sum_n \gamma_{\lambda_n}^\sigma = \sum_n \gamma_{\lambda_n}^\sigma \lim \varphi(x + \lambda_n) = \lim \sum_n \gamma_{\lambda_n}^\sigma \varphi(x + \lambda_n) = \lim u(x)$.

§ 6.

Ein Approximationsverfahren.

1. Die Gleichung (7) schreiben wir in der Gestalt

$$\sum_0^r c_\varrho u(x + \delta_\varrho) = \varphi(x) + \sum_0^r (c_\varrho - c_\varrho(x)) u(x + \delta_\varrho), \tag{73}$$

oder, wenn wir Λu wie in § 5, 1 definieren und ein „Störungsglied" einführen:

$$\Lambda u = \varphi(x) + \psi(u). \tag{74}$$

2. Das Störungsglied ist ein linearer Operator $\psi(u) \equiv \psi(x, u)$, welcher u. a. den folgenden vier Eigenschaften genügt:

I. Für jede Funktion $u(x)$ auf einer festen Halbgeraden $x_0 \leqq x < +\infty$ stellt $\psi(x, u(x))$ eine Funktion von x dar, die auf derselben Halbgeraden definiert ist.

II. $\psi(\alpha u + \beta v) = \alpha\psi(u) + \beta\psi(v)$, also insbesondere $\psi(0) = \psi(x, 0) = 0$.

III. $\psi(\lim_{n\to\infty} u^n) = \lim_{n\to\infty} \psi(u^n)$.[11a]

IV. Es gibt eine positive Funktion $S(x)$, welche für $x \to +\infty$ gegen Null konvergiert, so daß für $|u(x)| \leqq Ae^{bx}$

$$|\psi(x, u(x))| \leqq AS(x)e^{bx}. \tag{75}$$

Gegeben sei ein Operator $\psi(x, u)$, welcher den Eigenschaften I. bis IV. genügt. Nach IV. kann man zu $\varepsilon > 0$ ein x_1 derart bestimmen, daß $S(x) \leqq \varepsilon$ für $x_1 \leqq x < +\infty$. Definiert man jetzt einen neuen Operator $\bar{\psi}(u) \equiv \bar{\psi}(x, u)$ durch die Festsetzung:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x, u) &= \psi(x, u) \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x < +\infty, \\ &= 0 \qquad\quad \text{„} \qquad -\infty < x < x_1, \end{aligned}$$

so erhält man eine Störungsfunktion, welche für alle x definiert ist und den Eigenschaften II. und III. und der nachfolgenden Eigenschaft IV′. genügt.

IV′. Ist für $\underline{b} \leqq \bar{b}$

$$|u(x)| \leqq A(e^{\underline{b}x}, e^{\bar{b}x}),$$

so ist

$$|\bar{\psi}(x, u(x))| \leqq A\varepsilon(e^{\underline{b}x}, e^{\bar{b}x}).$$

3. Für die nachfolgenden Hilfssätze und Sätze genügt es vom Störungsglied $\psi(u)$ vorauszusetzen, daß es den Eigenschaften I. bis IV. genügt. Nur für die Behauptung b) des Satzes IV′ werden wir vom Störungsglied voraussetzen, daß es die Poincarésche Gestalt $\sum_{\varrho=0}^{r}(c_\varrho - c_\varrho(x))u(x + \delta_\varrho)$ hat.

4. Allerdings kann man für Poincarésche Gleichungen in Analogie zu § 5, 2. die folgenden Aussagen machen, aus denen sich leicht formulierbare Präzisierungen der Sätze in § 7 ergeben.

Ist auf der Halbgeraden

$$x_0 \leqq x < +\infty \tag{76}$$

$c_0(x) \neq 0$, so läßt sich jede Lösung, welche in einer kleineren Halbgeraden

$$x_1 \leqq x < +\infty \qquad (x_0 < x_1) \tag{77}$$

[11a]) Die den Zeichen: u, v, r, $u(x)$, $v(x)$, $r(x)$, $u_*(x)$, ... oben angehängte Zahl n, z. B. u^n, v^n, r_*^n, ..., ist ein gewöhnlicher laufender Index ($n = 0, 1, 2, \ldots$) und bedeutet *nicht* etwa Potenzierung.

existiert, in (76) fortsetzen; je zwei Lösungen, die in (76) existieren und in (77) übereinstimmen, stimmen auch in (76) überein. Ist $c_r(x) \neq 0$ in (76), so kann man jede in $x_0 \leqq x < x_0 + \delta_r$ vorgegebene Funktion $u^0(x)$ zu einer Lösung in (76) fortsetzen. Ist außerdem $c_r \neq 0$, so ist $\Re(u) < +\infty$, falls $\Re(\varphi) < +\infty$; insbesondere ist $\Re(u) < +\infty$, falls $\varphi = 0$.

Hilfssatz II′. *Es seien ein Intervall $\mathfrak{J}_\sigma$ und Zahlen $\underline{b}$ und $\bar{b}$ mit der Bedingung* (61) *gegeben. Man kann ein $\varepsilon_0 > 0$ bestimmen, so daß für jede Störungsfunktion $\bar{\varphi}(u)$, welche der Eigenschaft* IV′ *mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ genügt, folgendes zutrifft.*

Ist $\varphi(x)$ eine Funktion, für welche

$$|\varphi(x)| \leqq A(e^{\underline{b}x}, e^{\bar{b}x}), \tag{78}$$

so kann man durch sukzessives Auflösen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \Lambda u^0 &= \varphi, \\ \Lambda u^{n+1} &= \varphi + \bar{\varphi}(u^n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{79}$$

zu einer Lösung $u(x)$ der Gleichung

$$\Lambda u = \varphi + \bar{\varphi}(u) \tag{80}$$

gelangen, für welche

$$|u(x)| \leqq A'(e^{\underline{b}x}, e^{\bar{b}x}). \tag{81}$$

Hierbei kann man setzen $A' = A\tilde{C}$, wo $\tilde{C}$ eine von $\varphi(x)$ unabhängige Konstante ist

Es gibt nur eine Lösung von (80), *welche der Eigenschaft* ℭ *mit denselben Exponenten wie $\varphi(x)$ genügt, sofern diese Exponenten die Bedingung* (61) *erfüllen*[12]).

5. Beweis. Ist $\bar{\varphi}(x)$ eine Funktion, für welche (78) mit $A = \bar{A}$ erfüllt ist, so besteht für die Funktion

$$\Gamma^\sigma \bar{\varphi} = \sum_n \gamma^\sigma_{\lambda_n} \bar{\varphi}(x + \lambda_n)$$

dieselbe Abschätzung mit $A = \bar{A}C$, wobei C nach Hilfssatz I von $\bar{\varphi}(x)$ unabhängig ist. Es ist zulässig, sukzessive die Funktionen

$$\begin{aligned} u^0 &= \Gamma^\sigma \varphi, \\ u^{n+1} &= \Gamma^\sigma(\varphi + \bar{\varphi}(u^n)) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{82}$$

zu bilden, weil sukzessive die Abschätzungen

---

[12]) Der Hilfssatz und sein Beweis stammen von H. Späth, Acta Math. 51 (1928), S. 134–198, insbes. S. 170–175.

$$
\begin{aligned}
&|u^0| \leqq AC(e^{\underline{b}x}, e^{\bar{b}x}),\\
&|u^n| \leqq AC\sum_{\nu=0}^{n}(\varepsilon_0 C)^\nu (e^{\underline{b}x}, e^{\bar{b}x})
\end{aligned}
\tag{83}
$$

bestehen. Wählt man ε_0 so klein, daß $\sum_0^\infty (\varepsilon_0 C)^\nu$ konvergent ist, also $\varepsilon_0 C < 1$, so ist, wie wir gleich sehen werden, $\lim_{n\to\infty} u^n$ vorhanden. Die Limesfunktion genügt, wegen Eigenschaft III, der Gleichung (80) und erfüllt die Bedingung (81) mit $A' = \frac{AC}{1-\varepsilon_0 C}$. Setzt man

$$
u^n = v^0 + v^1 + v^2 + \ldots + v^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{84}
$$

so ist

$$
\begin{aligned}
&\Lambda v^0 = \varphi,\\
&\Lambda v^{n+1} = \overline{\psi}(v^n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);
\end{aligned}
\tag{85}
$$

hieraus erhält man sukzessive

$$
|v^n(x)| \leqq AC(\varepsilon_0 C)^n (e^{\underline{b}x}, e^{\bar{b}x}). \tag{86}
$$

Daher ist $\lim_{n\to\infty} u^n$ vorhanden (und endlich).

6. Es sei umgekehrt eine Lösung u_* von (80) vorgelegt, für welche (81) erfüllt ist. Wir bestimmen sukzessive die Funktionen $r^0, r^1, r^2, \ldots$ als „die“ Lösungen der Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\Lambda r^0 = \overline{\psi}(u_*),\\
&\Lambda r^{n+1} = \overline{\psi}(r^n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).
\end{aligned}
\tag{87}
$$

Es ist

$$
|r^n| \leqq A' C(\varepsilon_0 C)^n (e^{\underline{b}x}, e^{\bar{b}x}), \tag{88}
$$

also ist $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Man kann daher setzen

$$
u_* = v_*^0 + v_*^1 + v_*^2 + \ldots, \tag{89}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
&v_*^0 = u_* - r^0,\\
&v_*^{n+1} = r^n - r^{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).
\end{aligned}
\tag{90}
$$

Die Funktionen v_*^n sind Lösungen des Gleichungssystems (85) und genügen der Eigenschaft $\mathfrak{G}$ mit b und $\bar{b}$. Auf Grund von Eigenschaft IV′ und Hilfssatz II ist daher

$$
v_*^n = v^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{91}
$$

Daraus folgt

$$
u_* = \sum_0^\infty v^n = u. \tag{92}
$$

§ 7.

Die Gleichungen mit asymptotisch konstanten Koeffizienten.

1. Im vorliegenden Paragraphen verstehen wir unter der homogenen Gleichung die Gleichung

$$\Delta u = \psi(u) \tag{93}$$

und unter der inhomogenen Gleichung die Gleichung

$$\Delta u = \varphi + \psi(u). \tag{94}$$

Satz I′. *Ist $u(x)$ eine Lösung der homogenen Gleichung, so ist entweder zuletzt*[13]) $u(x) = 0$ *oder $\Re(u)$ einer Zahl aus $\mathfrak{M}$ gleich oder* $\Re(u) = +\infty$.[14])

2. Beweis. Angenommen, es wäre $R = \Re(u)$ eine endliche Zahl aus einem Intervall $\mathfrak{J}_\sigma$. Wir bestimmen: α) Zahlen $\underline{b}$ und $\overline{b}$ gemäß der Bedingung

$$\underline{b}_\sigma < \underline{b} < R < \overline{b} < \overline{b}_\sigma \tag{95}$$

und Zahlen $\underline{b}_*$ und $\overline{b}_*$ durch die Festsetzung

$$\underline{b}_* = \overline{b}_* = \underline{b},$$

β) eine Zahl $\varepsilon = \varepsilon_0$ bzw. $\varepsilon = \varepsilon_0^*$, welche dem Hilfssatz II′ für das Intervall $\mathfrak{J}_\sigma$ und die Exponenten $\underline{b}$ und $\overline{b}$ bzw. $\underline{b}_*$ und $\overline{b}_*$ genügt, und γ) einen Operator $\overline{\psi}(u)$, welcher auf einer rechten Halbgeraden

$$x_1 \leqq x < +\infty \tag{96}$$

mit $\psi(u)$ übereinstimmt und der Eigenschaft IV′ sowohl für $\varepsilon = \varepsilon_0$ als auch $\varepsilon = \varepsilon_0^*$ genügt. Wir setzen $u(x) = 0$ für $-\infty < x < x_0$ und definieren $\varphi(x)$ durch die Gleichung (80). Da nun $u(x)$ und $\varphi(x)$ der Eigenschaft $\mathfrak{G}$ mit den Exponenten $\underline{b}$ und $\overline{b}$ genügen, entsteht $u(x)$ durch Auflösen der Gleichungen (79). Da nun aber $\varphi(x)$ der Eigenschaft $\mathfrak{G}$ auch für die Exponenten $\underline{b}_*$ und $\overline{b}_*$ genügt, trifft dies gleichfalls von der Funktion $u(x)$ zu. Daher ist

$$\Re(u) \leqq \overline{b}_* < R,$$

was aber widerspruchsvoll ist.

3. Es erübrigt noch, den Fall $R = -\infty$ zu untersuchen. Wir bestimmen Zahlen $\underline{b}$ und $\overline{b}$, für welche

$$\underline{b}_0 < \underline{b} \leqq \overline{b} < \overline{b}_0,$$

und konstruieren in naheliegender Weise eine Gleichung

$$\Delta u = \varphi + \overline{\psi}(u), \tag{97}$$

[13]) D. h. für eine „genügend kleine“ Halbgerade (96).

[14]) Für spezielle Spannen ist dies der Poincaré-Perronsche Satz.

welche eine Lösung besitzt, die auf einer Halbgeraden (96) mit der vorgegebenen Lösung der homogenen Gleichung übereinstimmt, und die sich als Grenzwert der Funktionen (82) für $\sigma = 0$ auffassen läßt. Wir machen die unwesentliche (durch die Transformation $x' = x + \delta_0$ erreichbare) Voraussetzung, daß $\delta_0 = 0$. Aus dem Umstand, daß (vgl. § 4, 3.)

$$\sum_n \gamma_{\lambda_n}^0 \bar{\varphi}(x + \lambda_n) = \sum_{\lambda_n \geqq 0} \gamma_{\lambda_n}^0 \bar{\varphi}(x + \lambda_n), \tag{98}$$

schließt man sukzessive für $n = 0, 1, 2, \ldots$, daß $u^n(x) = 0$ auf (96), und daß daher auch $u(x) = 0$ auf (96).

Satz II′. *Ist $u(x)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist $\Re(u)$ entweder gleich $\Re(\varphi)$ oder gleich einer Zahl aus $\mathfrak{M}$, welche größer ist als $\Re(\varphi)$, oder gleich $+\infty$.*[15])

4. Beweis. Analog zum Beweis für Satz II. Wiederum findet man zuerst, daß $\Re(u) \geqq \Re(\varphi)$. Wäre $\Re(u) > \Re(\varphi)$ und gleich einer Zahl aus einem Intervall $\mathfrak{J}_\sigma$, so könnte man, vgl. 2., eine „ergänzte“ Gleichung (97) konstruieren, deren Lösung in einer rechten Halbgeraden mit der vorgegebenen Funktion $u(x)$ übereinstimmen würde, und andererseits einer Eigenschaft $\mathfrak{G}$ mit solchen Exponenten genügen müßte, daß

$$\Re(u) < R\,(= \Re(u)).$$

Satz III′. a) *Ist $\Re(\varphi)$ kleiner als alle Zahlen aus $\mathfrak{M}$, so gibt es genau eine Lösung der inhomogenen Gleichung, für welche $\Re(u) = \Re(\varphi)$,* b) *Ist $\Re(\varphi)$ größer als alle Zahlen aus $\mathfrak{M}$, so ist für jede Lösung $\Re(u) = \Re(\varphi)$.* c) *Ist $\Re(\varphi)$ eine sonstige nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörige Zahl, so gibt es mindestens eine Lösung, für welche $\Re(u) = \Re(\varphi)$, und eventuell auch Lösungen, für welche $\Re(u) > \Re(\varphi)$.* d) *Ist $\Re(\varphi)$ eine Zahl aus $\mathfrak{M}$, so gibt es mindestens eine Lösung mit endlichem $\Re(u)$.*[15])

5. Bemerkung. Unsere Existentialbehauptungen beziehen sich nur auf eine „genügend kleine“ Halbgerade $x_1 \leqq x < +\infty$, nicht aber auf die ursprüngliche Halbgerade $x_0 \leqq x < +\infty$, auf welche $\varphi(x)$ und $\psi(x, u)$ definiert sind. Ähnlich ist die Eindeutigkeitsaussage in a) gemeint: auf einer genügend kleinen Halbgeraden sind alle Lösungen identisch gleich.

6. Beweis. In den Fällen a), b) und c) wird, ähnlich wie in § 5, 6., eine spezielle Lösung konstruiert, für welche $\Re(u) = \Re(\varphi)$; man erhält sie durch Zurückführen der gegebenen Gleichung auf eine Gleichung (97). Aus einer speziellen Lösung entsteht wiederum jede andere durch Hinzufügen einer Lösung der homogenen Gleichung. Nunmehr kann man Satz I′ anwenden.

---

[15]) Für spezielle Spannen sind die wesentlichen Teile von Satz II′ und Satz III′ implizite enthalten in: O. Perron, Math. Annalen 84 (1921), S. 1–15

Im Falle d) wähle man zwei Zahlen $\underline{b}$ und $\bar{b}$ mit der Bedingung

$$\underline{b}_1 < \underline{b} \leqq \bar{b} < \bar{b}_1,$$

so daß $\Re(\varphi) < \bar{b}$. Dann kann man, wiederum durch Zurückführen auf eine Gleichung (97), eine Lösung konstruieren, für welche $\Re(u) \leqq \bar{b}$.

Satz IV'. Voraussetzung. *Wortgetreu wie in Satz* IV. (*Es ist aber zu bemerken, daß diesmal* (*vgl.* 1.) *unter der inhomogenen Gleichung die Gleichung* (94) *zu verstehen ist.*)

Behauptung. a) $u(x)$ *ist beschränkt,*

$$|u(x)| \leqq A' \quad \textit{für} \quad x_0 \leqq x < +\infty.^{16})$$

b) *Ist* $\varphi(x) = 0$ *für* $x_0 \leqq x < +\infty$, *so gibt es ein festes* $x_1 > x_0$ *und zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\varepsilon' > 0$ *von folgender Beschaffenheit: ist*

$$|u(x)| \leqq \varepsilon' \quad \textit{für} \quad x_0 \leqq x < x_1 + \delta_r,$$

so ist

$$|u(x)| \leqq \varepsilon \quad \textit{für} \quad x_0 \leqq x < +\infty.^{17})$$

c) *Ist* $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$ *vorhanden, so ist auch* $\lim_{x \to +\infty} u(x)$ *vorhanden*[16]).

7. Beweis. Ad a) und c). Man führe wiederum unsere Gleichung auf die Gleichung (97) zurück und approximiere die Funktion $u(x)$ durch die Funktionen (82). Wegen der genau abschätzbaren Konvergenz der Funktionen $u^n(x)$ gegen die Funktion $u(x)$ übertragen sich leicht die Behauptungen a) und c) von Satz IV auf den vorliegenden Satz.

Ad b). Alle beschränkten Funktionen genügen der Eigenschaft $\mathfrak{G}$ mit den festen Exponenten $\underline{b} = \bar{b} = 0$. Zu diesen Exponenten bestimmen wir ein ε_0 gemäß Hilfssatz II', und wir bilden mit $\psi(u)$ eine zu $\varepsilon = \varepsilon_0$ gehörende Störungsfunktion $\bar{\psi}(u)$. Mit x_1 bezeichnen wir eine Zahl, so daß $\bar{\psi}(u)$ auf $x_1 \leqq x < +\infty$ mit $\psi(u)$ übereinstimmt. Wie immer definieren wir $u(x) = 0$ für $-\infty < x < x_0$ und $\varphi(x) = \Lambda u = \bar{\psi}(u)$. Für $x_1 \leqq x$ und $x < x_0 - \delta_r$ ist $\varphi(x) = 0$, für $x_0 - \delta_r \leqq x < x_1$ ist

$$|\varphi(x)| \leqq \sum_0^r |c_\varrho(x)| \cdot |u(x + \delta_r)| \leqq \varepsilon' c,$$

wo c eine Konstante ist. Nach Hilfssatz II' gibt es eine feste Konstante $\tilde{C}$, so daß

$$|u(x)| \leqq \varepsilon' c \tilde{C}.$$

Bei vorgegebenem ε wird also unserer Behauptung mit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c\tilde{C}}$ Genüge geleistet.

---

[16]) Die Behauptungen a) und c) sind für spezielle Spannen bewiesen bei: A. Walther, Göttinger Nachrichten 1926, S. 103–118, und H. Späth, loc. cit.

[17]) Die Behauptung b) ist für spezielle Spannen und den diskreten Fall enthalten in: O. Perron, Crelle **161** (1929), S. 42–63.

Anhang.

Auflösungsformeln für Gleichungen mit speziellen Spannen und konstanten Koeffizienten.

Wir betrachten die Gleichung

$$\sum_0^r c_\varrho u(x+\varrho) = \varphi(x). \tag{99}$$

Wenn eine Folge von Konstanten γ_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ so beschaffen ist, daß die Reihe

$$\Gamma\varphi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n \varphi(x+n) \tag{100}$$

formal die Gleichung (99) löst, so nennen wir diese Reihe eine Auflösungsformel. Damit $\Gamma\varphi$ eine Auflösungsformel ist, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\sum_0^r \gamma_{n-\varrho} c_\varrho = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 0, \\ 0 & \text{„} \quad n \neq 0. \end{cases} \tag{101}$$

Zu den Auflösungsformeln gehören insbesondere die in § 4 eingeführten „Hauptformeln“

$$\Gamma^\sigma\varphi = \sum_n \gamma_n^\sigma \varphi(x+n), \tag{102}$$

welche den Laurententwicklungen des reziproken Werts des Polynoms

$$e(t) = \sum_\varrho c_\varrho t^\varrho \tag{103}$$

entsprechen.

Wir bezeichnen mit $b_1, b_2, \ldots, b_s$, $s \leqq r$, die Logarithmen der untereinander verschiedenen absoluten Beträge der Nullstellen von $e(t)$ in monoton wachsender Anordnung, außerdem mit b_0 und b_{s+1} die Zahlen $-\infty$ und $+\infty$. Es ist

$$b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_s < b_{s+1}. \tag{104}$$

Die Punktmenge $\mathfrak{M}$ besteht jetzt aus den Punkten $b_1, b_2, \ldots, b_s$, die Intervallmenge $\mathfrak{J}_\sigma$ aus $s+1$ Intervallen. Abweichend von § 4 numerieren wir die Intervalle $\mathfrak{J}_\sigma$ (und entsprechend die Reihen $\Gamma^\sigma\varphi$) in ihrer natürlichen Reihenfolge:

$$\underline{b}_\sigma = b_\sigma; \quad \overline{b}_\sigma = b_{\sigma+1} \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots, s).$$

Es gibt viel mehr Auflösungsformeln als Hauptformeln, aber die Hauptformeln sind vor den anderen differenzentheoretisch ausgezeichnet.

Gegeben sei eine Auflösungsformel (100). Mit $\overline{b}$ bezeichnen wir die untere Grenze aller Zahlen des Intervalls $-\infty \leqq b \leqq +\infty$, für welche

$$\sum_1^\infty |\gamma_n| e^{nb}$$

divergent ist, und mit $\underline{b}$ die obere Grenze aller Zahlen, für welche

$$\sum_{1}^{\infty} |\gamma_{-n}| e^{-nb}$$

divergent ist. Das Zahlenpaar $(\underline{b}, \overline{b})$ ist ein Maß für die „Güte“ der Formel (100).

Liegt neben (100) noch eine zweite Auflösungsformel

$$\Gamma'\varphi = \sum_{n} \gamma'_n \varphi(x+n)$$

mit den „Grenzen“ $\underline{b}'$ und $\overline{b}'$ vor, so nennen wir:

a) $\Gamma\varphi$ und $\Gamma'\varphi$ gleich gut, falls $\underline{b}' = \underline{b}$ und $\overline{b}' = \overline{b}$,

b) $\Gamma\varphi$ besser als $\Gamma'\varphi$, falls

$$\underline{b}' \geqq \underline{b}, \quad \overline{b}' < \overline{b}$$

oder

$$\underline{b}' > \underline{b}, \quad \overline{b}' \leqq \overline{b},$$

c) $\Gamma\varphi$ und $\Gamma'\varphi$ nicht vergleichbar, falls

$$\underline{b}' > \underline{b}, \quad \overline{b}' > \overline{b}$$

oder

$$\underline{b}' < \underline{b}, \quad \overline{b}' < \overline{b}.$$

Wir wollen nunmehr zeigen, daß es zu jeder Nicht-Hauptformel eine Hauptformel gibt, welche im Sinne unserer Definition besser ist als sie, daß aber je zwei Hauptformeln untereinander nicht vergleichbar sind.

Letztere Behauptung ergibt sich sofort; nach dem Cauchy-Hadamardschen Kriterium hat die Hauptformel $\Gamma^{\sigma}\varphi$ die Grenzen:

$$\underline{b} = b_{\sigma}, \quad \overline{b} = b_{\sigma+1}.$$

Um die allgemeinen Auflösungsformeln behandeln zu können, fassen wir die Rekursionsformeln (101) als eine Differenzengleichung auf. Setzen wir $\gamma(n) = \gamma_{-n}$ und definieren wir $\varphi(x)$ durch die Relationen

$$\begin{aligned} &\varphi(n) = 1 \quad \text{für} \quad n = 0, \\ &\varphi(n) = 0 \quad \text{„} \quad n \neq 0, \end{aligned} \tag{105}$$

so lautet diese Differenzengleichung:

$$\sum_{\varrho=0}^{r} c_{\varrho}\, \gamma(x+\varrho) = \varphi(x),$$

wobei jetzt die Punktmenge $\mathfrak{P}$ aus den Punkten $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ besteht. Nach Cauchy-Hadamard ist

$$\overline{b} = \log\left\{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\gamma_n|}\right\}^{-1} = \log \liminf_{n\to\infty} \left\{\sqrt[n]{|\gamma_n|}\right\}^{-1} = \liminf_{n\to\infty} \left\{\log |\gamma_n|^{-\frac{1}{n}}\right\}$$

$$= \liminf_{x\to-\infty} \left\{\frac{\log|\gamma(x)|}{x}\right\} = \mathfrak{L}(\gamma(x)).$$

Entsprechend ist $\underline{b} = \Re(\gamma)$, also

$$\mathfrak{G}(\gamma) = (\bar{b}, \underline{b}).$$

Insbesondere ist

$$\mathfrak{G}(\gamma^{\sigma}(x)) = (b_{\sigma+1}, b_{\sigma}). \tag{106}$$

Da $\Re(\varphi) = -\infty$, so ist, nach Satz II, $\Re(\gamma)$ gleich einer der Zahlen (104); Analoges gilt von $\mathfrak{L}(\gamma)$. Auf Grund dessen und der Relation (106) können wir unsere Behauptung dahin formulieren, daß für jede Nicht-Hauptformel

$$\mathfrak{L}(\gamma) \leqq \Re(\gamma).$$

Wir schließen indirekt. Wäre $\Re(\gamma) < \mathfrak{L}(\gamma)$, so gäbe es einen Index σ, für welchen

$$\Re(\gamma) \leqq b_{\sigma}, \quad \mathfrak{L}(\gamma) \geqq b_{\sigma+1}.$$

Dann wäre also

$$\mathfrak{G}(\gamma) < (b_{\sigma}, b_{\sigma+1}).$$

Nun ist

$$\mathfrak{G}(\gamma^{\sigma}) < (b_{\sigma}, b_{\sigma+1}),$$

$$\mathfrak{G}(\varphi) < (b_{\sigma}, b_{\sigma+1}).$$

Nach Hilfssatz II wäre dann $\gamma(x) \equiv \gamma^{\sigma}(x)$.

(Eingegangen am 1. Mai 1930.)

Abbildungseigenschaften algebraischer Erweiterungen.

Von

Reinhold Baer in Halle a. d. S.

§ 1.

Ziel der Galoisschen Theorie ist es, die Körper zwischen einem festen Grundkörper K und einer festen algebraischen Erweiterung A von K[1]) durch die Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{A}$ von A bzgl. K zu charakterisieren. [$\mathfrak{A}$ besteht aus den sämtlichen Automorphismen von A, die K elementweise invariant lassen.] Hierzu hat man, will man nicht irgendwelche Untergruppen oder Zwischenkörper ausschalten, eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Untergruppen einerseits und den Zwischenkörpern andrerseits herzustellen. Dies gelingt, wenn A über K normal, von erster Art und endlich ist; ja, man kann sogar unter der Voraussetzung, daß A normal über K ist, zeigen, daß die natürliche Zuordnung der Zwischenkörper zu den Untergruppen nur dann eindeutig ist, wenn A von erster Art über K ist, und weiter: wenn A über K normal und von erster Art ist, so ist die Zuordnung der Untergruppen zu den Zwischenkörpern nur dann eindeutig, wenn A über K endlich ist[2]).

Wir wollen im folgenden untersuchen, inwieweit die oben genannten Voraussetzungen wirklich nötig sind. In dieser Hinsicht können wir einerseits zeigen, daß dann und nur dann der Gruppe $\mathfrak{A}$ selbst nur der Körper K zugeordnet wird [d. h. daß K aus allen und nur den Elementen besteht, die bei allen Automorphismen aus $\mathfrak{A}$ in Ruhe gelassen werden], wenn A

[1]) Wir betrachten im folgenden, auch wenn es nicht besonders erwähnt ist, nur algebraische Erweiterungen.

[2]) Vgl. hierzu den „Abriß der Galoisschen Theorie", der als Anhang der von R. Baer und H. Hasse besorgten Neuausgabe von E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper angefügt ist; dieser wird im folgenden kurz mit „Abriß", die Steinitzsche Arbeit aus dem Journal f. d. r. u. ang. Math. **137** (1910) mit „Steinitz", jedoch nach der Neuausgabe, zitiert.

über K normal und von erster Art ist, daß also diese beiden Bedingungen notwendig und hinreichend dafür sind, daß die Zuordnung der Zwischenkörper zu den Untergruppen eindeutig ist.

Dagegen sind diese Bedingungen nicht nötig für die Eindeutigkeit der Zuordnung der Untergruppen zu den Zwischenkörpern. Hierfür erweist sich nämlich allein die Endlichkeit der Gruppe $\mathfrak{A}$ als notwendig und hinreichend.

Betrachten wir die bei den Beweisen der Galoisschen Theorie angewandten Schlußmethoden, so sehen wir, daß vorwiegend von den folgenden beiden Tatsachen Gebrauch gemacht wird:

1. daß sich jeder Isomorphismus von Zwischenkörpern zu einem Automorphismus von A erweitern läßt,

2. daß jede irreduzible, nicht lineare Gleichung aus K in A wenigstens zwei verschiedene Lösungen hat.

Daß dies in der Natur der Sache begründet ist, zeigt der Satz, daß diese beiden Bedingungen gleichwertig damit sind, daß A normal und von erster Art über K ist.

Dies legt es nahe, Erweiterungskörper A von K zu untersuchen, in denen die Bedingung 1. erfüllt ist. Es gelingt uns, diese Erweiterungsklasse vollständig durch Eigenschaften der in A gelösten irreduziblen Gleichungen aus K zu charakterisieren; weiter können wir zeigen, daß 1. mit der folgenden anscheinend schwächeren Forderung 1_0. gleichwertig ist:

1_0. Eine in A enthaltene Lösung einer irreduziblen Gleichung aus K läßt sich durch einen Automorphismus von A bzgl. K [3]) in jede [andere] in A enthaltene Lösung derselben irreduziblen Gleichung aus K überführen.

Weiter zeigen wir, daß diese Klasse von Erweiterungen, die ja die normalen Erweiterungen umfaßt, mit dieser einige wichtige Eigenschaften gemein hat, und werden schließlich unter den Erweiterungen mit der Eigenschaft 1. bzw. 1_0. die normalen vollständig charakterisieren.

Haupthilfsmittel unserer Untersuchungen ist die Tatsache, daß es stets zwischen A und K einen und nur einen kleinsten Körper S gibt, über dem A normal und von erster Art ist. Dieser Körper S liefert auch ein einfaches Charakteristikum der normalen Erweiterungen; es sind dies nämlich alle und nur die, bei denen S über K Wurzelkörper im Sinne von Steinitz ist. Dieser letzte Satz gestattet auch, leicht eine Reihe von Kriterien dafür herzuleiten, daß ein Körper über dem Grundkörper normal ist, sowie eine Untersuchung der Frage, wann der Körper A über dem in ihm enthaltenen Wurzelkörper bzgl. K von erster Art ist.

---

[3]) Darunter verstehen wir im folgenden stets einen Automorphismus aus $\mathfrak{A}$.

An Sätzen aus der Galoisschen Theorie benutzen wir ständig die beiden folgenden:

I. *Ist A normal und algebraisch über K und ist $\mathfrak{a}$ eine isomorphe Abbildung des Zwischenkörpers Z_1 auf einen Zwischenkörper Z_2, bei der jedes Element aus K sich selbst zugeordnet wird, so gibt es einen $\mathfrak{a}$ umfassenden Automorphismus $\mathfrak{a}^*$ von A*[4]).

II. *Ist A normal über K, so genügen die Elemente a und b aus A dann und nur dann derselben irreduziblen Gleichung aus K, wenn es einen Automorphismus von A bzgl. K*[5]) *gibt, der a in b überführt*[6]).

Unabhängig davon, ob A normal über K ist, gilt:

II a. *Gibt es einen Automorphismus von A bzgl. K, der a in b überführt, so genügen a und b derselben irreduziblen Gleichung aus K.*

Weiter übernehmen wir aus dem „Abriß" die folgenden Bezeichnungen:

Ist A eine algebraische Erweiterung von K, so ist $\mathfrak{A}$ die Gruppe aller und nur der Automorphismen von A, die jedes Element aus K in Ruhe lassen; ist weiter

Z ein Körper zwischen A und K, $\quad$ $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$,

so verstehen wir unter

$\mathfrak{A}(Z)$ die Gruppe[7]) aller und nur der Automorphismen aus $\mathfrak{A}$, die jedes Element von Z in Ruhe lassen.

$A(\mathfrak{U})$ den Körper[7]) aller und nur der Elemente aus A, die bei allen Abbildungen aus $\mathfrak{U}$ in Ruhe bleiben.

Dann gilt stets:

$$A[\mathfrak{A}(Z)] \geqq Z, \qquad \mathfrak{A}[A(\mathfrak{U})] \geqq \mathfrak{U},$$

und es liefert uns die Gültigkeit der Gleichheit

$$A[\mathfrak{A}(Z)] = Z \qquad \mathfrak{A}[A(\mathfrak{U})] = \mathfrak{U}$$

die Eindeutigkeit der Zuordnung der

Zwischenkörper zu den Untergruppen.

Untergruppen zu den Zwischenkörpern.

Hierüber führen wir noch den folgenden auf E. Steinitz und W. Krull zurückgehenden Fundamentalsatz an:

---

[4]) Vgl. Abriß, Lemma 1a.

[5]) Vgl. Fußnote [3]).

[6]) Vgl. Abriß, Lemma 2.

[7]) Daß die hier definierte Menge tatsächlich eine Gruppe bzw. ein Körper ist, sieht man leicht ein.

III a. *Wenn A normal über K ist, so gilt dann und nur dann für alle Zwischenkörper Z die Gleichheit*

$$A[\mathfrak{A}(Z)] = Z,$$

wenn A von erster Art über K ist[8]).

III b. *Wenn A normal und von erster Art über K ist, so gilt dann und nur dann für alle Untergruppen $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{A}$ die Gleichheit*

$$\mathfrak{A}[A(\mathfrak{U})] = \mathfrak{U},$$

wenn A endlich über K ist[9]).

Wir bezeichnen stets:

Körper mit großen lateinischen Buchstaben:	$A, Z, K, \ldots$
Körperelemente mit kleinen lateinischen Buchstaben:	$a, b, \ldots$
Polynome mit kleinen griechischen Buchstaben:	$\alpha(x), \varphi(x), \ldots$
Isomorphismen mit kleinen deutschen Buchstaben:	$\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}, \ldots$
Abbildungsgruppen mit großen deutschen Buchstaben:	$\mathfrak{A}, \mathfrak{U}, \ldots$

§ 2.

Definition 1. *A heißt eine ordentliche Erweiterung von K, kurz ordentlich über K, wenn*

$$A[\mathfrak{A}(K)] = K$$

ist, d. h. wenn ein Element aus A dann und nur dann zu K gehört, wenn es bei allen Automorphismen von A bzgl. K [das sind Automorphismen aus $\mathfrak{A}$] in Ruhe bleibt.

Satz 1. *Dann und nur dann ist A ordentlich über K, wenn A normal und von erster Art über K ist.*

Beweis. A. Sei A ordentlich über K und a ein beliebiges Element aus A; bei Automorphismen von A bzgl. K gehe a in $a_1, \ldots, a_r$ mit $a_i \neq a_k$ für $i \neq k$ über; hierbei sind wegen II a. des § 1 die a_i $(i = 1, \ldots, r)$ sämtlich Lösungen einer und derselben irreduziblen Gleichung $\alpha(x) = 0$ aus K, woraus auch folgt, daß sie nur in endlicher Anzahl auftreten können. Wir bilden:

$$\beta(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - a_i).$$

$\beta(x)$ hat r verschiedene Nullstellen; alle Nullstellen von $\beta(x)$ sind auch solche von $\alpha(x)$, also ist $\beta(x)$ ein Teiler von $\alpha(x)$. Da bei allen Automorphismen von A bzgl. K das System der a_i in sich übergeht, und da A ordentlich über K ist, so ist $\beta(x)$ ein Polynom aus K. Da $\alpha(x)$ irreduzibel ist, so ist also

$$\alpha(x) = \beta(x),$$

wenn wir noch annehmen, daß 1 der höchste Koeffizient von $\alpha(x)$ ist.

---

[8]) Vgl. Abriß, Hauptsatz 2.

[9]) Vgl. Abriß, Hauptsatz 3.

Damit ist aber gezeigt: Ist $\alpha(x)$ ein irreduzibles Polynom aus K, das in A eine Nullstelle, nämlich a, hat, so hat $\alpha(x)$ nur einfache Nullstellen und zerfällt in A in Linearfaktoren. Also ist A normal und von erster Art über K, wenn nur A ordentlich über K ist.

B. Sei A normal und von erster Art über K und sei a ein beliebiges Element aus A. Die irreduzible Gleichung $\alpha(x) = 0$ aus K, der a genügt, hat also dann und nur dann keine von a verschiedene Lösung, wenn $\alpha(x)$ linear ist, d. h. wenn a zu K gehört. Denn $\alpha(x)$ kann keine mehrfachen Nullstellen in A haben, da A von erster Art über K ist, und zerfällt in A in Linearfaktoren, da A normal über K ist.

Gehört also a nicht zu K, so gibt es ein b in A, so daß $\alpha(b) = 0$ und $a \neq b$ ist. Wegen II. des § 1 gibt es dann einen Automorphismus von A bzgl. K, der a in $b \neq a$ überführt, d. h. bei allen Automorphismen von A bzgl. K bleiben nur die Elemente aus K in Ruhe. Also ist A ordentlich über K.

Satz 2. *Ist A eine beliebige algebraische Erweiterung von K, so gibt es einen und nur einen Körper S zwischen A und K, so daß*

1. *A über S ordentlich ist,*

2. *kein echter, K umfassender Teilkörper von S die Eigenschaft* 1. *hat. S besteht aus allen und nur den Elementen von A, die bei allen Automorphismen von A bzgl. K in Ruhe bleiben*: $S = A[\mathfrak{A}(K)]$.

Wir nennen S den starren Körper zwischen A und K.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß der Körper $S = A[\mathfrak{A}(K)]$ die Eigenschaften 1. und 2. hat. Einmal ist nämlich A über S ordentlich, da jeder Automorphismus von A bzgl. K auch ein Automorphismus von A bzgl. S ist, und umgekehrt, und da weiter ein Element aus A, das bei allen Automorphismen von A bzgl. K [bzw. S] in Ruhe bleibt, nach Definition zu S gehört.

Ist weiter S^* ein echter, K umfassender Teilkörper von S, so stimmen ebenfalls die Automorphismen von A bzgl. K mit denen von A bzgl. S^* überein. Es gibt aber ein Element a aus S, das nicht in S^* enthalten ist, das also bei allen Automorphismen von A bzgl. S^* in Ruhe bleibt, ohne zu S^* zu gehören. A wäre also über S^* nicht ordentlich.

Sei jetzt $\overline{S}$ ein zweiter Körper, der die Eigenschaften 1. und 2. hat. Dann ist jeder Automorphismus von A bzgl. $\overline{S}$ sicher auch ein Automorphismus von A bzgl. K, da ja K Teilkörper von $\overline{S}$ ist. Ist also a ein Element aus S, so bleibt es sicher auch bei allen Automorphismen von A bzgl. $\overline{S}$ in Ruhe. Da aber A über $\overline{S}$ ordentlich ist, muß a zu $\overline{S}$ gehören, d. h. $S \leqq \overline{S}$. Da weiter nach dem oben gezeigten A über S ordentlich ist, so kann nicht $\overline{S}$ echter Oberkörper von S sein, da dies einen Verstoß gegen 2. darstellte; also ist $\overline{S} = S$.

Satz 3. *Ist S der starre Körper zwischen A und K, so hat S als einziger Körper zwischen A und K die Eigenschaft, daß*

1. *jeder Automorphismus von A bzgl. K auch einer von A bzgl. S ist,*

2. *kein echter, in A enthaltener Oberkörper von S die Eigenschaft* 1. *hat.*

Beweis. S bleibt seiner Definition nach bei allen Automorphismen von A bzgl. K elementweise in Ruhe, erfüllt also 1.

Sei weiter S^* ein Körper zwischen A und S und a ein Element aus S^*, das nicht zu S gehört. Nach Definition von S gibt es dann einen Automorphismus $\mathfrak{a}$ von A bzgl. K, der a in $b \neq a$ überführt. Da a ein Element aus S^* ist, ist also $\mathfrak{a}$ sicher kein Automorphismus von A bzgl. S^*, d. h. S^* erfüllt nicht die Bedingung 1., also genügt S der Bedingung 2.

Sei schließlich $\bar{S}$ ein Körper zwischen A und K, der 1. und 2. erfüllt. Wie oben folgert man aus 1., daß $\bar{S} \leqq S$ sein muß, also folgt $\bar{S} = S$ aus 2.

Satz 2. und 3. ergeben zusammen den folgenden

Zusatz. *Ist S der starre Körper zwischen A und K, so hat S als einziger Körper zwischen A und K die Eigenschaft, daß*

1. *A über S ordentlich ist,*

2. *jeder Automorphismus von A bzgl. K auch ein Automorphismus von A bzgl. S ist.*

Satz 4. *Sei A eine beliebige algebraische Erweiterung von K. Dann und nur dann gilt für alle Untergruppen $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{A}$ die Gleichheit*

$$\mathfrak{A}[A(\mathfrak{U})] = \mathfrak{U},$$

wenn die Gruppe $\mathfrak{A}$ endlich ist.

Beweis. Verstehen wir wieder unter S den starren Körper zwischen A und K, so ist A ordentlich über S und $\mathfrak{A}$ die Gruppe aller Automorphismen von A bzgl. S.

Ist jetzt $\mathfrak{A}$ endlich, so ist auch A über S endlich. [Es ist sogar $[A:S]$ = Anzahl der Elemente von $\mathfrak{A}$[10].] Da aber A über S ordentlich, d. h. wegen Satz 1. normal und von erster Art, und überdies endlich ist, so gilt wegen IIIb. des § 1 für alle Untergruppen $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{A}$ [hier wird $\mathfrak{A}$ als Gruppe von A bzgl. S aufgefaßt] die Gleichheit

$$\mathfrak{A}[A(\mathfrak{U})] = \mathfrak{U}.$$

Ist dagegen $\mathfrak{A}$ unendlich, so ist A über S unendlich[11]. Dann gilt wegen IIIb. nicht immer die obige Gleichheit [z. B. nie, wenn $\mathfrak{U}$ abzählbar ist[12]], wobei wieder zu bedenken ist, daß $\mathfrak{A}$ auch die Gruppe von A bzgl. S ist.

[10]) Vgl. Abriß, Satz 3.

[11]) Vgl. Fußnote [10]).

[12]) Vgl. Abriß, S. 142.

Will man feststellen, für welche Untergruppen $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{A}$ die Gleichheit des Satzes 4 gilt, falls $\mathfrak{A}$ unendlich ist, so kann man mit W. Krull[13]) $\mathfrak{A}$ zum topologischen Gruppenraum machen. Auch hierzu ist es unnötig vorauszusetzen, daß A über K normal oder von erster Art ist, wenn man in folgender Weise vorgeht:

Ist Z ein Körper zwischen A und K von endlichem Abbildungsgrad über K[14]) [d. h. die Untergruppe $\mathfrak{A}(Z)$ von $\mathfrak{A}$ hat unter $\mathfrak{A}$ einen endlichen Index], *so seien $\mathfrak{A}(Z)$ und die Restklassen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}(Z)$* [= Nebenscharen von $\mathfrak{A}(Z)$] *Umgebungen eines jeden ihrer Elemente und hierdurch sei ein vollständiges Umgebungssystem des topologischen Gruppenraumes $\mathfrak{A}$ definiert.*

Bedenkt man, daß A über dem starren Körper S zwischen A und K ordentlich ist, weiter daß $\mathfrak{A}$ auch die Gruppe der Automorphismen von A bzgl. S ist, so sieht man, daß für S an Stelle von K als Grundkörper unser Umgebungsbegriff in $\mathfrak{A}$ mit dem Krullschen übereinstimmt, und es ergibt sich, ebenso wie Satz 4 aus III b. des § 1, aus dem Krullschen Satz[15]) der

Zusatz 1. *Ist A eine beliebige algebraische Erweiterung von K und $\mathfrak{A}$ ein topologischer Gruppenraum im oben erklärten Sinne, so gilt für eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{A}$ dann und nur dann die Gleichheit*

$$\mathfrak{A}[A(\mathfrak{U})] = \mathfrak{U},$$

wenn $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist[16]).

Satz 1 und dieser Zusatz 1 zusammen ergeben dann den

Zusatz 2. *Ist A eine beliebige algebraische Erweiterung von K, so läßt sich eine eineindeutige Zuordnung herstellen zwischen*

den Körpern zwischen K und A, über denen A normal und von erster Art ist, einerseits

und den in $\mathfrak{A}$ abgeschlossenen Untergruppen von $\mathfrak{A}$ andererseits.

Denn dies sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß

$$A[\mathfrak{A}(Z)] = Z \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}[A(\mathfrak{U})] = \mathfrak{U}$$

gelten.

---

[13]) Vgl. W. Krull, Math. Annalen **100** (1929), S. 687—698, besonders S. 689/690.

[14]) Vgl. Abriß, Definition 3, S. 137, wo dieser Begriff nur für den Spezialfall erklärt ist, daß A normal über K ist.

[15]) Vgl. W. Krull, a. a. O., S. 690, Hauptsatz 1.

[16]) Falls $\mathfrak{A}$ endlich ist, haben natürlich alle Untergruppen von $\mathfrak{A}$ diese Eigenschaft.

Satz 5. *Sei A eine beliebige algebraische Erweiterung von K und Z ein Körper zwischen A und K. Weiter sei $S(Z) = A[\mathfrak{A}(Z)]$ der starre Körper zwischen A und Z.*

Dann und nur dann ist ein Automorphismus $\mathfrak{a}$ von A bzgl. K mit $\mathfrak{A}(Z)$ vertauschbar [*d. h. $\mathfrak{a}$ gehört zum Normalisator von $\mathfrak{A}(Z)$ in $\mathfrak{A}$*], *wenn Z durch $\mathfrak{a}$ in einen Unterkörper von $S(Z)$ übergeführt wird*[17]).

Beweis. A. Führe $\mathfrak{a}$ den Körper Z in einen Teilkörper $\mathfrak{a}(Z)$ von $S(Z)$ über. Dann läßt jeder Automorphismus $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{A}(Z)$ auch $\mathfrak{a}(Z)$ elementweise in Ruhe. Also läßt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}$ den Körper Z elementweise in Ruhe, gehört zu $\mathfrak{A}(Z)$, d. h. $\mathfrak{a}$ ist mit $\mathfrak{A}(Z)$ vertauschbar.

B. Führe $\mathfrak{a}$ den Körper Z nicht in einen Teilkörper von $S(Z)$ über; dann gibt es ein Element a aus Z, so daß $\mathfrak{a}(a)$ nicht in $S(Z)$ enthalten ist. Da A über $S(Z)$ ordentlich ist, gibt es einen Automorphismus $\mathfrak{b}$ von A bzgl. $S(Z)$, also auch bzgl. Z, d. h. aus $\mathfrak{A}(Z)$, der $\mathfrak{a}(a)$ in $\mathfrak{b}[\mathfrak{a}(a)] \neq \mathfrak{a}(a)$ überführt. Dann ist aber $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}(a) = \mathfrak{a}^{-1}\{\mathfrak{b}[\mathfrak{a}(a)]\} \neq a$ gehört also nicht zu $\mathfrak{A}(Z)$, d. h. $\mathfrak{a}$ ist nicht mit $\mathfrak{A}(Z)$ vertauschbar.

Folgerung 1. *Dann und nur dann ist $\mathfrak{A}(Z)$ Normalteiler von $\mathfrak{A}$, wenn Z bei allen Automorphismen von A bzgl. K in Teilkörper von $S(Z)$ übergeführt wird.*

Denn dann und nur dann ist jeder Automorphismus von A bzgl. K mit $\mathfrak{A}(Z)$ vertauschbar.

Folgerung 2. *Sei der Körper Z zwischen A und K mit dem starren Körper zwischen A und Z identisch, d. h.*

$$Z = S(Z) = A[\mathfrak{A}(Z)];$$

dann und nur dann geht Z bei allen Automorphismen von A bzgl. K in sich über, wenn $\mathfrak{A}(Z)$ Normalteiler von $\mathfrak{A}$ ist[18]).

Denn nach Folgerung 1 geht Z dann und nur dann stets in Teilkörper von $S(Z)$ über, wenn $\mathfrak{A}(Z)$ Normalteiler von $\mathfrak{A}$ ist. Da wir aber vorausgesetzt hatten, daß $Z = S(Z)$ ist, so gilt unsere Behauptung.

§ 3.

Definition 2. *A heißt beweglich über K, wenn es zu jeder isomorphen Abbildung $\mathfrak{a}$ eines Zwischenkörpers Z_1 auf einen Zwischenkörper Z_2, die jedes Element aus K sich selbst zuordnet, einen Automorphismus $\mathfrak{a}^*$ von A gibt, der $\mathfrak{a}$ umfaßt* [*d. h. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^*$ stimmen in Z_1, dem Definitionsbereich von $\mathfrak{a}$, überein*].

---

[17]) Vgl. Abriß, Satz 6.

[18]) Ist A über K normal, so folgert man hieraus, daß auch Z über K normal ist.

Dann sagt I. des § 1 aus, daß A über K beweglich ist, falls A über K normal ist. — Die Umkehrung hiervon ist nicht wahr. Gegenbeispiel ist jeder Körper ohne Affekt über K. Ein derartiger Körper A ist primitiv über K [d. h. es gibt keinen echten Zwischenkörper zwischen A und K] und gestattet nur den identischen Automorphismus bzgl. K [19]).

Definition 3. *A heißt schwach beweglich über K, wenn es zu irgend zwei Elementen a, b aus A, die derselben irreduziblen Gleichung aus K genügen, einen Automorphismus von A bzgl. K gibt, der a in b überführt.*

Dann sagt II. des § 1 aus, daß A über K schwach beweglich ist, falls A über K normal ist.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis der folgenden Sätze:

Satz 6. *Dann und nur dann ist A über K beweglich, wenn ein irreduzibles Polynom $\alpha(x)$ aus K, das in A Nullstellen hat, in dem starren Körper S zwischen A und K einen irreduziblen Teiler $\beta(x)$ besitzt, der mit $\alpha(x)$ alle Nullstellen aus A gemein hat*[20]), [20a]).

Dann ist offenbar $\alpha(x) = \beta^r(x) \cdot \gamma(x)$, wo $\gamma(x)$ in K keine Nullstellen hat. $\beta(x)$ zerfällt in A in lauter verschiedene Linearfaktoren, da ja A über S ordentlich ist.

Satz 7. *Dann und nur dann ist A über K schwach beweglich, wenn A über K beweglich ist.*

Diese beiden Sätze werden aus den folgenden Hilfssätzen abgeleitet.

Hilfssatz 1. *Ist A beweglich über K, so ist A auch schwach beweglich über K.*

Beweis. Sei A beweglich über K. Weiter mögen die beiden Elemente a und b aus A derselben irreduziblen Gleichung aus K genügen. Dann gibt es eine isomorphe Abbildung $\mathfrak{a}$ von $K(a)$ auf $K(b)$, die jedes Element von K sich selbst und dem a das b zuordnet[21]). Da A über K beweglich ist, gibt es einen $\mathfrak{a}$ umfassenden Automorphismus $\mathfrak{a}^*$ von A bzgl. K. Speziell ist $\mathfrak{a}^*(a) = b$, d. h. A ist über K schwach beweglich.

Hilfssatz 2. *Ist A schwach beweglich über K, so hat jedes in K irreduzible Polynom $\alpha(x)$, das in A eine Nullstelle hat, in dem starren*

---

[19]) Vgl. R. Baer, Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1928 (14), § 3, S. 15, Definition 2 und Satz 5.

[20]) Es ist nur nötig, die Erfülltheit dieser Bedingung für solche irreduzible Polynome $\alpha(x)$ vorauszusetzen, die über K von erster Art sind; vgl Beweis des Hilfssatzes 3, insbesondere die Rückführung des Falles 2 auf den Fall 1.

[20a]) Daß es auch nicht bewegliche algebraische Erweiterungen erster Art gibt, zeigt das Beispiel des Anhangs II.

[21]) Vgl. Steinitz, Satz 2 des § 6.

Körper S zwischen A und K einen in S irreduziblen Teiler $\beta(x)$, so daß jede in A enthaltene Nullstelle von $\alpha(x)$ auch eine von $\beta(x)$ ist.

Beweis. Habe nämlich das in K irreduzible Polynom $\alpha(x)$ in A die Nullstellen a und b. Da A über K schwach beweglich ist, so gibt es einen Automorphismus $\mathfrak{a}$ von A bzgl. K, der a in b überführt. Notwendig ist $\mathfrak{a}$ auch ein Automorphismus von A bzgl. S. Also genügen a und b wegen IIa. des § 1 derselben in S irreduziblen Gleichung $\beta(x) = 0$. Notwendig ist $\beta(x)$ ein Teiler von $\alpha(x)$, d. h. aber, alle in A enthaltenen Nullstellen von $\alpha(x)$ sind auch solche von $\beta(x)$.

Hilfssatz 3. *Eine beliebige algebraische Erweiterung A von K ist beweglich über K, wenn jedes in K irreduzible Polynom $\alpha(x)$, das in A Nullstellen hat, in dem starren Körper S zwischen A und K einen in S irreduziblen Teiler $\beta(x)$ besitzt, so daß jede in A enthaltene Nullstelle von $\alpha(x)$ auch eine von $\beta(x)$ ist*[22]).

Beweis. Seien Z_1 und Z_2 zwei Körper zwischen A und K und gebe es eine isomorphe Abbildung $\mathfrak{a}$ von Z_1 auf Z_2, bei der jedes Element von K sich selbst zugeordnet wird.

Weiter sei Z_i^* der Vereinigungskörper von Z_i und S [23]), wo S der starre Körper zwischen A und K ist. Dann ist jedes Element aus Z_i^* ein Polynom in endlich viel Elementen aus Z_i mit Koeffizienten aus S; denn A ist algebraisch über K.

Wir *definieren* jetzt eine *Abbildung* $\mathfrak{a}^*$ von Z_1^* auf Z_2^*:

Ist $\pi(a_1, \ldots, a_n)$ ein Polynom in den a_i aus Z_1 mit Koeffizienten aus S, so sei

$$\mathfrak{a}^*[\pi(a_1, \ldots, a_n)] = \pi[\mathfrak{a}(a_1), \ldots, \mathfrak{a}(a_n)].$$

Offenbar ordnet $\mathfrak{a}^*$ jedem Element von Z_1^* wenigstens eines von Z_2^* zu; speziell wird jedem Element von S u. a. es selbst zugeordnet. — Ist weiter $\varrho(b_1, \ldots, b_m)$ irgendein Element aus Z_2^*, d. h. ein Polynom in den b_i aus Z_2 mit Koeffizienten aus S, so gibt es, da $\mathfrak{a}$ eine isomorphe Abbildung von Z_1 auf Z_2 ist, Elemente c_i $(i = 1, \ldots, m)$ aus Z_1 mit $\mathfrak{a}(c_i) = b_i$. Dann ist

$$\mathfrak{a}^*[\varrho(c_1, \ldots, c_m)] = \varrho[\mathfrak{a}(c_1), \ldots, \mathfrak{a}(c_m)] = \varrho(b_1, \ldots, b_m),$$

d. h. jedes Element von Z_2^* wird durch $\mathfrak{a}^*$ wenigstens einem Element von Z_1^* zugeordnet.

Um die *Eineindeutigkeit* der Abbildung $\mathfrak{a}^*$ zu beweisen, haben wir nur noch nachzuweisen, daß $\mathfrak{a}^*$ einem Element aus Z_1^* höchstens eines aus Z_2^* zuordnet. Denn $\mathfrak{a}$ ist eine eineindeutige Abbildung von Z_1 auf Z_2 und nach obigem sind die Verhältnisse hinsichtlich Z_1^* und Z_2^* symmetrisch.

---

[22]) Vgl. Fußnote [20]).

[23]) d. h. der kleinste Z_i und S enthaltende Teilkörper von A.

Sei a ein Element aus Z_1^*; dann kann es sein, daß

$$a = \pi_1(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{und}$$
$$= \pi_2(a_{n+1}, \ldots, a_m)$$

ist, wo die a_i [nicht notwendig sämtlich verschiedene] Elemente aus Z_1 und die π_j Polynome in den a_i mit Koeffizienten aus S sind. Nehmen wir im Argument von π_1 und π_2 auch die nicht wirklich auftretenden a_i auf, so können wir schreiben

$$a = \pi_1(a_1, \ldots, a_m)$$
$$= \pi_2(a_1, \ldots, a_m)$$

Wir haben also zu zeigen, daß dann

$$\pi_1[\mathfrak{a}(a_1), \ldots, \mathfrak{a}(a_m)] = \pi_2[\mathfrak{a}(a_1), \ldots, \mathfrak{a}(a_m)]$$

ist. Setzen wir $\pi = \pi_1 - \pi_2$, so sieht man ein, daß es genügt, folgendes nachzuweisen:

(1) *Ist* $\pi(a_1, \ldots, a_m)$ *ein Polynom in den* a_i *aus* Z_1 *mit Koeffizienten aus* S, *so ist*

$$\mathfrak{a}^*[\pi(a_1, \ldots, a_m)] = \pi[\mathfrak{a}(a_1), \ldots, \mathfrak{a}(a_m)] = 0,$$

wenn nur

$$\pi(a_1, \ldots, a_m) = 0$$

ist.

Zum Beweise dieser Behauptung betrachten wir den Körper $B = K(a_1, \ldots, a_m)$.

Fall 1. Sei B von erster Art über K.

Da B endlich über K ist, so ist dann auch B einfach über K[24]), d. h. $B = K(c)$. Insbesondere ist also $a_i = \alpha_i(c)$, wo α_i ein Polynom in c mit Koeffizienten aus K ist. Also wird

$$\pi(a_1, \ldots, a_m) = \pi[\alpha_1(c), \ldots, \alpha_m(c)] = \varrho(c),$$

wo ϱ ein Polynom in c mit Koeffizienten aus S ist. Also ist c eine in Z_1 enthaltene Lösung der Gleichung $\varrho(x) = 0$ aus S.

c und $\mathfrak{a}(c)$ genügen derselben irreduziblen Gleichung aus K. Da nämlich $\mathfrak{a}$ eine isomorphe Abbildung von Z_1 auf Z_2 ist, die jedes Element aus K sich selbst zuordnet, so folgt aus $\sum_{i=0}^{r} k_i c^i = 0$, wo die k_i Elemente aus K sind, auch

$$\mathfrak{a}\left(\sum_{i=0}^{r} k_i c^i\right) = \sum_{i=0}^{r} k_i \mathfrak{a}(c)^i = 0.$$

Nach der Voraussetzung unseres Hilfssatzes genügen also c und $\mathfrak{a}(c)$ auch derselben irreduziblen Gleichung $\beta(x) = 0$ aus S. Da $\beta(x) = 0$ und

---

[24]) Vgl. Steinitz, Satz 7 des § 13.

$\varrho(x) = 0$ die Lösung c gemein haben, und $\beta(x)$ irreduzibel ist, schließlich $\varrho(x)$ und $\beta(x)$ Polynome aus S sind, so ist $\beta(x)$ ein Teiler von $\varrho(x)$. Also ist auch $\mathfrak{a}(c)$ eine Nullstelle von $\varrho(x)$.

Da die $\alpha_i(c)$ Polynome in c aus Z_1 mit Koeffizienten aus K sind, so ist

$$\mathfrak{a}[\alpha_i(c)] = \alpha_i[\mathfrak{a}(c)].$$

Also wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^*[\pi(a_1, \ldots, a_m)] &= \pi[\mathfrak{a}(a_1), \ldots, \mathfrak{a}(a_m)] \\ &= \pi\{\mathfrak{a}[\alpha_1(c)], \ldots, \mathfrak{a}[\alpha_m(c)]\} \\ &= \pi\{\alpha_1[\mathfrak{a}(c)], \ldots, \alpha_m[\mathfrak{a}(c)]\} \\ &= \varrho[\mathfrak{a}(c)] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Damit ist im Falle 1 die Behauptung (1) bewiesen.

Fall 2. Sei B von zweiter Art über K, d. h. nicht von erster Art. Dann ist die Charakteristik p von A sicher von Null verschieden[25]), und es gibt zwischen K und B einen eindeutig bestimmten Körper B_0, über dem B Wurzelkörper, der über K von erster Art ist[26]). Also gibt es eine Zahl $f \geqq 0$, so daß $a_i^{p^f}$ für $i = 1, \ldots, m$ in B_0 enthalten ist.

Setzen wir $a_i^{p^f} = b_i$, so wird

$$[\pi(a_1, \ldots, a_m)]^{p^f} = \pi_0(b_1, \ldots, b_m),$$

wo π_0 ein Polynom in den b_i mit Koeffizienten aus S ist[27]).

Wenn $\pi(a_1, \ldots, a_m) = 0$ ist, so ist auch $\pi_0(b_1, \ldots, b_m) = 0$. Da $K(b_1, \ldots, b_m)$ als Teilkörper von B_0 eine Erweiterung erster Art ist, so können wir (1) nach dem im Fall 1 bewiesenen auf π_0 anwenden. Es ist also

$$\pi_0[\mathfrak{a}(b_1), \ldots, \mathfrak{a}(b_m)] = 0.$$

Da nun

$$\pi_0[\mathfrak{a}(b_1), \ldots, \mathfrak{a}(b_m)] = \pi_0[\mathfrak{a}(a_1)^{p^f}, \ldots, \mathfrak{a}(a_m)^{p^f}] = \{\pi[\mathfrak{a}(a_1), \ldots, \mathfrak{a}(a_m)]\}^{p^f}$$

ist [$\mathfrak{a}$ ist ja eine isomorphe Abbildung von Z_1 auf Z_2, also $\mathfrak{a}(a_i^{p^f}) = [\mathfrak{a}(a_i)]^{p^f}$], so ist also auch $\{\pi[\mathfrak{a}(a_1), \ldots, \mathfrak{a}(a_m)]\}^{p^f} = 0$.

Da aber ein Produkt nur verschwinden kann, wenn einer der Faktoren verschwindet, so muß

$$\pi[\mathfrak{a}(a_1), \ldots, \mathfrak{a}(a_m)] = 0$$

sein, wenn nur

$$\pi(a_1, \ldots, a_m) = 0$$

ist, womit (1) und damit auch die Eineindeutigkeit von $\mathfrak{a}^*$ vollständig bewiesen ist.

---

[25]) Vgl. Steinitz, § 11, 1.

[26]) Vgl. Steinitz, § 14, 1.

[27]) Es ist ja $(a+b)^{p^f} = a^{p^f} + b^{p^f}$ und $(a \cdot b)^{p^f} = a^{p^f} \cdot b^{p^f}$; vgl. Steinitz, § 12, Gleichung (1).

Speziell folgt hieraus, daß $\mathfrak{a}^*$ jedes Element von S genau sich selbst zuordnet.

Weiter folgt jetzt ohne weiteres aus der Definition von $\mathfrak{a}^*$, daß $\mathfrak{a}^*$ eine *isomorphe Abbildung* von Z_1^* auf Z_2^* ist, die $\mathfrak{a}$ umfaßt und jedes Element aus S sich selbst zuordnet.

Da aber A über S ordentlich ist, so können wir wegen Satz 1 des § 2 den Satz I des § 1 auf $\mathfrak{a}^*$ anwenden. Es gibt also einen Automorphismus von A bzgl. S, der in Z_1^* mit $\mathfrak{a}^*$, also in Z_1 mit $\mathfrak{a}$ übereinstimmt. Also ist A beweglich über K [28]).

Aus den Hilfssätzen 1 bis 3 folgen sofort die Sätze 6 und 7.

Folgerung 1. *Ist A über K beweglich, so besteht der starre Körper S zwischen A und K aus allen und nur den Elementen aus A, die einzige, in A enthaltene Lösung einer in K irreduziblen Gleichung sind.*

Beweis. Sind a und b zwei Elemente aus A derart, daß es einen Automorphismus $\mathfrak{a}$ von A bzgl. K gibt, der a in b überführt, so genügen a und b wegen IIa. des § 1 derselben, in K irreduziblen Gleichung. Da S aus allen Elementen besteht, die bei allen Automorphismen von A bzgl. K in Ruhe bleiben, so enthält S sicher alle die Elemente aus A, die einzige Lösung einer in K irreduziblen Gleichung sind.

Sind umgekehrt a und b zwei Elemente, die derselben in K irreduziblen Gleichung genügen, so gibt es, da A über K beweglich, also nach Satz 7 schwach beweglich ist, einen Automorphismus von A bzgl. K, der a in b überführt. Ist also speziell a Element von S, bleibt also bei allen Automorphismen von A bzgl. K in Ruhe, so muß $a = b$, d. h. a einzige Lösung einer in K irreduziblen Gleichung sein [29]).

---

[28]) Will man nur beweisen, daß *unter der Voraussetzung des Hilfssatzes* 3 *A schwach beweglich über K* ist, so führt schon die folgende, wesentlich einfachere Überlegung zum Ziel:

Seien a und b zwei Elemente aus A, die derselben in K irreduziblen Gleichung $\alpha(x) = 0$ genügen. Dann gibt es nach Voraussetzung in dem starren Körper S zwischen A und K ein in S irreduzibles Polynom $\beta(x)$, das Teiler von $\alpha(x)$ ist und a und b ebenfalls zu Nullstellen hat. Da A ordentlich über S ist, so folgt aus Satz 1 des § 2 und Satz II des § 1, daß es einen Automorphismus $\mathfrak{a}$ von A bzgl. S, also auch bzgl. K gibt, der a in b überführt. Also ist A schwach beweglich über K.

Damit ist wegen Hilfssatz 1 und 2 gezeigt, daß *die Bedingung des Hilfssatzes* 3 *notwendig und hinreichend dafür ist, daß A über K schwach beweglich ist.* Wäre nun bereits Satz 7 bewiesen, so folgte hieraus ohne weiteres auch Satz 6. Aber der Beweis des Satzes 7 dürfte kaum einfacher zu führen sein als unser gemeinsamer Beweis der Sätze 6 und 7; denn, wie man sich leicht überzeugt, ist der von uns beim Beweis des Hilfssatzes 3 definierte Isomorphismus $\mathfrak{a}^*$ der einzige $\mathfrak{a}$ umfassende Isomorphismus, der sich zu einem Automorphismus von A bzgl. K erweitern läßt, also jedes Element von S in sich überführt.

[29]) Diese Folgerung ließe sich auch leicht aus der Bedingung des Satzes 6 herleiten.

Folgerung 2. *Läßt A bzgl. K nur den identischen Automorphismus zu, so ist A dann und nur dann beweglich über K, wenn A nur einzige Nullstellen irreduzibler Gleichungen aus K enthält.*

Beweis. Unter der gemachten Voraussetzung ist A selbst der starre Körper zwischen A und K. — Ist A beweglich über K, so folgt also unsere Bedingung aus Folgerung 1. — Ist umgekehrt die Bedingung erfüllt, so ist A sicher schwach beweglich über K, also nach Satz 7 auch beweglich über K.

§ 4.

Satz 8. *Ist A beweglich über K und B ein Körper zwischen A und K, so ist A auch beweglich über B.*

Beweis. Sei A beweglich über K, Z_1 und Z_2 zwei B umfassende Unterkörper von A, und $\mathfrak{a}$ eine isomorphe Abbildung von Z_1 auf Z_2, die jedes Element von B, also auch jedes von K sich selbst zuordnet. Dann gibt es einen $\mathfrak{a}$ umfassenden Automorphismus $\mathfrak{a}^*$ von A. Also ist A auch über B beweglich.

Satz 9. *Ist A über K beweglich und B ein Körper zwischen A und K, der bei allen Automorphismen von A bzgl. K [als Ganzes] in sich übergeht, so ist auch B über K beweglich.*

Beweis. Seien Z_1 und Z_2 zwei Körper zwischen B und K, also auch zwischen A und K, und $\mathfrak{a}$ eine isomorphe Abbildung von Z_1 auf Z_2, bei der jedes Element von K sich selbst zugeordnet wird. Da A über K beweglich ist, gibt es einen $\mathfrak{a}$ umfassenden Automorphismus $\mathfrak{a}^*$ von A. Nach der über B gemachten Voraussetzung bewirkt aber $\mathfrak{a}^*$ einen Automorphismus $\mathfrak{b}$ von B, der notwendig auch $\mathfrak{a}$ umfaßt. Also ist B über K beweglich.

Dieser Satz 9 gestattet keine Umkehrung! Z. B. sei A ein kleinster, über K normaler, einen über K affektlosen Körper B umfassender Körper. Dann sind A und B über K beweglich, aber B geht nicht bei allen Automorphismen von A bzgl. K in sich über.

Folgerung 1. *Ist A über K beweglich, so ist auch der starre Körper S zwischen A und K über K beweglich.*

Denn S und sogar jedes Element von S geht bei allen Automorphismen von A bzgl. K in sich über.

Folgerung 2. *Ist A über K beweglich und B der kleinste Körper zwischen A und K, der die sämtlichen in A vorkommenden Nullstellen des Systems $\{\varphi_\nu(x)\}$ von Polynomen aus K enthält, so ist B über K beweglich.*

Sind nämlich $a_{\nu i}$ für $i = 1, \ldots, n_\nu$ die sämtlichen Nullstellen von $\varphi_\nu(x)$ aus A, so ist $B = K(\{a_{\nu i}\})$. Da weiter bei Automorphismen von A bzgl. K jedes $a_{\nu i}$ in ein $a_{\nu k}$ übergeht, so geht bei allen Automorphismen von A bzgl. K der Körper B in sich über. Wegen Satz 9 ist also B über K beweglich.

Hilfssatz 4. *Sei A eine beliebige algebraische Erweiterung von K und B ein Körper zwischen A und K. Hat dann eine irreduzible Gleichung aus K*

entweder in B keine Nullstellen,

oder jede ihrer Nullstellen aus A ist auch in B enthalten,

so bewirken Automorphismen von A bzgl. K auch stets Automorphismen von B.

Beweis. Sei nämlich a ein beliebiges Element aus B und $\alpha(x) = 0$ die irreduzible Gleichung aus K, der a genügt. Bei Automorphismen von A bzgl. K geht a wieder in Nullstellen von $\alpha(x)$ über. Diese gehören nach Voraussetzung mit a zu B, d. h. bei jedem Automorphismus von A bzgl. K geht jedes Element wieder in ein Element von B über.

Satz 10. *Wenn A über K beweglich ist, so geht ein Körper B zwischen A und K dann und nur dann bei allen Automorphismen von A bzgl. K [als Ganzes] in sich über, wenn ein irreduzibles Polynom aus K in B entweder keine oder alle die Nullstellen hat, die es in A hat.*

Beweis. Das Hinreichen der Bedingung folgt bereits aus Hilfssatz 4, die Notwendigkeit daraus, daß A über K auch schwach beweglich ist.

Für den Nachweis der Notwendigkeit unserer Bedingung läßt sich, wie Satz 6 lehrt, i. A. nicht auf die Forderung verzichten, daß A über K beweglich ist.

Satz 11. *Sei A eine beliebige algebraische Erweiterung von K. Weiter sei E der Körper zwischen A und K, der alle und nur die Elemente aus A enthält, die über K von erster Art sind*[30]).

Dann und nur dann ist A über K beweglich, wenn

1. *E über K beweglich ist, und*

2. *jeder Automorphismus von E bzgl. K durch einen [und nur einen*[31])*] von A induzierbar ist.*

Beweis. Der Satz wird trivial, wenn die Charakteristik p von A gleich Null wird, da dann $E = A$ ist[32]). Wir nehmen deshalb im folgenden an, daß $p > 0$ ist.

---

[30]) Daß die Gesamtheit dieser Elemente einen Körper bildet, folgt aus Steinitz, Satz 1 des § 14.

[31]) Nach dem in Fußnote [30]) zitierten Satz von Steinitz ist ja A Wurzelkörper über E.

[32]) Vgl. Steinitz, § 11, 1.

A. Sei A beweglich über K. Dann ist 2. sicher wahr, wie ohne weiteres aus der Definition der Beweglichkeit folgt. — Da bei Automorphismen von A bzgl. K jedes Element aus A, das über K von erster Art ist, wieder in ein solches übergeht, so geht E bei allen Automorphismen von A bzgl. K in sich über, ist also nach Satz 9 mit A über K beweglich.

B. Seien die Bedingungen 1. und 2. erfüllt und a, b zwei beliebige Elemente aus A, die derselben in K irreduziblen Gleichung $\alpha(x) = 0$ genügen.

Da A über E Wurzelkörper ist[33]), so gibt es eine Zahl $f \geqq 0$, so daß $a^{p^f} = a^*$ Element aus E ist. a^* genüge in K der irreduziblen Gleichung $\beta(x) = 0$. Dann ist wegen $\beta(a^*) = \beta(a^{p^f}) = 0$ das Element a eine Lösung von $\beta(x^{p^f}) \equiv \gamma(x) = 0$. Da $\gamma(x)$ und $\alpha(x)$ die Nullstelle a gemein haben, beide in K enthalten sind und $\alpha(x)$ irreduzibel in K ist, so ist $\alpha(x)$ ein Teiler von $\gamma(x)$. Da weiter b nach Voraussetzung ebenfalls eine Nullstelle von $\alpha(x)$ ist, so ist b auch eine Nullstelle von $\gamma(x)$. Also ist wegen $0 = \gamma(b) = \beta(b^{p^f})$ das Element $b^* = b^{p^f}$ ebenfalls eine Nullstelle von $\beta(x)$.

Da $\beta(x)$ irreduzibel ist und das Element a^*, das über K von erster Art ist, zur Nullstelle hat, so ist $\beta(x)$ ein Polynom erster Art[34]) und also auch b^* ein Element erster Art über K. Damit haben wir gezeigt:

a^* und b^* sind Elemente aus E und genügen beide der in K irreduziblen Gleichung $\beta(x) = 0$.

Da E wegen 1. über K beweglich ist, so nach Satz 7 auch schwach beweglich über K. Also gibt es einen Automorphismus $\mathfrak{e}$ von E bzgl. K, der a^* in b^* überführt.

Wegen 2. gibt es dann einen Automorphismus $\mathfrak{a}$ von A, der $\mathfrak{e}$ umfaßt; insbesondere ist also $\mathfrak{a}$ ein Automorphismus von A bzgl. K und $\mathfrak{a}(a^*) = b^*$. Nun ist

$$[\mathfrak{a}(a)]^{p^f} = \mathfrak{a}(a^*) = b^*,$$

also $\mathfrak{a}(a) = b$, da die Gleichung $x^{p^f} - b^* = 0$ höchstens eine Lösung haben kann.

Damit ist aber gezeigt, daß A über K schwach beweglich ist, wenn nur die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind, wegen Satz 7 also auch, daß A über K beweglich ist.

Satz 12. *Dann und nur dann ist A über K ordentlich, wenn*

1. *A über K beweglich ist, und*

2. *eine nicht lineare irreduzible Gleichung aus K in A entweder keine oder wenigstens zwei verschiedene Nullstellen hat.*

---

[33]) Vgl. Fußnote [31]).

[34]) Vgl. Steinitz, Anfang des § 13.

Beweis. A. Sei A über K ordentlich. Wegen Satz 1 ist dann A über K normal, also wegen I. des § 1 auch beweglich. Weiter ist wegen Satz 1 A über K von erster Art. Also ist eine irreduzible Gleichung aus K mit nur einer Nullstelle in A notwendig linear.

B. Da A über K beweglich ist, so besteht nach Folgerung 1 aus Satz 7 der starre Körper S zwischen A und K nur aus einzigen Nullstellen von in K irreduziblen Polynomen, ist also wegen 2. mit K identisch. Über S ist aber A ordentlich, also auch über K.

Zusatz. *An Stelle von* 1. *genügt es vorauszusetzen*:

1_0. *Der starre Körper S zwischen A und K ist beweglich über K und gestattet nur den identischen Automorphismus bzgl. K.*

Wegen Folgerung 1 aus Satz 9 folgt 1_0. aus 1. — Umgekehrt besteht wegen Folgerung 2 aus Satz 7 dann und nur dann S aus einzigen Nullstellen irreduzibler Gleichungen aus K, wenn 1_0. erfüllt ist.

§ 5.

Satz 13. *Dann und nur dann ist A über K normal, wenn der starre Körper S zwischen A und K aus allen und nur den Wurzelelementen*[35]) *bzgl. K besteht*[35a]).

Beweis. A. Sei A über K normal. Wegen I. des § 1 ist dann A über K beweglich. Also besteht S aus der Gesamtheit derjenigen Elemente aus A, die einzige Nullstellen einer irreduziblen Gleichung aus K sind. Insbesondere enthält also S alle Wurzelelemente aus A bzgl. K.

Ist jetzt a ein beliebiges Element aus S, und $\alpha(x) = 0$ die irreduzible Gleichung aus K, der a genügt, so zerfällt $\alpha(x)$ in A in Linearfaktoren und hat in A nur die Nullstelle a. Also ist $\alpha(x) = (x - a)^n$, wenn nur $\alpha(x)$ als höchsten Koeffizienten 1 hat. Da $\alpha(x)$ irreduzibel in K

---

[35]) Zur Abkürzung der Ausdrucksweise gebrauchen wir hier den Begriff „Wurzelelement" in dem folgenden gegenüber der Steinitzschen Definition (vgl. Steinitz, Ende des § 12) etwas verallgemeinerten Sinne:

Das Element a aus dem Erweiterungskörper A von K heiße Wurzelelement bzgl. K, wenn die irreduzible Gleichung $\alpha(x) = 0$ aus K, der a genügt,

1. *in A nur die Lösung a hat und*
2. *in A in Linearfaktoren zerfällt.*

Dieser Begriff des Wurzelelements deckt sich mit dem Steinitzschen, falls die Charakteristik p von A von Null verschieden ist; denn dann ist $\alpha(x) = c(x-a)^{p^f}$. — Ist aber $p = 0$ [in welchem Falle Steinitz den Begriff des Wurzelelements gar nicht definiert hat], so ist a dann und nur dann Wurzelelement bzgl. K, wenn $\alpha(x) = c(x-a)$, d. h. wenn a Element aus K ist.

[35a]) Da S stets alle Wurzelelemente bzgl. K enthält, so genügt es vorauszusetzen, daß S *nur* aus Wurzelelementen bzgl. K besteht.

ist, so ist entweder $n = 1$, wenn nämlich a in K enthalten ist, oder $n = p^f$, wo $p > 0$ die Charakteristik von A ist[36]). Ist speziell $p = 0$, so ist also stets $n = 1$ und $S = K$.

B. Bestehe S nur aus den Wurzelelementen von A bzgl. K. Ist dann A bzgl. K von erster Art, so ist $S = K$; und da A über S normal ist, so ist auch A über K normal.

Sei also A über K von zweiter Art, und $\alpha(x)$ ein irreduzibles Polynom aus K, das in A eine Nullstelle a hat. Ist a Element aus S, so ist nach der über S gemachten Annahme $\alpha(x) = (x - a)^{p^f}$, zerfällt also in A in Linearfaktoren.

Ist aber a kein Element aus S, so genügt a einer in S irreduziblen Gleichung $\beta(x) = 0$. Dann gibt es aber eine Zahl $g \geqq 0$, so daß $\gamma(x) = \beta(x)^{p^g}$ in K enthalten ist, da ja S Wurzelkörper über K ist. Da $\alpha(x)$ irreduzibel ist und $\alpha(x)$ und $\gamma(x)$ die Nullstelle a gemein haben, so ist $\gamma(x) = \delta(x) \cdot \alpha(x)$. Da weiter A auch über S ordentlich ist, so ist nach Satz 1 A auch über S normal; da schließlich das irreduzible Polynom $\beta(x)$ aus S in A eine Nullstelle, nämlich a, hat, so zerfällt $\beta(x)$ in A in Linearfaktoren. Also zerfällt auch $\gamma(x)$ und mithin auch $\alpha(x)$ in A in Linearfaktoren, d. h. A ist über K normal.

Folgerung 1. *Ist A normal über K, so ist A dann und nur dann von erster Art über K, wenn A kein Wurzelelement bzgl. K enthält, das nicht schon in K enthalten ist.*

Denn dann und nur dann ist der starre Körper $S = K$.

Folgerung 2. *Dann und nur dann ist A über K normal, wenn A über dem Wurzelkörper W zwischen A und K normal ist.*

Beweis. A. Ist A über K normal, so ist A auch über jedem Körper zwischen A und K normal, also auch über W.

B. Sei A über W normal. Dann besteht nach Satz 13 der starre Körper zwischen A und W nur aus Wurzelelementen bzgl. W. Da diese aber gemäß der Definition von W auch Wurzelelemente bzgl. K sind, so ist W selbst der starre Körper zwischen A und W, d. h. A ist über W ordentlich. Dann ist aber W als Wurzelkörper auch der starre Körper zwischen A und K. Also ist nach Satz 13 A über K normal.

Folgerung 3. *Dann und nur dann ist A über K normal, wenn*

1. *A über K beweglich und*

2. *der starre Körper S zwischen A und K über K normal ist.*

Beweis. A. Ist A über K normal, so folgt 1. aus I. des § 1. 2. folgt aus Satz 13, da jeder Wurzelkörper bzgl. K über K normal ist.

---

[36]) Vgl. Steinitz, Anfang des § 13.

B. Wenn die Bedingung 1. erfüllt ist, so besteht nach Folgerung 1 aus Satz 7 der starre Körper S nur aus solchen Elementen aus A, die einzige Nullstellen irreduzibler Gleichungen aus K sind. Also folgt aus Bedingung 2., daß S Wurzelkörper über K ist. Mithin ist wegen Satz 13 A über K normal.

Zusatz 1. *Wieder läßt sich die Bedingung* 1. *durch die Bedingung* 1_0. *des Zusatzes zu Satz* 12 *ersetzen.*

Zusatz 2. *Die Bedingung* 1. *läßt sich auch durch die folgende ersetzen:*

1′. *Jeder Automorphismus von S bzgl. K läßt sich zu einem von A bzgl. K erweitern.*

Beweis. Sind nämlich 1′. und 2. erfüllt, so kann S wegen II. des § 1 nur einzige Nullstellen in K irreduzibler Polynome enthalten, da S wegen 1′. nur den identischen Automorphismus bzgl. K zuläßt. Also ist S Wurzelkörper bzgl. K, also A nach Satz 13 normal über K. — Die Notwendigkeit von 1′. folgt sofort aus Satz 13, da S als Wurzelkörper bzgl. K nur den identischen Automorphismus bzgl. K zuläßt.

Folgerung 4. *Dann und nur dann ist A über K normal, wenn ein irreduzibles Polynom aus K, das in A Nullstellen hat, in dem starren Körper S zwischen A und K in lauter gleiche irreduzible Faktoren zerfällt.*

Beweis. Wir können annehmen, daß die Charakteristik p von A von Null verschieden ist, da im anderen Fall, wegen Satz 13, $S = K$ [37]) und somit unser Satz trivial wäre.

A. Sei A über K normal und $\alpha(x)$ ein irreduzibles Polynom aus K, dessen höchster Koeffizient 1 ist und das in A wenigstens eine Nullstelle hat. Dann zerfällt $\alpha(x)$ in A in Linearfaktoren:

$$\alpha(x) = \{\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)\}^{p^f},$$

wo $a_i \neq a_k$ für $i \neq k$ und $f \geqq 0$ ist[38]).

Da A über S ordentlich ist, so ist das irreduzible Polynom aus S, dessen Nullstelle a_1 ist:

$$\beta(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i).$$

Denn A ist nach I. des § 1 beweglich über K. Also müssen alle Nullstellen von $\alpha(x)$ auch solche von $\beta(x)$ sein. Mithin ist $\alpha(x) = \beta(x)^{p^f}$, wo $\beta(x)$ irreduzibel in S ist.

---

[37]) Vgl. Steinitz, § 11, 1.

[38]) Vgl. Steinitz, § 10, 4a.

B. Sei umgekehrt unsere Bedingung erfüllt; a ein Element aus S und $\alpha(x) = 0$ die irreduzible Gleichung aus K, der a genügt. Da $x - a$ in S enthalten ist, ist nach unserer Voraussetzung $\alpha(x) = (x - a)^n$ und es wird $n = p^f$ mit $f \geqq 0$, da $\alpha(x)$ irreduzibel ist. Also ist S Wurzelkörper über K, mithin nach Satz 13 A normal über K.

Folgerung 5. *Sei A eine beliebige algebraische Erweiterung von K, und E der aus allen und nur den Elementen aus A bestehende Körper, die über K von erster Art sind.*

Dann und nur dann ist A normal über K, wenn

1. *E normal über K ist und*

2. *jeder Automorphismus von E bzgl. K sich zu einem Automorphismus von A erweitern läßt.*

Beweis. Der Satz ist trivial, wenn die Charakteristik p von A gleich Null ist. Wir setzen deshalb im folgenden $p > 0$ voraus.

A. Sei A über K normal. Dann ist wegen I. des § 1 auch A über K beweglich, also speziell 2. wahr. — Ist weiter $\alpha(x)$ ein irreduzibles Polynom aus K, das in E eine Nullstelle hat, so ist es ein Polynom erster Art und zerfällt in A vollständig. Da aber die sämtlichen Nullstellen von $\alpha(x)$ von erster Art über K sind, so liegen sie in E und mithin zerfällt $\alpha(x)$ bereits in E vollständig, d. h. E ist über K normal.

B. Seien die Bedingungen 1. und 2. erfüllt. Da dann E normal und von erster Art, d. h. nach Satz 1 ordentlich über K ist, so ist K selbst der starre Körper zwischen E und K.

Sei jetzt a ein beliebiges Element aus A. Dann gibt es, da A Wurzelkörper über E ist, eine Zahl $f \geqq 0$, so daß $a^{p^f} = a^*$ in E enthalten ist.

Sei a^* kein Element aus K. Dann gibt es, da E über K ordentlich ist, einen Automorphismus $\mathfrak{e}$ von E bzgl. K, der a^* in $\mathfrak{e}(a^*) = b^* \neq a^*$ überführt. Wegen Bedingung 2. gibt es dann einen $\mathfrak{e}$ umfassenden Automorphismus $\mathfrak{a}$ von A; speziell ist $\mathfrak{a}(a^*) = b^*$.

Also ist $[\mathfrak{a}(a)]^{p^f} = \mathfrak{a}(a^*) = b^* \neq a^*$. Wäre nun $\mathfrak{a}(a) = a$, so wäre auch $[\mathfrak{a}(a)]^{p^f} = a^{p^f}$, d. h. $a^* = b^*$, was unmöglich ist. Also ist

$$a \neq \mathfrak{a}(a),$$

d. h. a gehört nicht zum starren Körper zwischen A und K, wenn nur a^{p^f} zu E, aber nicht zu K gehört.

Also besteht der starre Körper zwischen A und K nur aus Wurzelelementen bzgl. K, d. h. aber nach Satz 13, daß A über K normal ist.

§ 6[39]).

Satz 14. *Ist A über K normal, so ist A über dem Körper W zwischen A und K, der aus allen und nur den in A enthaltenen Wurzelelementen bzgl. K besteht, von erster Art.*

Dies folgt ohne weiteres aus Satz 13, da unter der gemachten Voraussetzung W der starre Körper zwischen A und K ist und über diesem ja A ordentlich, also auch von erster Art ist.

Zusatz. *Der Körper W zwischen A und K ist, falls A über K normal ist, durch die folgenden beiden Eigenschaften eindeutig charakterisiert:*

1. *A ist ordentlich über W.*

2. *W ist Wurzelkörper über K.*

Denn jeder Körper B mit diesen Eigenschaften muß wegen 1. W als starren Körper umfassen, wegen 2. in W als größtem Wurzelkörper enthalten sein.

Im Satze 14 ist die Voraussetzung, daß A über K normal ist, nicht notwendig; dies zeigt jede nicht normale Erweiterung erster Art eines über K normalen Körpers A, der über K nicht von erster Art ist.

Dagegen ist der Satz 14 ohne die Voraussetzung, daß A über K normal ist, i. A. nicht richtig. Dies zeigt das folgende

Beispiel einer Erweiterung zweiter Art, deren sämtliche Wurzelelemente bereits im Grundkörper enthalten sind:

Sei P ein beliebiger Körper der Charakteristik $p > 0$ und $K = P(t_1, t_2)$ eine rein transzendente Erweiterung von P vom Transzendenzgrad 2[40]).

Weiter sei $\alpha(x) = x^2 + t_1 x + t_2$ und $\beta(x) = \alpha(x^p) = x^{2p} + t_1 x^p + t_2$.

$\alpha(x)$ ist in K irreduzibel, denn im anderen Fall wäre die Gleichung $x^2 - t_1^2 + 4 t_2 = 0$ in K auflösbar, was unmöglich ist, da K vom Transzendenzgrad 2 über P ist. Mit $\alpha(x)$ ist aber auch $\beta(x)$ irreduzibel, denn sonst müßten t_1 und t_2 in K p-te Potenzen sein.

Wir adjungieren jetzt zu K eine Nullstelle a von $\beta(x)$ und setzen $A = K(a)$.

Offenbar ist A von zweiter Art über K, denn $\beta(x)$ ist irreduzibel in K und hat a zur p-fachen Nullstelle.

Sei jetzt b ein Wurzelelement aus A bzgl. K.

---

[39]) In diesem § 6 machen wir stets die Annahme, daß die Charakteristik p der betrachteten Körper von Null verschieden ist.

[40]) Vgl. Steinitz, § 23.

Weiter verstehen wir unter K_1 den Körper der p-ten Potenzen aus K $[K_1 = P(t_1^p, t_2^p)]$. Dann muß nach einem Hauptschen Satz das irreduzible Polynom $\beta(x)$ in $K_1(b^p)$ enthalten sein[41]). Es wäre also $t_i = \varphi_i(b^p)$, wo die φ_i Polynome in b^p mit Koeffizienten aus K_1 sind. Da aber b ein Element aus A, also ein Polynom in a mit Koeffizienten aus K ist, so ist b^p ein Polynom in a^p mit Koeffizienten aus K_1. Also ist $t_i = \tau_i(a^p)$, wo die τ_i Polynome in a^p mit Koeffizienten aus K sind. Dann wäre aber t_i eine p-te Potenz in der Erweiterung erster Art $K(a^p)$ von K, was unmöglich ist.

Satz 15. *Sei A eine beliebige algebraische Erweiterung von K, W der aus allen in A enthaltenen Wurzelelementen bzgl. K bestehende Körper, E der aus allen in A enthaltenen Elementen erster Art bzgl. K bestehende Körper. Schließlich sei $W \vee E$ der Vereinigungskörper von W und E, d. h. der kleinste in A enthaltene, W und E enthaltende Körper.*

Dann und nur dann ist A über W von erster Art, wenn $A = W \vee E$ ist.

Beweis. A. Ist $A = W \vee E$, so ist ein beliebiges Element a aus A ein Polynom in endlich viel Elementen $w_1, \ldots, w_n$ aus W, $e_1, \ldots, e_r$ aus E mit Koeffizienten aus K. Da die Elemente e_i von erster Art über K sind, so sind sie auch von erster Art über W, d. h. $W(e_1, \ldots, e_r)$ ist eine Erweiterung erster Art von W[42]). Da diese aber a enthält, so ist a selbst von erster Art über W, d. h. A ist von erster Art über W.

B. Sei $A > W \vee E$ und a beliebig aus A. Dann ist a^{p^f} für ein geeignetes $f \geqq 0$ Element aus E[43]). Wählen wir dies f also möglichst klein, so genügt a der in E irreduziblen Gleichung $\alpha(x) \equiv x^{p^f} - b = 0$, die als einzige Lösung a hat. In $W \vee E$ kann $\alpha(x)$ nur derart zerfallen, daß $\alpha(x) = \beta(x)^n$ wird, da $\alpha(x) = (x-a)^{p^f}$ ist. Notwendig ist

$$\beta(x) = (x-a)^{\frac{p^f}{n}} = (x-a)^{p^k}.$$

Entweder ist $k = 0$, dann gehört a zu $W \vee E$; oder es ist $k > 0$, dann ist a Wurzelelement bzgl. $W \vee E$. Im letzten Falle ist aber a nicht von erster Art über W, denn das irreduzible Polynom aus W, dessen Nullstelle a ist, hat $\beta(x)$ zum Teiler, also mehrfache Nullstellen. Nach unserer Voraussetzung $A > W \vee E$ muß es aber solche Elemente a geben, d. h. A ist über W nicht von erster Art.

Zusatz. *Ist A über K beliebig, so ist $W \vee E$ der eindeutig bestimmte, größte Körper zwischen A und W, der über W von erster Art ist.*

---

[41]) Vgl. O. Haupt, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., Math. nat. Abt., 1928, S. 361, 1. Satz.

[42]) Vgl. Steinitz, § 13, 8.

[43]) Denn es ist ja A Wurzelkörper über E; vgl. Steinitz, § 14, 1.

Ist nämlich der Körper B zwischen A und W von erster Art über W, so muß er nach Satz 15 in $W \vee E$ enthalten sein. — $W \vee E$ ist dadurch eindeutig bestimmt und enthält alle in A enthaltenen Elemente, die bzgl. W von erster Art sind.

Satz 16. *Sei A eine beliebige algebraische Erweiterung von K, N der kleinste, A umfassende, über K normale Körper. Weiter mögen W und E dieselbe Bedeutung wie im Satz* 15 *haben, an welchen Bezeichnungen wir im folgenden festhalten.*

Dann und nur dann ist A über W von erster Art, wenn es in N nur solche Wurzelelemente bzgl. K gibt, die schon in W enthalten sind.

Beweis. A. Sei A über W von erster Art. Wegen Satz 15 ist dann $A = W \vee E$. Sei E^* der kleinste, E umfassende, über K normale Körper in N. Notwendig ist E^* mit E von erster Art über K. Dann ist $E^* \vee W$ als Vereinigungskörper von zwei über K normalen Körpern selbst über K normal und umfaßt A. Also ist $N = E^* \vee W$.

Sei a ein beliebiges Wurzelelement aus N bzgl. K. Dann ist $a = \alpha(w_1, \ldots, w_n, e_1, \ldots, e_r)$ ein Polynom in den Elementen w_i aus W und e_k aus E^* mit Koeffizienten aus K. Sei weiter B ein kleinster Teilkörper von N, der über K normal ist und $w_1, \ldots, w_n, e_1, \ldots, e_r$, also auch a enthält. Dann ist B ordentlich über $K(w_1, \ldots, w_n)$, da normal über K und Erweiterung erster Art von $K(w_1, \ldots, w_n)$. Da a als Wurzelelement bzgl. K bei allen Automorphismen bzgl. K in Ruhe bleibt, so bleibt a auch bei allen Automorphismen von B bzgl. $K(w_1, \ldots, w_n)$ in Ruhe, gehört also zu dem Teilkörper $K(w_1, \ldots, w_n)$ von W, d. h. zu W.

B. Sei W der Wurzelkörper von N bzgl. K. Da N über K normal ist, so ist nach Satz 13 N von erster Art über W. Da $W \leqq A \leqq N$ ist, so ist also auch A von erster Art über W.

Folgerung 1. *Dann und nur dann ist A von zweiter Art über K, wenn N Wurzelelemente bzgl. K enthält.*

Beweis. Enthält N keine Wurzelelemente, so ist nach Satz 13 N von erster Art über K, also ist auch A von erster Art über K.

Enthält aber N Wurzelelemente bzgl. K, so bestehen zwei Möglichkeiten:

Entweder A enthält auch Wurzelelemente bzgl. K. Dann ist A sicher von zweiter Art über K.

Oder A enthält keine Wurzelelemente bzgl. K. Dann ist $W = K$. Es gibt also in N Wurzelelemente bzgl. K, die nicht in W enthalten sind. Dann ist nach Satz 16 A über W von zweiter Art; wegen $W = K$ ist also A über K von zweiter Art.

Folgerung 2. *Dann und nur dann ist A über W von erster Art, wenn A mit dem starren Körper zwischen N und A identisch ist.*

Beweis. Dann und nur dann ist A mit dem starren Körper zwischen N und A identisch, wenn N über A ordentlich ist. Da N über K, also auch über A normal ist, so tritt dies dann und nur dann ein, wenn N über A von erster Art ist. Da N über A normal ist, so ist nach Satz 13 hierzu notwendig und hinreichend, daß alle Wurzelelemente von N bzgl. K in A enthalten sind. Nach Satz 16 ist dies aber dann und nur dann der Fall, wenn A über W von erster Art ist.

Satz 17. *Wenn A über W von erster Art ist, so läßt sich jeder Automorphismus von E bzgl. K zu einem [und nur einem] Automorphismus von A bzgl. K erweitern.*

Beweis. Sei N der kleinste, A umfassende, über K normale Körper. Nach Satz 13 und 16 ist dann W der starre Körper zwischen N und K, da ja A über W von erster Art ist.

Wegen I. des § 1 ist N über K beweglich. Es gibt also zu jedem vorgelegten Automorphismus $\mathfrak{e}$ von E bzgl. K einen $\mathfrak{e}$ umfassenden Automorphismus $\mathfrak{n}$ von N. Da $\mathfrak{n}$ auch ein Automorphismus bzgl. K ist, so läßt $\mathfrak{n}$ jedes Element aus W in Ruhe. Also geht bei $\mathfrak{n}$ der Körper $E \vee W$ in sich über. Da A über W von erster Art ist, so ist $E \vee W = A$ wegen Satz 15, d. h. $\mathfrak{n}$ induziert einen Automorphismus $\mathfrak{a}$ von A, der $\mathfrak{e}$ umfaßt.

Bemerkung. *Die Bedingung dieses Satzes ist nur notwendig, nicht hinreichend.*

Dies zeigt das folgende Beispiel einer Erweiterung zweiter Art, bei der jedes Wurzelelement im Grundkörper enthalten ist, bei der sich aber jeder Automorphismus des Zwischenkörpers erster Art bzgl. des Grundkörpers zu einem Automorphismus des Gesamtkörpers erweitern läßt.

Sei P ein beliebiger Körper der Charakteristik $p > 0$, $K = P(t_1, \ldots, t_n)$ eine rein transzendente Erweiterung von P vom Transzendenzgrad $n > 2$. [Im Falle $n = 2$ erhielten wir wieder das früher behandelte Beispiel, bei dem aber die Bedingung des Satzes nicht erfüllt ist.]

Weiter sei $\alpha(x) = x^n + t_1 x^{n-1} + \ldots + t_n$ und $\beta(x) = \alpha(x^p)$. Wir bilden $A = K(a)$, wo a eine Nullstelle des in K irreduziblen Polynoms zweiter Art $\beta(x)$ ist. Man sieht wie bei dem zitierten Beispiel, daß $W = K$, $E = K(a^p)$ und A über K von zweiter Art ist.

Da aber a^p Nullstelle des affektlosen Polynoms erster Art $\alpha(x)$ ist, so gestattet E bzgl. K nur den identischen Automorphismus in sich, der naturgemäß zu einem von A erweiterbar ist. Dieser letzte Schluß versagt nur für $n = 2$, weshalb wir das frühere Beispiel nicht mehr benutzen konnten.

Folgerung. *Ist A von erster Art über W, so ist*

a) *A gleichzeitig mit E beweglich über K,*

b) *A gleichzeitig mit E normal über K.*

Wegen Satz 17 ist nämlich die Bedingung 2. des Satzes 11 und der Folgerung 5 des Satzes 13 stets erfüllt, wenn A über W von erster Art ist.

Satz 18. *Ist A eine beliebige algebraische Erweiterung von K, so läßt sich dann und nur dann jeder Automorphismus von E bzgl. K zu einem Automorphismus von A [bzgl. K] erweitern, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

(W) *Sei S der starre Körper zwischen E und K. Weiter seien a, b zwei Elemente aus E, die derselben in S irreduziblen Gleichung genügen.*

Gibt es dann in A ein Element a_f $[f \geqq 0]$, so daß $a_f^{p^f} = a$ ist [p bedeutet, wie stets, die Charakteristik von A], so gibt es in A auch ein Element b_f, so daß $b_f^{p^f} = b$ ist.

Beweis. A. Es lasse sich jeder Automorphismus von E bzgl. K zu einem von A bzgl. K erweitern. Weiter seien a, b irgend zwei Elemente aus E, die derselben in S irreduziblen Gleichung $\alpha(x) = 0$ genügen. Dann gibt es, da E über S ordentlich, also nach Satz 1 normal ist, wegen II. des § 1 einen Automorphismus $\mathfrak{e}$ von E bzgl. S, also auch bzgl. K, der a in b überführt: $\mathfrak{e}(a) = b$.

Nach Voraussetzung gibt es dann einen $\mathfrak{e}$ umfassenden Automorphismus $\mathfrak{a}$ von A. Insbesondere ist also $\mathfrak{a}(a) = b$.

Gibt es in A ein Element a_f mit $a_f^{p^f} = a$, so ist $[\mathfrak{a}(a_f)]^{p^f} = \mathfrak{a}(a) = b$. Also ist $\mathfrak{a}(a_f)$ ein gesuchtes Element b_f aus A.

B. Sei die Bedingung (W) erfüllt. Ist dann $\mathfrak{e}$ irgendein Automorphismus von E bzgl. K, so läßt er sich wegen I. des § 1 zu einem Automus $\mathfrak{n}$ von N bzgl. K erweitern. Da S der starre Körper zwischen E und K ist, so sind $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{n}$ auch Automorphismen bzgl. S.

Sei jetzt a ein beliebiges Element aus A. Da A über E Wurzelkörper ist, so gibt es eine Zahl $f \geqq 0$, so daß $a^* = a^{p^f}$ in E enthalten ist. Dann ist auch $\mathfrak{n}(a^*) = \mathfrak{e}(a^*) = [\mathfrak{n}(a)]^{p^f}$ in E enthalten. Notwendig genügen dann a^* und $\mathfrak{n}(a^*)$ derselben in S irreduziblen Gleichung. Also gibt es nach Bedingung (W) ein Element b in A, so daß $b^{p^f} = \mathfrak{n}(a^*)$ ist. Da es aber in N höchstens eine Lösung der Gleichung $x^{p^f} - \mathfrak{n}(a^*) = 0$ geben kann, so ist $b = \mathfrak{n}(a)$, d. h. mit beliebigem a gehört auch $\mathfrak{n}(a)$ zu A. $\mathfrak{n}$ bewirkt also einen Automorphismus $\mathfrak{a}$ von A, der notwendig $\mathfrak{e}$ umfaßt.

Zusatz 1. *Falls E über K beweglich ist, läßt sich in Satz 18 die Bedingung (W) durch die folgende ersetzen:*

(W_b) *Sind a und b zwei Elemente aus E, die derselben in K irreduziblen Gleichung genügen, und gibt es in A ein Element a_f mit $f \geqq 0$, so daß $a_f^{p^f} = a$ ist, dann gibt es in A auch ein Element b_f, so daß $b_f^{p^f} = b$ ist.*

Beweis. Da A Wurzelkörper über E ist, so gibt es, wenn a und b aus A derselben in K irreduziblen Gleichung genügen, ein $g \geqq 0$, so daß $\bar{a} = a^{p^g}$ und $\bar{b} = b^{p^g}$ Elemente aus E sind und ebenfalls derselben irreduziblen Gleichung aus K genügen. — Da E beweglich über K ist, so folgt aus Satz 6, daß $\bar{a}$ und $\bar{b}$ dann und nur dann derselben irreduziblen Gleichung aus K genügen, wenn sie derselben irreduziblen Gleichung aus S genügen, d. h. (W_b) folgt aus (W). — Ist jetzt a_f so beschaffen, daß $a_f^{p^f} = a$ ist, so ist $a_f^{p^{f+g}} = \bar{a}$; also gibt es wegen (W_b) ein b_f, so daß $b_f^{p^{f+g}} = \bar{b}$, also $b_f^{p^f} = b$ ist, da ja $(b_f^{p^f})^{p^g} = b^{p^g} = \bar{b}$ ist, und es nur eine p^g-te Wurzel gibt, d. h. (W) folgt aus (W_b).[44])

Zusatz 2. *In Satz* 11 *und Folgerung* 5 *des Satzes* 13 *läßt sich die Bedingung* 2. *durch die Bedingung* (W) *ersetzen.*

Satz 19. *Dann und nur dann läßt sich jeder Automorphismus von E bzgl. K zu einem Automorphismus von A erweitern, wenn der starre Körper $S(E)$ zwischen E und K genau der* [*mengentheoretische*] *Durchschnitt von E mit dem starren Körper S zwischen A und K ist:*

$$S(E) = E \cap S.$$

Beweis. A. Es lasse sich jeder Automorphismus von E bzgl. K zu einem Automorphismus von A erweitern. Dann bleibt jedes Element aus E, das bei allen Automorphismen von A bzgl. K in Ruhe bleibt, d. h. zu S gehört, auch bei allen Automorphismen von E bzgl. K in Ruhe, d. h.

$$S \cap E \leqq S(E).$$

Jeder Automorphismus von E bzgl. K ist auch ein Automorphismus bzgl. $S(E)$. Da aber jeder Automorphismus von A bzgl. K auch einen von E bewirkt [E besteht ja aus allen Elementen erster Art bzgl. K], so ist jeder Automorphismus von A bzgl. K auch einer bzgl. $S(E)$. Daraus folgt aber $S \geqq S(E)$, also wegen $E \geqq S(E)$ auch

$$S \cap E \geqq S(E).$$

Die beiden Ungleichungen zusammengefaßt ergeben

$$S \cap E = S(E).$$

B. Sei $S \cap E = S(E)$.

Da A Wurzelkörper bzgl. E ist, so ist S Wurzelkörper bzgl. $S \cap E$. Ist nämlich a ein Element aus S, so auch a^{p^f}.

Sei jetzt $\mathfrak{e}$ irgendein Automorphismus von E bzgl. K. Wir wollen ihn zunächst zu einem Automorphismus des Vereinigungskörpers $S \vee E$ erweitern.

---

[44]) Hierbei ist (W) sogar in der schärferen Form bewiesen, daß die Elemente a und b aus A [nicht nur aus E] stammen können.

Sei M ein kleinster, $S \vee E$ umfassender, über K normaler Körper. Dann gibt es wegen I. des § 1 einen e umfassenden Automorphismus $\mathfrak{m}$ von M. Da S Wurzelkörper über $S \cap E = S(E)$ ist, so läßt $\mathfrak{m}$ jedes Element von S in Ruhe. Weiter führt $\mathfrak{m}$ den Körper E in sich über, denn $\mathfrak{m}$ umfaßt e. Also führt auch $\mathfrak{m}$ den Körper $S \vee E$ in sich über, induziert also in ihm einen e umfassenden Automorphismus $\mathfrak{a}$.

Damit ist aber unser Satz vollständig bewiesen, wenn wir nur

$$S \vee E = A$$

bewiesen haben. *Diese Formel gilt aber ganz allgemein für beliebige Erweiterungen A von K.*

Denn stets ist $A \geqq S \vee E$. Weiter ist A ordentlich über S, also auch über $S \vee E$, insbesondere ist also A erster Art über $S \vee E$. Andererseits ist A Wurzelkörper über E. Ist also a ein beliebiges Element aus A, so genügt es in E einer irreduziblen Gleichung mit der einzigen Nullstelle a, die also in $S \vee E$ sich auf eine lineare Gleichung reduzieren muß, d. h. aber $S \vee E \geqq A$.

Brione sul Minusio, im April 1930.

(Eingegangen am 5. Juni 1930.)

Anhang.

I.

Satz 20. *Sei A eine beliebige algebraische Erweiterung des Körpers K; dann gibt es einen und nur einen Körper T zwischen A und K, so daß*

1. *A über T normal ist, und*

2. *A über keinem echten Teilkörper von T normal ist.*

T besteht aus allen und nur den Elementen aus A, die

a) *von erster Art über K sind und*

b) *bei allen Automorphismen von A bzgl. K in Ruhe bleiben.*

Beweis. Die Gesamtheit T mit den Eigenschaften a) und b) ist ein Körper. Sei nämlich S der starre Körper zwischen A und K. Dann folgt aus einem Satz von Steinitz[45]), daß es einen eindeutig bestimmten Körper S_0 zwischen S und K gibt, so daß S_0 von erster Art über K, S Wurzelkörper über S_0 und sogar $S_0 = T$ wegen a) und b) ist.

---

[45]) Vgl. Steinitz, § 14, 1.

A. Wir wollen jetzt zeigen, daß der Körper T mit den Eigenschaften a) und b) auch die Eigenschaften 1. und 2. hat.

Da $A \geqq S \geqq T \geqq K$ ist, so ist S sogar der starre Körper zwischen A und T. Da S Wurzelkörper über T ist, so ist A nach Satz 13 des § 5 normal über T.

Sei weiter $T > T_1 \geqq K$. Dann ist wieder S der starre Körper zwischen A und T_1. Andererseits ist S nicht Wurzelkörper über T_1; denn T ist eine echte Erweiterung erster Art von T_1 und S Wurzelkörper über T. Also folgt wieder aus Satz 13 des § 5, daß A nicht normal über T_1 sein kann.

B. Habe T_1 die Eigenschaften 1. und 2. Wir wollen zeigen, daß T_1 gleich dem durch die Eigenschaften a) und b) charakterisierten Körper T ist.

T_1 muß von erster Art über K sein. Im anderen Falle gäbe es nämlich nach dem erwähnten Satze von Steinitz einen Körper T_2 mit $T_1 > T_2 \geqq K$, so daß T_1 Wurzelkörper über T_2, T_2 von erster Art über K wäre. Wegen 1. ist A normal über T_1. Also ist der starre Körper S_1 zwischen A und T_1 nach Satz 13 des § 5 Wurzelkörper über T_1. Da T_1 Wurzelkörper über T_2 ist, so ist S_1 auch Wurzelkörper über T_2 und natürlich auch starrer Körper zwischen A und T_2. Also wäre A wieder nach Satz 13 des § 5 normal über $T_2 < T_1$ im Widerspruch zu 2.

Wegen 1. ist der starre Körper S_1 zwischen A und T_1 Wurzelkörper über T_1. Sicher ist $S_1 \geqq S$. Da nun T_1 [bzw. T] die Gesamtheit der Elemente erster Art bzgl. K aus S_1 [bzw. aus S] enthält, so folgt $T_1 \geqq T$, also wegen 2. sogar $T_1 = T$.

II.

Beispiel einer Erweiterung erster Art mit äquivalenten, nicht konjugierten Unterkörpern.

Sei P ein beliebiger Körper der Charakteristik $p \geqq 0$ und $K = P(t_1, \ldots, t_n)$ eine rein transzendente Erweiterung von P vom Transzendenzgrad $n > 2$. Weiter sei $\alpha(x) = x^n + t_1 x^{n-1} + \ldots + t_n$. Dann ist $\alpha(x)$ in K irreduzibel. B sei eine Erweiterung von K, die zur vollständigen Zerfällung von $\alpha(x)$ gerade ausreicht. Dann ist $[B:K] = n!$ und $B = K(s_1, \ldots, s_n)$, wo die s_i die Nullstellen von $\alpha(x)$ sind. B ist normal über K und s_i in s_k durch einen Automorphismus von B bzgl. K überführbar. Schließlich ist $K(s_i)$ ein Körper ohne Affekt über K und $K(s_i) \cap K(s_k) = K$ für $i \neq k$.

Sei $\beta(x) = x^3 - s_1$ [falls $p = 3$ ist, wählen wir $\beta(x) = x^5 - s_1$]. Dann sei A eine kleinste algebraische Erweiterung von B, die eine Nullstelle von $\beta(x)$ enthält. A enthält dann auch nur eine solche Nullstelle.

Sei dies a; dann ist $A = B(a)$. Da A von erster Art über B, B von erster Art über K ist, so ist A auch von erster Art über K.[46])

$K(s_1)$ und $K(s_i)$ sind äquivalente Erweiterungen von K. Dagegen sind sie nicht konjugierte Unterkörper von A bzgl. K, da es keinen Automorphismus von A bzgl. K geben kann, der s_1 in $s_i \neq s_1$ überführt. Denn aus s_1 kann in A die dritte [falls $p = 3$ ist, die fünfte] Wurzel ausgezogen werden, aus $s_i \neq s_1$ aber nicht.

A ist offenbar auch ein Beispiel einer nicht beweglichen, algebraischen Erweiterung erster Art von K.

---

[46]) Vgl. Steinitz, § 13, 9.

(Eingegangen am 16. Oktober 1930.)

Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die Clairautsche Differentialgleichung“ [1]).

Von

E. Kamke in Tübingen.

Auf S. 623 der oben genannten Arbeit hatte ich über die Clairautsche Differentialgleichung

$$y = xy' + f(y')$$

geschrieben: Die „Frage nach der Existenz nichtlinearer Integrale wird in der mir zugänglich gewesenen Lehrbuchliteratur mit einer Ausnahme [2]) unbedenklich bejaht“. Herr A. Hoborski macht mich jetzt in dankenswerter Weise darauf aufmerksam, daß sich in seinem (polnisch geschriebenen) Buch Wyższa Matematyka (Höhere Mathematik) 2, Krakau 1923, S. 730–732 bereits eine Behandlung dieser Frage findet. Ich bedaure, daß mir die ausführliche und korrekte Darstellung von Herrn Hoborski [3]) entgangen war. Der Inhalt meiner Arbeit wird allerdings durch Herrn Hoborskis Darstellung nicht berührt, da Herr Hoborski durchweg die schärfere Voraussetzung macht, daß die Funktion $f(u)$ eine stetige und von Null verchiedene Ableitung zweiter Ordnung besitzt, und sich außerdem auf Integrale beschränkt, die eine stetige Ableitung zweiter Ordnung haben.

Tübingen, 22. November 1930.

---

[1]) Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 623–639.

[2]) Hier war genannt: L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 2. Aufl., Berlin 1926, S. 20.

[3]) Überhaupt zeichnet sich das Kapitel XVII über Differentialgleichungen, auf das sich meine Lektüre allein erstreckt hat, durch klare und korrekte Darstellung aus.

(Eingegangen am 25. November 1930.)

Über die Entwicklung einer beliebigen Funktion nach Laguerreschen Polynomen.

Von

N. Nasarow in Taschkent.

Es sei

$$L_0(x),\ L_1(x),\ L_2(x),\ \ldots$$

das normierte Orthogonalsystem der Tschébyscheffschen Polynome bezüglich der Funktion

$$p(x) = x^\alpha e^{-x} \qquad (\alpha > -1)$$

und für das Intervall $(0, \infty)$.

Ferner sei $f(x)$ eine stetige Funktion mit integrierbarer Ableitung und derart, daß alle Integrale (Momente)

$$m_k = \int_0^\infty p(x)\, f(x)\, x^k\, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

existieren.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, für ein Intervall (c, d), welches ganz innerhalb des Intervalles $(0, \infty)$ enthalten ist, die Entwicklung dieser Funktion in eine Reihe nach den Polynomen $L_k(x)$ herzustellen.

Wir bemerken, daß das System der Polynome $L_k(x)$ vollständig ist, d. h. daß für eine beliebige integrierbare Funktion $F(x)$ die Beziehung

$$S_n(F(x)) = \int_0^\infty p(x)\, F^2(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n} \left[\int_0^\infty p(x)\, F(x)\, L_k(x)\, dx\right]^2 < \varepsilon \tag{2}$$

für $n \geqq n_0$ gilt, was aus der Konvergenz des Kettenbruchs folgt, in welchen das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha e^{-x}}{z - x}\, dx$$

sich entwickeln läßt.

Wir setzen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, L_k(x) + \varrho_{n+1}(x), \tag{3}$$

wo

$$A_k = \int_0^\infty p(x) f(x) L_k(x) dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Die Integrale A_k existieren, weil die Integrale m_k existieren.

Indem wir die Gleichung (3) differenzieren, finden wir

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k L_k'(x) + \varrho_{n+1}'(x), \tag{4}$$

denn nach Voraussetzung existiert $f'(x)$.

Weiter gilt die Identität

$$\frac{d}{dx}[p(x) x \varrho_{n+1}^2(x)] = p'(x) x \varrho_{n+1}^2(x) + p(x) \varrho_{n+1}^2(x) + 2 p(x) x \varrho_{n+1}(x) \varrho_{n+1}'(x).$$

Wenn wir diese Identität nach x von 0 bis x integrieren, so finden wir

$$p(x) x \varrho_{n+1}^2(x) = \int_0^x p'(x) x \varrho_{n+1}^2(x) dx + \int_0^x p(x) \varrho_{n+1}^2(x) dx + 2 \int_0^x p(x) x \varrho_{n+1}(x) \varrho_{n+1}'(x) dx. \tag{5}$$

Wir betrachten die einzelnen Integrale, welche auf der rechten Seite der Gleichheit (5) auftreten.

Aus

$$p'(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x} - x^\alpha e^{-x}$$

folgt

$$p'(x) x = (\alpha - x) p(x).$$

Folglich ist

$$\left| \int_0^x p'(x) x \varrho_{n+1}^2(x) dx \right| \leqq \int_0^x p(x) |\alpha - x| \varrho_{n+1}^2(x) dx \tag{6}$$

$$\leqq \int_0^d p(x) |\alpha - x| \varrho_{n+1}^2(x) dx < M \int_0^d p(x) \varrho_{n+1}^2(x) dx < M S_n(f(x)),$$

wo $M = \max |\alpha - x|$ im Intervall (c, d) ist.

Ferner ist

$$\int_0^x p(x) \varrho_{n+1}^2(x) dx < S_n(f(x)); \tag{7}$$

endlich erhalten wir nach der Bunikowsky-Schwarz-Ungleichung

$$\int_0^x p(x) x \varrho_{n+1}(x) \varrho_{n+1}'(x) dx \leqq \left[\int_0^x p(x) x \varrho_{n+1}^2(x) dx \right]^{1/2} \left[\int_0^x p(x) x \varrho_{n+1}'^2(x) dx \right. \tag{8}$$

Die Integrale auf der rechten Seite der letzten Ungleichheit befriedigen ihrerseits folgende Relationen:

$$\int_0^x p(x) x \varrho_{n+1}^2(x) dx \leqq \int_0^d p(x) x \varrho_{n+1}^2(x) dx < d \int_0^d p(x) \varrho_{n+1}^2(x) dx < d S_n(f(\tag{9}$$

und

$$\int_0^x p(x)\, x\, \varrho_{n+1}'^2(x)\, dx < \int_0^\infty p(x)\, x\, \varrho_{n+1}'^2(x)\, dx.$$

Wir beweisen weiter, daß das Integral

$$\int_0^\infty p(x)\, x\, \varrho_{n+1}'^2(x)\, dx$$

endlich und kleiner als eine gewisse endliche Zahl ist, die unabhängig von n ist.

Multiplizieren wir die Gleichung (4) mit

$$p(x)\, x\, \varrho_{n+1}'(x)\, dx$$

und integrieren, so finden wir

$$\int_0^\infty p(x)\, x\, \varrho_{n+1}'^2(x)\, dx = \int_0^\infty p(x)\, x\, f'(x)\, \varrho_{n+1}'(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n} A_k \int_0^\infty p(x)\, x\, L_k'(x)\, \varrho_{n+1}'(x)\, dx.$$

Das Integral

$$\int_0^\infty p(x)\, x\, L_k'(x)\, \varrho_{n+1}'(x)\, dx$$

ergibt nach einer partiellen Integration, wenn wir

$$x\, p(x)\, L_k'(x) = u \quad \text{und} \quad \varrho_{n+1}'(x)\, dx = dv$$

annehmen,

$$p(x)\, x\, L_k'(x)\, \varrho_{n+1}'(x)\, dx = -\int_0^\infty [p(x)\, L_k'(x) + x\, p'(x)\, L_k'(x) + x\, p(x)\, L_k''(x)]\, \varrho_{n+1}(x)\, dx.$$

Bekanntlich ist für ein beliebiges Polynom $P_n(x)$ vom n-ten Grade

$$\int_0^\infty p(x)\, P_n(x)\, \varrho_{n+1}(x)\, dx = 0.$$

folglich

$$\int_0^\infty p(x)\, x\, L_k'(x)\, \varrho_{n+1}'(x)\, dx = -\int_0^\infty p'(x)\, x\, L_k'(x)\, \varrho_{n+1}(x)\, dx,$$

weil $L_k'(x)$ und $x\, L_k''(x)$ Polynome von geringerem Grade als n sind.

Deshalb ist

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \int_0^\infty p(x)\, x\, L_k'(x)\, \varrho_{n+1}'(x)\, dx = -\sum_{k=0}^{n} A_k \int_0^\infty p'(x)\, x\, L_k'(x)\, \varrho_{n+1}(x)\, dx.$$

Wenn wir die Gleichung (4) mit

$$p'(x)\, x\, \varrho_{n+1}(x)\, dx$$

multiplizieren und integrieren, so finden wir

$$A_k \int_0^\infty p'(x)\, x\, L_k'(x)\, \varrho_{n+1}(x)\, dx = \int_0^\infty p'(x)\, x\, f'(x)\, \varrho_{n+1}(x)\, dx - \int_0^\infty p'(x)\, x\, \varrho_{n+1}'(x)\, \varrho_{n+1}(x)\, dx.$$

Folglich erhalten wir

$$\int_0^\infty p(x)\,x\,\varrho_{n+1}'^2(x)\,dx = \int_0^\infty p(x)\,x f'(x)\,\varrho_{n+1}'(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} A_k \int_0^\infty p(x)\,x L_k'(x)\,\varrho_{n+1}'(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty p(x)\,x f'(x)\,\varrho_{n+1}'(x)\,dx + \sum_{k=0}^{n} A_k \int_0^\infty p'(x)\,x L_k'(x)\,\varrho_{n+1}(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty p(x)\,x f'(x)\,\varrho_{n+1}'(x)\,dx + \int_0^\infty p'(x)\,x f'(x)\,\varrho_{n+1}(x)\,dx - \int_0^\infty p'(x)\,x\,\varrho_{n+1}'(x)\,\varrho_{n+1}(x)\,dx$$

Ferner finden wir

$$\left|\int_0^\infty p(x)\,x f'(x)\,\varrho_{n+1}'(x)\,dx\right| \leqq \left[\int_0^\infty p(x)\,x f'^2(x)\,dx\right]^{1/2}\left[\int_0^\infty p(x)\,x\,\varrho_{n+1}'^2(x)\,dx\right]^{1/2}$$

$$= A\left[\int_0^\infty p(x)\,x\,\varrho_{n+1}'^2(x)\,dx\right]^{1/2},$$

wo

$$A^2 = \int_0^\infty p(x)\,x f'^2(x)\,dx$$

ist und

$$\left|\int_0^\infty p'(x)\,x f'(x)\,\varrho_{n+1}(x)\,dx\right| = \left|\int_0^\infty \frac{p'(x)\,x}{\sqrt{p(x)}} f'(x)\cdot\sqrt{p(x)}\,\varrho_{n+1}(x)\,dx\right|$$

$$\leqq \left[\int_0^\infty \frac{p'^2(x)\,x^2}{p(x)} f'^2(x)\,dx\right]^{1/2}\left[\int_0^\infty p(x)\,\varrho_{n+1}^2(x)\,dx\right]^{1/2} = B\sqrt{S_n(f(x))},$$

wo

$$B^2 = \int_0^\infty \frac{p'^2(x)\,x^2}{p(x)} f'^2(x)\,dx = \int_0^\infty p(x)\,(\alpha - x)^2 f'^2(x)\,dx;$$

es ist vorausgesetzt, daß die Integrale A^2 und B^2 existieren.

Endlich bekommen wir

$$\int_0^\infty p'(x)\,x\,\varrho_{n+1}'(x)\,\varrho_{n+1}(x)\,dx = \alpha\int_0^\infty p(x)\,\varrho_{n+1}(x)\,\varrho_{n+1}'(x)\,dx - \int_0^\infty p(x)\,x\,\varrho_{n+1}(x)\,\varrho_{n+1}'(x)$$

Untersuchen wir jetzt das Integral

$$J = \int_0^\infty p(x)\,\varphi(x)\,\varrho_{n+1}'(x)\,\varrho_{n+1}(x)\,dx,$$

wo $\varphi(x)$ ein Polynom von nicht höherem als erstem Grade ist. Wir können schreiben

$$J = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^\infty p(x)\,L_k(x)\,\varrho_{n+1}(x)\,dx\int_0^\infty p(x)\,L_k(x)\,\varphi(x)\,\varrho_{n+1}'(x)\,dx.$$

Weil

$$\int_0^\infty p(x)\,L_k(x)\,\varrho_{n+1}(x)\,dx$$

gleich Null ist, wenn $k \leqq n$, und gleich A_k, wenn $k > n$, so folgt

$$J = \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i \int_0^{\infty} p(x)\, L_i(x)\, \varphi(x)\, \varrho'_{n+1}(x)\, dx.$$

Multiplizieren wir die Gleichung (4) mit

$$p(x)\, L_i(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

so erhalten wir nach Integration

$$\int_0^{\infty} p(x)\, L_i(x)\, \varphi(x)\, \varrho'_{n+1}(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} p(x)\, L_i(x)\, \varphi(x)\, f'(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n} A_k \int_0^{\infty} p(x)\, L_i(x)\, \varphi(x)\, L'_k(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} p(x)\, L_i(x)\, \varphi(x)\, f'(x)\, dx,$$

weil der Grad des Polynoms $\varphi(x)\, L'_k(x)$ nicht höher als n ist und $i > n$ gilt.

Daher ist

$$J = \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i B_i$$

mit

$$B_i = \int_0^{\infty} p(x)\, L_i(x)\, \varphi(x)\, f'(x)\, dx.$$

Daraus ergibt sich

$$|J| \leqq \Big[\sum_{i=n+1}^{\infty} A_i^2\Big]^{1/2} \Big[\sum_{i=n+1}^{\infty} B_i^2\Big]^{1/2} < \Big[\int_0^{\infty} p(x)\, \varphi^2(x)\, f'^2(x)\, dx\Big]^{1/2} \sqrt{S_n(f(x))}.$$

So erhalten wir

$$x)\, x\, \varrho_{n+1}(x)\, \varrho'_{n+1}(x)\, dx\Big| < \Big[\alpha\Big(\int_0^{\infty} p(x) f'^2(x)\, dx\Big)^{1/2} + \Big(\int_0^{\infty} p(x) x^2 f'^2(x)\, dx\Big)^{1/2}\Big] \sqrt{S_n(f(x)}$$

$$= C \sqrt{S_n(f(x))}.$$

Summieren wir alles oben Angeführte, so bekommen wir, wenn wir

$$\int_0^{\infty} p(x)\, x\, \varrho'^2_{n+1}(x)\, dx$$

mit R_n bezeichnen,

$$R_n < A \sqrt{R_n} + B \sqrt{S_n(f(x))} + C \sqrt{S_n(f(x))}.$$

Wenn wir diese Ungleichheit lösen, finden wir

$$\sqrt{R_n} < \frac{A + \sqrt{A^2 + 4(B+C)\sqrt{S_n(f(x))}}}{2},$$

und diese Ungleichheit zeigt, daß

$$R_n < N^2 \tag{10}$$

für beliebiges n ist, weil $S_n(f(x))$ begrenzt ist.

Jetzt erinnern wir uns der Gleichung (5); wenn wir die Gleichungen (6), (7), (8), (9) und (10) beachten, bekommen wir

$$p(x)\, x\, \varrho^2_{n+1}(x) < M S_n(f(x)) + S_n(f(x)) + N \sqrt{d} \sqrt{S_n(f(x))} = R \sqrt{S_n(f(x))},$$

wo R eine endliche, von n unabhängige Zahl ist. Bezeichnen wir mit K das Minimum der Funktion $p(x)x$ im Intervall (c, d), so erhalten wir

$$\varrho_{n+1}^2(x) < \frac{R}{K}\sqrt{S_n(f(x))}$$

für alle Punkte des Intervalls (c, d).

Aber das System (2) ist vollständig, weshalb

$$S_n(f(x)) < \frac{K^2}{R^2}\varepsilon^4 \quad \text{für} \quad n \geqq n_0;$$

daher ist

$$|\varrho_{n+1}(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq n_0,$$

das heißt

Satz. *Eine beliebige stetige Funktion mit integrierbarer Ableitung und eine solche, daß alle Momente*

$$m_k = \int_0^\infty p(x) f(x) x^k dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die Integrale

$$\int_0^\infty p(x) x f'^2(x) dx, \quad \int_0^\infty p(x) f'^2(x) dx$$

existieren, kann man im beliebigen endlichen Intervall, welches ganz im Intervall $(0, \infty)$ liegt, in eine gleichmäßig konvergierende Reihe nach Laguerreschen Polynomen entwickeln.

Im speziellen Falle, daß

$$p(x) = e^{-x}$$

ist, kann folgender Satz bewiesen werden:

Satz. *Wenn*

$$p(x) = e^{-x}$$

und die Funktion $f(x)$ stetig ist und eine integrierbare Ableitung hat derart, daß alle Momente und das Integral

$$\int_0^\infty p(x) f'^2(x) dx$$

existieren, so muß

$$f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k L_k(0)$$

sein.

In der Tat folgt nach einer partiellen Integration, wenn wir

$$p(x) dx = dv, \quad v = -p(x) \quad \text{und} \quad u = \varrho_{n+1}^2(x)$$

nehmen,

$$\int_0^\infty p(x) \varrho_{n+1}^2(x) dx = -[p(x) \varrho_{n+1}^2(x)]_0^\infty + 2\int_0^\infty p(x) \varrho_{n+1}(x) \varrho'_{n+1}(x) dx.$$

Hieraus finden wir

$$p(0)\varrho_{n+1}^2(0) = 2\int_0^\infty p(x)\varrho'_{n+1}(x)\varrho_{n+1}(x)\,dx - \int_0^\infty p(x)\varrho_{n+1}^2(x)\,dx$$

und endlich

$$p(0)\varrho_{n+1}^2(0) \leqq 2D\sqrt{S_n(f(x))} + S_n(f(x)),$$

wo

$$D^2 = \int_0^\infty p(x)f'^2(x)\,dx$$

ist.

Wenn aber $n \geqq n_0$ ist, so ist

$$S_n(f(x)) < \varepsilon^2,$$

woraus

$$p(0) = 1$$

folgt, das heißt

$$\varrho_{n+1}^2(0) \leqq 2D\varepsilon + \varepsilon^2 = \eta^2.$$

Daher ist

$$|\varrho_{n+1}(0)| < \eta \quad \text{für} \quad n \geqq n_0,$$

was zu beweisen war.

Dieses Resultat ist die Verallgemeinerung des Resultats, das W. Stekloff in der Arbeit: Sur le développement des fonctions arbitraires en séries de polynomes de Tchébycheff-Laguerre (Известия Академии Наук, 1916г, стр. 719)[1]) veröffentlicht hat.

Die Methode, welche ich hier angewandt habe, ist der in der Note: Sur une application de la théorie de fermeture au problème du développement des fonctions arbitraires en séries procedant suivant les polynomes de Tchébycheff (Записки Академии Наук, VIII серия, Отдел Физико-Математический Том XXXIII, n° 8, 1914г) angezeigten Methode W. Stekloffs analog.

Alle vorhergehenden Auflösungen werden auch richtig sein für die Funktionen, welche sich in der Gestalt

$$f(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx + C$$

darstellen, wo $\varphi(x)$ eine integrierbare Funktion ist, welche im Speziellen mit $f'(x)$ zusammenfallen kann.

Taschkent, 12. Februar 1930.

---

[1]) W. Stekloff beweist: Wenn $m-1 < \alpha < m$ ist, so kann eine beliebige Funktion mit $m+1$ Ableitung nach Laguerreschen Polynomen entwickelt werden.

(Eingegangen am 25. Februar 1930.)

Über die Grundlösung bei parabolischen Gleichungen.

Von

Erich Rothe in Breslau.

Für die Gleichung

$$\Delta z - \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \left(\Delta z \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial y_i^2}\right) \tag{1}$$

ist, wie bekannt, die Funktion

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^n}} e^{-\frac{r^2}{4(x-\xi)}} \qquad \left(r^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \eta_i)^2;\ x \geqq \xi\right) \tag{2}$$

eine Grundlösung. Unter Anwendung sukzessiver Approximationen bewies Gevrey die Existenz einer Grundlösung auch für die allgemeinere Gleichung

$$\Delta z - \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial z}{\partial y_\nu} + c z = 0, \tag{3}$$

indem er die Funktion (2) als erste Approximation benutzte[1]). Auf die Form (3) läßt sich, wenn $n \leqq 2$ ist, durch eine Transformation der Variablen diejenige Gleichung zurückführen, die aus (3) entsteht, wenn man an Stelle von Δ einen allgemeinen linearen elliptischen Differentialausdruck setzt und bei $\frac{\partial z}{\partial x}$ noch einen Koeffizienten zuläßt[2]). Für $n \geqq 3$ ist das jedoch nicht mehr der Fall, da man dann einen elliptischen Ausdruck im allgemeinen nicht auf die Normalform transformieren kann.

In der vorliegenden Arbeit soll nun eine Grundlösung für die Gleichung

$$L(z) - R\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ [3]} \qquad \left[L(z) \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik} \frac{\partial z}{\partial x_k}\right)\right] \tag{4}$$

---

[1]) Gevrey, Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique, Journal d. Math., 6. sér., 9 (1913) und 10 (1914), § 75 f. Im Fall $n = 1$ hatte schon Hadamard (C. R. 1911) ebenfalls unter Anwendung sukzessiver Approximationen eine Grundlösung aufgestellt.

[2]) Gevrey, loc. cit. § 41.

[3]) Gl. (1) tritt bekanntlich bei der Behandlung der Wärmeleitung in homogenen isotropen Körpern auf; Gl. (4) entspricht der Wärmeleitung in anisotropen und inhomogenen Körpern.

unter den folgenden Voraussetzungen aufgestellt werden: In einem einfach zusammenhängenden ganz im Endlichen gelegenen Bereiche $\overline{\overline{T}}$ [4]) des $(y_1, y_2, y_3) = (y)$-Raumes [5]) seien die Koeffizienten a_{ik} und R zweimal stetig differenzierbare Funktionen von y_1, y_2, y_3 allein; es sei dort $a_{ik} = a_{ki}$ und die Form $\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k$ positiv definit. Ferner sei

$$R \geqq m > 0. \tag{5}$$

Ist dann $\overline{T}$ ein ganz im Innern von $\overline{\overline{T}}$ gelegener Bereich, so wollen wir eine Grundlösung in $\overline{T}$ konstruieren. Genauer gesprochen: es soll eine Funktion $\Gamma(y, \eta, x - \xi)$ mit den folgenden Eigenschaften, die wir als Definition einer Grundlösung in $\overline{T}$ ansehen wollen, angegeben werden.

A. Für $x > \xi$ und jedes im Innern von $\overline{T}$ gelegene Punktepaar y, η ist Γ als Funktion von x, y eine reguläre Lösung von (4), als Funktion von ξ, η eine reguläre Lösung der adjungierten Gleichung

$$L(z) + R\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0. \tag{4*}$$

B. Ist T ein (echter oder unechter) Teilbereich von $\overline{T}$, $\overline{S}$ der Rand von $\overline{T}$ und $\varphi(y)$ eine in $\overline{T} + \overline{S}$ stetige Funktion, so gilt für jeden Punkt $y^{(0)}$ aus $\overline{T}$

$$\lim_{x \to 0} \int_T R(\eta)\varphi(\eta)\Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\,d\eta = \begin{cases} \varphi(y^{(0)}), \text{ wenn } y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } T, \\ 0, \text{ wenn } y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } \overline{T} - T. \end{cases} \tag{6}$$

Wir werden eine Grundlösung folgendermaßen konstruieren: Sind λ_k die Eigenwerte, $u_k(y)$ die normierten Eigenfunktionen des Problems

$$L(u_k) + \lambda_k R u_k = 0 \quad \text{in } \overline{T}, \tag{7a}$$

$$u_k = 0 \quad \text{auf } \overline{S}, \tag{7b}$$

so wird sich die Funktion

$$\Gamma(y, \eta, x - \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\,u_k(\eta)\,e^{-\lambda_k(x-\xi)} \text{ [6])} \qquad (x > \xi) \tag{8}$$

---

[4]) Von $\overline{\overline{T}}$ sowie von allen im folgenden auftretenden Bereichen setzen wir voraus, daß der Rand stetig und stückweise zweimal stetig differenzierbar ist.

[5]) Hier, wie im folgenden, ist der Kürze halber y an Stelle von (y_1, y_2, y_3) geschrieben.

[6]) Als Grundlösung von (1) wird im Falle $n = 1$ gewöhnlich

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-\frac{y^2}{4x}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\alpha y\, e^{-\alpha^2 x}\,d\alpha \tag{*}$$

benutzt. Spezialisiert man anderseits die Reihe (8) auf den Fall $n = 1$ mit dem Intervall $(-l, +l)$ als Bereich $\overline{T}$, so erhält man auf Grund einfacher Rechnung

$$\Gamma(y, 0, x) = \sum_{\substack{k=1,\\ 3,5\ldots}}^{\infty} \frac{1}{l}\cos\frac{k\pi y}{2l}\,e^{-k^2\pi^2 x/4l^2} = \frac{1}{\pi}\sum \cos\alpha y\, e^{-\alpha^2 x}\,\Delta\alpha$$

$$(\alpha = k\pi/2l;\ \Delta\alpha = \pi/l;\ k = 1, 3, 5\ldots).$$

Die Funktionen (8) und (*) stehen also zueinander in einem ähnlichen Verhältnis wie eine Fouriersche Reihe zu einem Fourierschen Integral. (Anm. bei der Korrektur.)

als Grundlösung erweisen. Eine andere (zum Nachweise der Eigenschaft B geeignetere) Form der Grundlösung (8) wird in § 2 angegeben.

Die Definition einer Grundlösung durch die Eigenschaften A und B wird durch die Tatsache gerechtfertigt, daß sich aus ihnen ohne Mühe eine Formel ergibt, die der sogenannten Fundamentalformel[7]) in der Theorie der Gleichung (1) entspricht (§ 4): Ist T ein einfach zusammenhängender ganz im Innern von $\bar{T}$ liegender Bereich des y-Raumes, ist S der Rand von T, ist ferner $\mathfrak{C}_{x^{(0)}}$ der durch

$$0 \leqq x \leqq x^{(0)}, \quad y \prec T \tag{9}$$

gegebene Bereich des vierdimensionalen $(x\,y)$-Raumes, $M_{x^{(0)}}$ sein durch

$$0 \leqq x \leqq x^{(0)}, \quad y \prec S \tag{10}$$

gegebener als stetig differenzierbar vorausgesetzter „Mantel", so gilt für jede nebst den auftretenden Ableitungen stetige Lösung $z(x, y)$ der Gleichung

$$L(z) - R\frac{\partial z}{\partial x} = f, \tag{11}$$

wo f eine stetige Funktion von x, y ist, die Fundamentalformel

$$\int_0^{x^{(0)}} \int_S \sum_{i,k}^{3} a_{ik} \left(\Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} - x) \frac{\partial z}{\partial y_k} - z \frac{\partial \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} - x)}{\partial y_k} \right) \cos(y_i \nu)\, d\sigma\, dx \tag{12}$$

$$+ \int_T R(y)\, z(0, y)\, \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)})\, dy - \int_0^{x^{(0)}} \int_T f(x, y)\, \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} - x)\, dx\, dy$$

$$= \begin{cases} z(x^{(0)}, y^{(0)}), & \text{wenn } y^{(0)} \text{ im Innern von } T, \\ 0 \qquad\quad , & \text{wenn } y^{(0)} \text{ im Innern von } \bar{T} - T \end{cases}$$

Hierbei ist $d\sigma$ das Flächenelement, ν die äußere Normale von S.

Ferner wird sich ergeben, daß das in (12) auftretende Integral

$$U(x^{(0)}, y^{(0)}) = \int_0^{x^{(0)}} \int_T f(x, y)\, \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} - x)\, dx\, dy$$

unter näher zu präzisierenden Voraussetzungen über f die „Poissonsche Formel"

$$L(U) - R\frac{\partial U}{\partial x} = \begin{cases} f(x^{(0)}, y^{(0)}), & y^{(0)} \text{ im Innern von } T_{x^{(0)}}, \\ 0 \qquad\quad , & y^{(0)} \text{ im Innern von } \bar{T} - T_{x^{(0)}}, \end{cases} \tag{12a}$$

liefert (§ 5; bei der Korrektur hinzugefügt).

Im letzten Teil der Arbeit (§ 6; bei der Korrektur hinzugefügt) wird gezeigt, daß die über die Grundlösung Γ bewiesenen Eigenschaften unter

---

[7]) Siehe etwa Goursat, Cours d'Analyse, t. III, 3. éd., p. 311, oder auch Gevrey loc. cit. § 1 und § 35.

gewissen näher angegebenen Voraussetzungen zur Lösung der sogenannten ersten Randwertaufgabe der Gleichung (4) bzw. (11) ausreichen[8]).

Es sei noch bemerkt, daß die zum Beweis von (6) führenden Betrachtungen fast unmittelbar einen Satz über die Approximation beliebiger stetiger Funktionen durch die Eigenfunktionen des Problems (7) liefern[9]). (Siehe Anm. [13]).

§ 1.

Beweis der Behauptung A.

Wir betrachten die zu der Randbedingung (7b) und dem elliptischen Differentialausdruck $L(u)$ bzw. $L(u) - \lambda u$ gehörige Greensche Funktion $K(y, \eta)$ bzw. $G(y, \eta, \lambda)$.[10]) Nach (7) ist dann

$$u_k(y) = \lambda_k \int_{\bar{T}} R(\eta)\, u_k(\eta)\, K(y, \eta)\, d\eta \tag{13}$$

und, da wir (7a) in der Form

$$L(u_k) - \lambda R u_k = -(\lambda + \lambda_k) R u_k$$

schreiben können, gilt auch

$$u_k(y) = (\lambda + \lambda_k) \int_{\bar{T}} R(\eta)\, u_k(\eta)\, G(y, \eta, \lambda)\, d\eta. \tag{14}$$

Multiplizieren wir (13) und (14) mit $\sqrt{R(y)}$ und setzen

$$u_k(y)\sqrt{R(y)} = \bar{u}_k(y), \qquad \sqrt{R(y)R(\eta)}\,K(y, \eta) = \bar{K}(y, \eta), \tag{15}$$

$$\sqrt{R(y)R(\eta)}\,G(y, \eta, \lambda) = \bar{G}(y, \eta, \lambda),$$

---

[8]) In gleichem Umfange, aber ohne Benutzung einer Grundlösung wurde die erste Randwertaufgabe in einer demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinenden Arbeit (E. Rothe, Über die Wärmeleitungsgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten im dreidimensionalen Falle, 1. Mitteilung und 2. Mitteilung) behandelt. Für den Fall der Gl. (4) vgl. auch A. Hammerstein, Über Entwicklungen gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwertaufgaben, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 304ff.

[9]) Vgl. E. Rothe, Über die Approximation stetiger Funktionen durch Eigenfunktionen elliptischer Differentialgleichungen (Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges. 28), wo ein Spezialfall des genannten Satzes bewiesen wurde.

[10]) Die Existenz solcher Greenschen Funktionen ist sichergestellt, da E. E. Levi (Rend. d. Pal. 24 (1907)) die Existenz einer Grundlösung und unter Benutzung der Levischen Grundlösung L. Lichtenstein und W. Sternberg gleichzeitig (Math. Zeitschr. 20 (1924), S. 198 und 21, S. 286) die Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe bewiesen haben. – Die Schlüsse von § 1 sind im wesentlichen die gleichen wie bei A. Hammerstein, loc. cit. S. 305f.

so erhalten wir für die $\bar{u}_k$ die Integralgleichungen mit symmetrischen Kernen

$$\bar{u}_k(y) = \lambda_k \int_{\bar{T}} \bar{u}_k(\eta)\, \bar{K}(y, \eta)\, d\eta, \tag{16}$$

$$\bar{u}_k(y) = (\lambda_k + \lambda) \int_{\bar{T}} \bar{u}_k(\eta)\, \bar{G}(y, \eta, \lambda)\, d\eta. \tag{17}$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Reihe (8) und die aus ihr durch gliedweise Differentiation nach x und ξ entstandenen Reihen für $y, \eta \prec \bar{T}$ und $x - \xi \geqq \delta > 0$ gleichmäßig konvergieren. Da, wie bekannt, die Eigenwerte λ_k von (7) nicht negativ sind, ist

$$e^{-\lambda_k (x-\xi)} < (\nu+2)!\, \lambda_k^{-(\nu+2)} (x-\xi)^{-(\nu+2)} \leqq (\nu+2)!\, (\lambda_k \delta)^{-(\nu+2)} \tag{18}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Daher ergibt sich nach (5) für irgend zwei positive ganze Zahlen k_0 und k_1

$$\sum_{k_0}^{k_1} |u_k(y)\, u_k(\eta)\, (-\lambda_k)^\nu\, e^{-\lambda_k (x-\xi)}| \leqq \frac{1}{m} \sum_{1}^{\infty} |\bar{u}_k(y)\, \bar{u}_k(\eta)\, \lambda_k^\nu\, e^{-\lambda_k (x-\xi)}| \tag{19}$$

$$\leqq \frac{1}{m} \frac{(\nu+2)!}{\delta^{\nu+2}} \sqrt{\sum_{k_0}^{k_1} \frac{u_k^2(y)}{\lambda_k^2} \sum_{k_0}^{k_1} \frac{u_k^2(\eta)}{\lambda_k^2}},$$

womit die Behauptung wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_1^\infty u_k^2/\lambda_k^2$ bewiesen ist. Aus ihr folgt offenbar, daß die Reihe (8) beliebig oft gliedweise nach x und ξ differenziert werden darf.

Nunmehr können wir zeigen, daß Γ als Funktion von x, y eine Lösung von (4) ist. Wie man sofort sieht, gilt die Behauptung jedenfalls für jeden einzelnen Summanden der Reihe (8). Setzt man daher

$$s_n = \sum_1^n u_k(y)\, u_k(\eta)\, e^{-\lambda_k (x-\xi)},$$

so ist

$$L_y(s_n) = R \frac{\partial s_n}{\partial x},$$ [11])

also

$$s_n(y, \eta, x-\xi) = \int_{\bar{T}} R(\zeta) \frac{\partial s_n(\zeta, \eta, x-\xi)}{\partial x} K(y, \zeta)\, d\zeta. \tag{20}$$

Da nun nach dem schon Bewiesenen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^\nu s_n}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^\nu \Gamma}{\partial x^\nu} \quad \text{(glm. für } x - \xi \geqq \delta > 0;\ y, \eta \prec \bar{T}), \tag{21}$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots)$$

[11]) Der Index y bedeutet, daß der Operator L in bezug auf y (nicht η) anzuwenden ist.

ist, so folgt aus (20)

$$\Gamma(y, \eta, x-\xi) = \int_{\bar{T}} R(\zeta) \frac{\partial \Gamma(\zeta, \eta, x-\xi)}{\partial x} K(y, \zeta)\, d\zeta;$$

hieraus aber folgt auf Grund der Eigenschaften der Greenschen Funktion K das behauptete Bestehen von (4), falls der Faktor von K einmal stetig nach ζ differenzierbar ist. Um dies noch einzusehen, beachten wir, daß nach (20)

$$\frac{\partial s_n(y, \eta, x-\xi)}{\partial x} = \int_{\bar{T}} R(\zeta) \frac{\partial^2 s_n(\zeta, \eta, x-\xi)}{\partial x^2} K(y, \zeta)\, d\zeta,$$

$$\frac{\partial^2 s_n(y, \eta, x-\xi)}{\partial y_i \partial x} = \int_{\bar{T}} R(\zeta) \frac{\partial^2 s_n(\zeta, \eta, x-\xi)}{\partial x^2} \frac{\partial K(y, \zeta)}{\partial y_i} d\zeta \tag{22}$$

und daß $\int_{\bar{T}} \left| \frac{\partial K(y, \zeta)}{\partial y_i} \right| d\zeta$ beschränkt ist, wenn sich y in einem abgeschlossenen, ganz im Innern von $\bar{T}$ gelegenen Bereiche $\bar{T}'$ bewegt. Hieraus folgt auf Grund von (21) leicht die gleichmäßige Konvergenz der rechten Seite von (22) für $y, \eta \prec \bar{T}'$, $x - \xi \geqq \delta$. Daher konvergiert auch die linke Seite in (22) gleichmäßig, woraus sich offenbar die nachzuweisende Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{R\,\partial \Gamma}{\partial x}\right)$ ergibt.

Daß Γ als Funktion von η, ξ die Gleichung (4^*) erfüllt, folgt jetzt unmittelbar aus

$$L_\eta \Gamma = L_y \Gamma, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x},$$

so daß die Eigenschaft A in allen Teilen nachgewiesen ist.

§ 2.

Eine andere Darstellung von Γ.

Ist $\bar{G}(y, \eta, \lambda)$ die in (15) definierte Funktion, so setzen wir

$$\begin{aligned} G_0(y, \eta, \lambda) &= \lambda \bar{G}(y, \eta, \lambda), \\ G_{\nu+1}(y, \eta, \lambda) &= \int_{\bar{T}} G_0(y, \zeta, \lambda)\, G_\nu(\eta, \zeta, \lambda)\, d\zeta \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{23}$$

und

$$\Gamma_\nu(y, \eta, x) = G_\nu\left(y, \eta, \frac{\nu}{x}\right). \tag{24}$$

Dann behaupten wir

$$\lim_{\nu \to \infty} \Gamma_\nu(y, \eta, x) = \sqrt{R(y) R(\eta)}\, \Gamma(y, \eta, x), \tag{25}$$

und zwar ist die Konvergenz gleichmäßig für $y, \eta \prec \bar{T}$ und $x \geqq \delta$.

G_ν ist nach (23) der mit $\lambda^{\nu+1}$ multiplizierte $(\nu+1)$-fach iterierte Kern der Integralgleichung (17). Daher ist für $\nu \geqq 1$

$$G_\nu(y, \eta, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\left(1+\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^{\nu+1}}, \tag{26}$$

also

$$\Gamma_\nu(y, \eta, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\left(1+\frac{\lambda_k x}{\nu}\right)^{\nu+1}}. \tag{27}$$

Wegen $\lambda_k > 0$ ist nun für $x > 0$

$$\left(1+\frac{\lambda_k x}{\nu}\right)^{\nu+1} > \binom{\nu+1}{2}\left(\frac{\lambda_k x}{\nu}\right)^2 > \frac{\lambda_k^2 x^2}{2!} \tag{28}$$

und wir erhalten die von x und ν unabhängige Abschätzung

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\left(1+\frac{\lambda_k x}{\nu}\right)^{\nu+1}} \right| \leqq \frac{2!}{\delta^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\lambda_k^2} \qquad (x \geqq \delta). \tag{29}$$

Ebenso folgt aus (18)

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)\,e^{-\lambda_k x}| \leqq \frac{2!}{\delta^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\lambda_k^2} \qquad (x \geqq \delta). \tag{30}$$

Ist nun ε eine vorgegebene positive Zahl, so wählen wir N so, daß die rechte Seite in (29) und (30) kleiner als ε wird, was wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta)}{\lambda_k^2}$ möglich ist. Dann wird nach (8) und (27) bis (30)

$$\begin{aligned} &\left| \sqrt{R(y)\,R(\eta)}\,\Gamma(y, \eta, x) - \Gamma_\nu(y, \eta, x) \right| \\ &\qquad \leqq \left| \sum_{1}^{N} \bar{u}_k(y)\,\bar{u}_k(\eta) \left[e^{-\lambda_k x} - \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda_k x}{\nu}\right)^{\nu+1}} \right] \right| + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{31}$$

Für $\nu \to \infty$ konvergiert (bei festem N) der erste rechtsstehende Summand gleichmäßig gegen 0. Hieraus folgt offenbar die Behauptung (25), da ε beliebig ist.

§ 3.

Beweis der Behauptung B.

Wir beginnen damit, einige Eigenschaften der G_ν festzustellen.

1. Es ist $G_\nu(y, \eta, \lambda) = 0$, wenn y am Rande von $\overline{T}$ liegt.
2. $G_\nu(y, \eta, \lambda) = G_\nu(\eta, y, \lambda)$.
3. $G_\nu \geqq 0$ für $y, \eta \prec \overline{T}$ und $\lambda > 0$.

Die Behauptungen 1. bis 3. sind richtig für $\nu = 0$. Der allgemeine Beweis ergibt sich durch vollständige Induktion auf Grund der Rekursionsformel (23).

4. Sei $\psi(y)$ eine in $\bar{T}$ einmal stetig differenzierbare Funktion und $v_1, v_2, \ldots, v_{\nu+1}$ die durch die folgende Kette von Randwertproblemen definierten Funktionen

$$\begin{aligned}
&L(v_1) - \lambda R v_1 = -\lambda R \psi; \quad v_1 = 0 \text{ am Rande von } \bar{T},\\
&L(v_2) - \lambda R v_2 = -\lambda R v_1; \quad v_2 = 0 \quad " \quad " \quad " \quad \bar{T},\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&L(v_{\nu+1}) - \lambda R v_{\nu+1} = -\lambda R v_\nu; \quad v_{\nu+1} = 0 \quad " \quad " \quad " \quad \bar{T},
\end{aligned} \tag{33}$$

Setzt man dann

$$\bar{\psi}(y) = \sqrt{R(y)}\,\psi(y), \qquad \bar{v}_\mu(y) = \sqrt{R(y)}\,v_\mu(y) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu+1),$$

so ist

$$\bar{v}_{\nu+1}(y) = \int_{\bar{T}} \bar{\psi}(\eta)\, G_\nu(y, \eta, \lambda)\, d\eta. \tag{34}$$

Beweis. Nach der Grundeigenschaft der Greenschen Funktion $G(y, \eta, \lambda)$ ist

$$v_1(y) = \lambda \int_{\bar{T}} R(\eta)\,\psi(\eta)\, G(y, \eta, \lambda)\, d\eta,$$

also nach (23) und (15)

$$\bar{v}_1(y) = \int_{\bar{T}} \bar{\psi}(\eta)\, G_0(y, \eta, \lambda)\, d\eta.$$

Die Behauptung ist daher richtig für $\nu = 0$. Für beliebiges ν folgt sie durch vollständige Induktion nach (23).

5. Es ist für jeden Teilbereich T von $\bar{T}$

$$0 \leqq \int_T \sqrt{R(\eta)}\, G_\nu(y, \eta, \lambda)\, d\eta \leqq \sqrt{R(y)} \qquad (y < \bar{T};\ \lambda > 0). \tag{35}$$

Der eine Teil der Behauptung folgt aus 3.; der andere lautet für $\nu = 0$ nach (23)

$$\lambda \int_T R(\eta)\, G(y, \eta, \lambda)\, d\eta \leqq 1;$$

das ist aber richtig[12]). Der Beweis für beliebiges ν durch vollständige Induktion nach (23).

---

[12]) Wegen des Beweises hierfür siehe S. 74 der in Anm. [9]) zitierten Arbeit. Die folgenden Beweise des Textes (bis S. 498) beruhen im wesentlichen auf einer passenden Ausdehnung der in der genannten Arbeit angewandten Methode.

6. Unter den Voraussetzungen von 4. ist

$$(36) \qquad \begin{aligned} |\bar{v}_{\nu+1}(y)| &\leqq \sqrt{R(y)}\,\mathrm{Max}|\psi| \\ |v_{\nu+1}(y)| &\leqq \mathrm{Max}|\psi| \end{aligned} \qquad (y \prec \bar{T};\ \lambda > 0).$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus (34) und (35).

7. Sind die Voraussetzungen von 4. erfüllt, ist überdies $\psi = 0$ am Rande von $\bar{T}$, existiert ferner $L(\psi)$ und ist einmal stetig nach den y_i differenzierbar, so ist

$$(37) \qquad |v_{\nu+1}(y) - \psi(y)| \leqq \frac{\nu+1}{\lambda}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right| \qquad (y \prec \bar{T};\ \lambda > 0).$$

Beweis. Durch passende Subtraktionen erhält man aus (33)

$$\begin{aligned} L(v_1 - \psi) - \lambda R(v_1 - \psi) &= -\lambda R \cdot \frac{L(\psi)}{\lambda R}; & & v_1 - \psi = 0 \text{ am Rande v} \\ L(v_2 - v_1) - \lambda R(v_2 - v_1) &= -\lambda R \cdot (v_1 - \psi); & & v_2 - v_1 = 0 \quad " \quad " \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ L(v_{\nu+1} - v_\nu) - \lambda R(v_{\nu+1} - v_\nu) &= -\lambda R \cdot (v_\nu - v_{\nu-1}); & & v_{\nu+1} - v_\nu = 0 \quad " \quad " \end{aligned}$$

Durch passende Anwendung von 6. folgt daher

$$\mathrm{Max}|v_{\nu+1} - v_\nu| \leqq \mathrm{Max}|v_\nu - v_{\nu-1}| \ldots \leqq \mathrm{Max}|v_1 - \psi| \leqq \mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{\lambda R}\right|,$$

also

$$|v_{\nu+1} - \psi| \leqq |v_{\nu+1} - v_\nu| + |v_\nu - v_{\nu-1}| + \ldots + |v_1 - \psi| \leqq \frac{\nu+1}{\lambda}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right|,$$

womit (37) bewiesen ist.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir die Behauptung B (S. 489) für den Fall beweisen, daß

$$\varphi \equiv 1.$$

Sei also T ein Teilbereich von $\bar{T}$. Wir betrachten zuerst den Fall, daß $y^{(0)}$ innerer Punkt von T ist. Sei alsdann σ eine positive Zahl, die so klein gewählt ist, daß die Kugel K_σ um $y^{(0)}$ mit dem Radius σ ganz im Innern von T liegt. Sei ferner

$$\psi(y, y^{(0)}) = \begin{cases} (\sigma^4 - r^4)^4 & \text{für} \quad r \leqq \sigma \\ 0 & " \quad r > \sigma \end{cases} \qquad [r^2 = \Sigma(y_i - y_i^{(0)})^2].$$

$\psi(y, y^{(0)})$ genügt, wie man sich leicht überzeugt, als Funktion von y den Voraussetzungen von 7.; ferner ist ψ nicht negativ und erreicht für $y = y^{(0)}$ sein Maximum. Sind daher $v_1, \ldots, v_{\nu+1}$ die Lösungen der Randwertprobleme (33) (wobei $y^{(0)}$ als Parameter auftritt), so ist nach (37)

$$|\psi(y, y^{(0)}) - v_\nu(y, y^{(0)})| \leqq \frac{\nu}{\lambda}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right|$$

oder unter Beachtung von 4. und 3.

$$\psi(y,y^{(0)}) - \frac{\nu}{\lambda}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right| \leqq v_\nu(y,y^{(0)}) = \frac{1}{\sqrt{R(y)}}\int_{\bar{T}} \bar{\psi}(\eta,y^{(0)})\,G_{\nu-1}(y,\eta,\lambda)\,d\eta$$

$$\leqq \frac{\psi(y^{(0)},y^{(0)})}{\sqrt{R(y)}}\int_{\bar{T}} \sqrt{R(\eta)}\,G_{\nu-1}(y,\eta,\lambda)\,d\eta.$$

Setzen wir hierin $y = y^{(0)}$ und dividieren durch die positive Zahl $\psi(y^{(0)},y^{(0)})$, so erhalten wir unter Beachtung von (35)

$$(38)\quad 1 - \frac{\nu}{\lambda\,\psi(y^{(0)},y^{(0)})}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{R(y^{(0)})}}\int_{\bar{T}} \sqrt{R(\eta)}\,G_{\nu-1}(y^{(0)},\eta,\lambda)\,d\eta \leqq 1.^{13})$$

Setzen wir speziell $\lambda = \frac{\nu-1}{x}$, d. h. $\frac{\nu}{\lambda} = x\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)$, so kommt nach (24)

$$1 - x\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)\frac{1}{\psi(y^{(0)},y^{(0)})}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{R(y^{(0)})}}\int_{\bar{T}} \sqrt{R(\eta)}\,\Gamma_{\nu-1}(y^{(0)},\eta,x)\,d\eta \leqq 1$$

und nach (25)

$$(39)\quad 1 - \frac{x}{\psi(y^{(0)},y^{(0)})}\,\mathrm{Max}\left|\frac{L(\psi)}{R}\right| \leqq \int_{\bar{T}} R(\eta)\,\Gamma(y^{(0)},\eta,x)\,d\eta \leqq 1,$$

woraus die Behauptung

$$(40)\qquad \lim_{x\to 0}\int_{\bar{T}} R(\eta)\,\Gamma(y^{(0)},\eta,x)\,d\eta = 1 \qquad (y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } T)$$

folgt.

Sei jetzt $y^{(0)}$ innerer Punkt von $\bar{T}-T$. Nach dem schon Bewiesenen ist dann

$$\lim_{x\to 0}\int_{\bar{T}-T} R(\eta)\,\Gamma(y^{(0)},\eta,x)\,d\eta = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\int_{\bar{T}} R(\eta)\,\Gamma(y^{(0)},\eta,x)\,d\eta = 1.$$

---

[13]) Macht man in (38) bei festem ν den Grenzübergang $\lambda\to\infty$, so folgt

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\bar{T}} \sqrt{R(\eta)}\,G_{\nu-1}(y^{(0)},\eta,\lambda)\,d\eta = \sqrt{R(y^{(0)})} \qquad (y^{(0)} < T).$$

Hieraus ergibt sich (ähnlich wie im Text auf S. 498), daß auch für jede stetige Funktion φ

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\bar{T}} \sqrt{R(\eta)}\,\varphi(\eta)\,G_{\nu-1}(y^{(0)},\eta,\lambda)\,d\eta = \sqrt{R(y^{(0)})}\,\varphi(y^{(0)}).$$

Wendet man dies auf $T-\bar{T}$ an und beachtet, daß $G_{\nu-1}$ der mit λ^ν multiplizierte ν-fach iterierte Kern der Integralgleichung (17) ist, so folgt

$$\varphi(y^{(0)}) = \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k u_k(y^{(0)})}{\left(1+\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^\nu} \qquad \left(c_k = \int_{\bar{T}} R(\eta)\,\varphi(\eta)\,u_k(\eta)\,d\eta\right)$$

$$(\nu = 1,2,3,\ldots)$$

für jede stetige (nicht notwendig der Randbedingung (7b) genügende) Funktion φ. Der Fall $\nu = 1$ wurde bereits in der in Anm. [9]) zitierten Arbeit bewiesen. (Anm. bei der Korrektur.)

Wegen $\int_T = \int_{\bar{T}} - \int_{\bar{T}-T}$ folgt daher die Behauptung

$$\lim_{x \to 0} \int_{\bar{T}} R(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta = 0 \quad (y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } \bar{T} - T). \tag{41}$$

Sei jetzt $\varphi(y)$ eine beliebige stetige Funktion und $y^{(0)}$ zunächst ein innerer Punkt von T. Wir schreiben dann

$$\begin{aligned} \int_{\bar{T}} R(\eta)\, \varphi(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \\ = \varphi(y^{(0)}) \int_{\bar{T}} R(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \\ + \int_{\bar{T}} R(\eta)\, [\varphi(\eta) - \varphi(y^{(0)})]\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta. \end{aligned} \tag{42}$$

Sei ε eine vorgegebene positive Zahl und U eine ganz in T gelegene Umgebung von $y^{(0)}$ von der Eigenschaft, daß $|\varphi(\eta) - \varphi(y^{(0)})| < \varepsilon$ ist, wenn η in U liegt. Dann ist nach (39)

$$\left| \int_U R(\eta)\, [\varphi(\eta) - \varphi(y^0)]\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \right| < \varepsilon,$$

und da $y^{(0)}$ äußerer Punkt von $T - U$ ist, nach (41)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \left| \int_{T-U} R(\eta)\, [\varphi(\eta) - \varphi(y^0)]\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \right| \\ \leqq 2\, \mathrm{Max}\, |\varphi| \lim_{x \to 0} \int_{T-U} R(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta = 0. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (40) folgt daher aus (42) für alle genügend kleinen positiven x

$$\left| \int_{\bar{T}} R(\eta)\, \varphi(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, dx - \varphi(y^{(0)}) \right| < 3\varepsilon,$$

womit der erste Teil der Behauptung (6) bewiesen ist.

Der *zweite* Teil von (6) folgt unter Beachtung von

$$\left| \int_{\bar{T}} R(\eta)\, \varphi(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta \right| \leqq \mathrm{Max}\, |\varphi| \int_{\bar{T}} R(\eta)\, \Gamma(y^{(0)}, \eta, x)\, d\eta$$

unmittelbar aus (41).

§ 4.

Beweis der Fundamentalformel.

Nach dem Beweis von (6) ergibt sich nun die Fundamentalformel (12) in der üblichen Weise:

Setzt man

$$M(u) \equiv L(u) - R\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad M^*(u) \equiv L(u) + R\frac{\partial u}{\partial x},$$

so ist für irgend zwei zweimal nach den y_i und einmal nach x differenzierbare Funktionen $\alpha(x, y)$ und $\beta(x, y)$

$$(43) \qquad \alpha M(\beta) - \beta M^*(\alpha) = \sum_{i,k}^{3} \frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ik}\left(\alpha \frac{\partial \beta}{\partial y_k} - \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y_k}\right)\right] - R \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial x}.$$

Integriert man diese Identität zuerst über den y-Bereich T[14]) und dann über x von 0 bis $x^{(0)}$, so erhält man (unter Voraussetzung der Stetigkeit der in (43) auftretenden Ableitungen von α und β):

$$(44) \qquad \int_0^{x^{(0)}} \int_T [\alpha M(\beta) - \beta M^*(\alpha)]\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{x^{(0)}} \int_S \sum_{i,k}^{3} a_{ik}\left(\alpha \frac{\partial \beta}{\partial y_k} - \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y_k}\right) \cos(y_i \nu)\, d\sigma\, dx$$

$$- \int_T R(y)\, \alpha(x^{(0)}, y)\, \beta(x^{(0)}, y)\, dy + \int_T R(y)\, \alpha(0, y)\, \beta(0, y)\, dy.$$

Ist nun $\beta(x, y)$ eine Lösung z von

$$M(z) = f(x, y),$$

wo f eine gegebene stetige Funktion ist, und ist

$$\alpha(x, y) = \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} + h - x) \qquad (h > 0;\ y^{(0)} < \bar{T}),$$

so daß

$$M^*(\alpha) = 0,$$

so liefert (44)

$$(45) \quad \int_T R(y)\, z(y, x^{(0)})\, \Gamma(y^{(0)}, y, h)\, dy = \int_0^{x^{(0)}} \int_S \sum_{i,k}^{3} a_{ik}\left(\Gamma \frac{\partial z}{\partial y_k} - z \frac{\partial \Gamma}{\partial y_k}\right) \cos(y_i \nu)\, d\sigma\, dx$$

$$+ \int_T R(y)\, z(0, y)\, \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} + h)\, dy$$

$$- \int_0^{x^{(0)}} \int_T f(x, y)\, \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} + h - x)\, dx\, dy.$$

In dieser Formel lassen wir nun unter der Annahme, daß $y^{(0)}$ nicht auf dem Rande von T liegt, h gegen 0 gehen. Dann ist in dem zweiten in (45) rechts stehenden Integral $x \neq x^{(0)}$; daher kann in ihm der Grenzübergang vollzogen werden, indem in Γ $h = 0$ gesetzt wird. Das ist aber, wie wir behaupten, auch in dem letzten der rechts stehenden Integrale erlaubt. Schreibt man nämlich bei gegebenem $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{x^{(0)}} \int_T f(x, y)\, \Gamma(y^{(0)}, y, x^{(0)} + h - x)\, dy\, dx = \int_0^{x^{(0)} - \varepsilon} \int_T \ldots dy\, dx + \int_{x^{(0)} - \varepsilon}^{x^{(0)}} \int_T \ldots dy\, dx,$$

[14]) Wegen der Bedeutung der Bezeichnung T sowie der folgenden S, ν und $d\sigma$ siehe S. 490.

so ist die Behauptung für den ersten Summanden gewiß richtig. Der zweite ist aber nach (39) und (5) absolut genommen höchstens gleich

$$\operatorname{Max}\left|\frac{f}{R}\right| \cdot \int_{x^{(0)}-\varepsilon}^{x^{(0)}} dx \leqq \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{Max}|f|}{m},$$

woraus die Behauptung offenbar folgt.

Wegen (6) erhalten wir daher aus (45) die Fundamentalformel (12), da nunmehr auch für das erste rechts stehende Integral die Existenz eines Grenzwertes für $h \to 0$ folgt, und man sich leicht überlegt, daß dieser durch Nullsetzen von h erhalten wird.

§ 5.

Beweis der Poissonschen Formel[15]).

Wir haben

$$U(x, y) = \int_0^x \int_{\bar{T}} f(\xi, \eta)\, \Gamma(y, \eta, x - \xi)\, d\eta\, d\xi \qquad (T < \bar{T})$$

zu betrachten und (12a) zu beweisen. Wir setzen

$$F(\xi, \eta) = \begin{cases} f(\xi, \eta), & \text{wenn } \eta \text{ in } T, \\ 0 \quad , & \text{wenn } \eta \text{ nicht in } T. \end{cases} \tag{46}$$

Es ist dann

$$U(x, y) = \int_0^x \int_{\bar{T}} F(\xi, \eta)\, \Gamma(y, \eta, x - \xi)\, d\eta\, d\xi. \tag{47}$$

Von f setzen wir einmal stetige Differenzierbarkeit nach η und zweimal stetige Differenzierbarkeit nach ξ voraus. Die gleichen Eigenschaften besitzt dann F mit Ausnahme der Randpunkte von T. Setzt man nun in (47) für Γ die Reihe (8) ein und beachtet die Tatsache, daß die Reihe (8) gleichmäßig für $x - \xi \geqq \delta$ konvergiert, so ergibt sich

$$U(x, y) = \lim_{x_1 \to x} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \int_0^{x_1} [F(\xi)]_k\, e^{-\lambda_k (x-\xi)}\, d\xi \qquad (0 < x_1 < x) \tag{48}$$

wobei

$$[F(\xi)]_k = \int_{\bar{T}} F(\xi, \eta)\, u_k(\eta)\, d\eta.$$

Formt man nun das Integral in (48) durch partielle Integration um:

$$\int_0^{x_1} [F(\xi)]_k\, e^{-\lambda_k (x-\xi)}\, d\xi = [F(\xi)]_k \frac{e^{-\lambda_k (x-\xi)}}{\lambda_k}\Big|_{\xi=0}^{\xi=x_1} - \frac{1}{\lambda_k} \int_0^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\right]_k e^{-\lambda_k (x-\xi)}\, d\xi,$$

[15]) § 5 und § 6 wurden bei der Korrektur hinzugefügt.

so erkennt man auf Grund der Besselschen Ungleichung sowie der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum \frac{u_k^2}{\lambda_k^2}$, daß die so entstandene Reihe gleichmäßig in x und y konvergiert, also der Grenzübergang $x_1 \to x$ in (48) gliedweise ausgeführt werden kann. Man erhält so

$$U(x,y) = \sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}[F(x)]_k - \sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}[F(0)]_k e^{-\lambda_k x} - \sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}\int_0^x \left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\right]_k e^{-\lambda_k(x-\xi)}\,d\xi.$$

Nun ist auf Grund von (13)

$$\sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}[F(x)]_k = \int_T K(y,\eta)\,F(x,\eta)\,d\eta, \tag{50}$$

folglich

$$\left(L - R\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}[F(x)]_k\right) = -F(x,y) - R\int_T K(y,\eta)\,\frac{\partial F(x,\eta)}{\partial x}\,d\eta. \tag{51}$$

Ferner genügt jedes Glied der *zweiten* Summe in (49) der homogenen Gleichung (4); hieraus folgt durch die gleichen Betrachtungen wie in § 1

$$\left(L - R\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}[F(0)]_k e^{-\lambda_k x}\right) = 0. \tag{52}$$

Die dritte Summe in (49) schließlich ist

$$\int_0^x H(x,\xi)\,d\xi, \tag{53}$$

wenn

$$\int_T \sum_k \frac{u_k(y)\,u_k(\eta)}{\lambda_k}\,\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \xi}\,e^{-\lambda_k(x-\xi)}\,d\eta = H(x,\xi)$$

gesetzt ist. $H(x,\xi)$ ist stetig in dem abgeschlossenen Intervall $0 \leqq \xi \leqq x$; für $0 \leqq \xi < x$ ist nach (8)

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\int_T \Gamma(y,\eta,x-\xi)\,\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \xi}\,d\eta, \tag{54}$$

hat also auf Grund von (6) einen endlichen Grenzwert für $\xi - x \to 0$. Hieraus folgt, daß die Ableitung des Integrals (53) nach x nach der gewöhnlichen Regel

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x H(x,\xi)\,d\xi = H(x,x) + \int_0^x \frac{\partial H}{\partial x}(x,\xi)\,d\xi$$

gebildet werden darf. Wir haben also unter Beachtung von (50) und (54)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_k \frac{u_k(y)}{\lambda_k}\int_0^x \left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\right]_k e^{-\lambda_k(x-\xi)}\,d\xi\right\} \tag{55}$$

$$= \int_{\bar{T}} K(y,\eta)\,\frac{\partial F}{\partial x}(x,\eta)\,d\eta - \int_0^x\int_{\bar{T}} \Gamma(y,\eta,x-\xi)\,\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \xi}\,d\eta\,d\xi\,.$$

Um auf den dritten Summanden von (49) auch den Operator L anzuwenden, schreiben wir diesen in der sich ohne weiteres aus (13) und (8) ergebenden Form[16])

$$-\int_0^x\int_{\bar{T}} K(y,\zeta)\,R(\zeta)\int_{\bar{T}} \Gamma(\zeta,\eta,x-\xi)\,\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi,\eta)\,d\eta\,d\zeta\,d\xi\,. \tag{56}$$

Diese setzt in Evidenz, daß die Operation L gerade $R(y)$ multipliziert mit dem Integral

$$\int_0^x\int_{\bar{T}} \Gamma(y,\eta,x-\xi)\,\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi \tag{57}$$

liefert, falls dieser Ausdruck einmal stetig nach y differenzierbar ist, und aus (49), (51), (52), (55) und (46) folgt dann die Behauptung (12a). Um noch die stetige Differenzierbarkeit von (57) einzusehen, formen wir diesen Ausdruck in der gleichen Weise um wie früher (47). Wir erhalten dann einen Ausdruck, der aus der rechten Seite von (49) hervorgeht, wenn wir dort F durch $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ ersetzen; diesen können wir dann auch so schreiben (vgl. (50) und (56)):

$$\int_{\bar{T}} K(y,\eta)\,\frac{\partial F}{\partial x}(x,\eta)\,d\eta - \int_{\bar{T}} K(y,\zeta)\,R(\zeta)\int_{\bar{T}} \Gamma(\zeta,\eta,x)\,\frac{\partial F(0,\eta)}{\partial x}\,d\eta\,d\zeta$$

$$-\int_0^x\int_{\bar{T}} K(y,\zeta)\,R(\zeta)\int_{\bar{T}} \Gamma(\zeta,\eta,x-\xi)\,\frac{\partial^2 F(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\,d\eta\,d\zeta\,d\xi\,.$$

Da die Faktoren von K unter den Integralen stetige Funktionen sind, kann man unter den Integralen nach y differenzieren.

---

[16]) Man vertausche in dem in Rede stehenden dritten Summanden von (49) die Integration nach ξ mit der Summation und beachte, daß $\sum_k u_k(y)\,u_k(\eta)\,e^{-\lambda_k(x-\xi)}$ bei festem $\xi < x$ absolut und gleichmäßig in y und η konvergiert.

§ 6.

Zur ersten Randwertaufgabe.

Die sogenannte erste Randwertaufgabe, eine Funktion z zu finden, die im Innern des Bereiches (9) eine Lösung von (11) ist und für $x = 0$ sowie auf M_x vorgegebene Werte annimmt, läßt sich mit Hilfe der im vorstehenden bewiesenen Eigenschaften noch nicht unter ebenso geringen Voraussetzungen erledigen wie die entsprechende Aufgabe in der Theorie der speziellen Gleichung (1). Hierzu fehlen noch gewisse Eigenschaften der Grundlösung, die dem Verhalten des Potentials einer Doppelschicht entsprechen und in der Theorie der genannten speziellen Gleichung[17]) wesentlich benutzt werden.

Zur Behandlung der Randwertaufgabe zerlegen wir diese in bekannter Weise in zwei Teilaufgaben:

1. Eine Lösung u von (4) zu finden, die den Randbedingungen

$$u(x, y) \to u_0(y^{(0)}) \quad \text{für} \quad (x, y) \to (0, y^{(0)}) \quad (y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } \bar{T}), \tag{58a}$$

$$u(x, y) \to 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \to (\xi, \eta) \quad (\eta \text{ auf } \bar{S},\ \xi > 0) \tag{58b}$$

genügt, wobei u_0 eine vorgegebene in $\bar{T}$ definierte Funktion ist.

2. Eine Lösung v von (11) zu finden, die den Randbedingungen

$$v(x, y) \to 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \to (0, y^{(0)}) \quad (y^{(0)} \text{ innerer Punkt von } \bar{T}), \tag{59a}$$

$$v(x, y) \to \varphi(\xi, \eta) \quad \text{für} \quad (x, y) \to (\xi, \eta) \quad (\eta \text{ auf } \bar{S},\ \xi > 0) \tag{59b}$$

genügt, wobei φ eine vorgegebene auf M_x definierte Funktion ist.

$z = u + v$ ist dann eine Lösung von (11), die (58a) und (59b) genügt.

Das Problem 1 wird nun bei stetigem u_0 durch

$$u(x, y) = \int_{\bar{T}} u_0(\eta)\, \Gamma(y, \eta, x)\, d\eta$$

vollständig gelöst, wie man unmittelbar aus A, B (S. 489) und (7b) schließt, wenn man beachtet, daß die Konvergenz in (6) gleichmäßig ist für alle x, deren Entfernung vom Rande von $\bar{T}$ oberhalb einer festen positiven Zahl liegt[18]), und daß ebenso die Reihe (8) für $x - \xi \geqq \delta > 0$

---

[17]) Siehe z. B. Goursat, Cours d'analyse t. 3. ch. XXIX.

[18]) Dies folgt sofort aus der Abschätzung (39) auf S. 497 im Verein mit dem Beweis auf S. 498.

gleichmäßig konvergiert. Ist ferner in (59b) die Funktion φ dreimal stetig differenzierbar und kennt man eine im Bereich (9) einschließlich des Randes dreimal stetig nach x und y differenzierbare Funktion $\Phi(x, y)$, die die Randbedingung (59b) befriedigt (ohne notwendigerweise einer Differentialgleichung zu genügen[19]), so kann man das Problem 2. ebenfalls lösen, falls f die Voraussetzungen von § 5 erfüllt. In der Tat genügt dann $w = v - \Phi$ der Gleichung

$$L(w) - R\frac{\partial w}{\partial x} = g(x, y) \qquad \left(g = f - L(\Phi) + R\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$$

und einer Randbedingung der Form (58a), (58b). Da auf Grund der gemachten Annahmen g einmal stetig nach y und zweimal stetig nach x differenzierbar ist, wird diese Aufgabe offenbar durch

$$w = \int_0^x \int_{\bar{T}} g(\xi, \eta)\, \Gamma(y, \eta, x - \xi)\, d\eta\, d\xi + \int_{\bar{T}} u_0(\eta)\, \Gamma(y, \eta, x)\, d\eta$$

gelöst.

---

[19]) Für den Fall, daß $\bar{T}$ ein Sternbereich ist, wird die explizite Konstruktion einer solchen Funktion Φ in der in Anm. [8]) zitierten Arbeit angegeben.

(Eingegangen am 16. März 1930.)

Über die simultanen diophantischen Approximationen.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Definitionen und Resultate.

Wir wollen uns in dieser Abhandlung mit zwei Problemen aus der Theorie der simultanen diophantischen Approximationen beschäftigen, und zwar hat das erste von diesen beiden Problemen einen mengentheoretischen, das andere einen elementaren Charakter.

Wir führen zunächst folgende Ausdrucksweise ein: Es sei s ganz, $s \geqq 1$; $\omega(x)$ sei eine für $x \geqq 1$ definierte und positive Funktion. Es sei $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ein System von s reellen Zahlen; man kann dieses System auch als einen Punkt P (mit den Koordinaten $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$) in einem s-dimensionalen kartesischen Raume R_s deuten. Wir wollen sagen, daß das System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ (oder der Punkt P) die Approximation $\omega(x)$ zuläßt, wenn es zu jedem $c > 0$ ein System von $s+1$ ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$ mit $q > c$ gibt, welches den folgenden s Ungleichungen genügt:

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \omega(q) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Bekanntlich läßt jedes System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ die Approximation $\frac{1}{x^{1+\frac{1}{s}}}$ zu (es sind noch etwas schärfere Resultate bekannt[1]). Es drängt sich also folgende Frage auf: Es sei (bei gegebenem ganzem $s \geqq 1$) für $x \geqq 1$ eine positive Funktion $\omega(x)$ gegeben, die kleiner als $x^{-1-\frac{1}{s}}$ ist; wie „groß" ist dann die Menge derjenigen Punkte des Raumes R_s, welche die Approxi-

[1]) Nach H. Minkowski (Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, S. 112) darf man $x^{-1-\frac{1}{s}}$ durch $\frac{s}{s+1} x^{-1-\frac{1}{s}}$ ersetzen.

mation $\omega(x)$ zulassen? Dabei muß man freilich den Ausdruck „wie groß" noch präzisieren; wir verstehen diesen Ausdruck zunächst im Sinne der Lebesgueschen Maßtheorie und formulieren daher unsere Frage genauer folgendermaßen:

Es sei $s \geqq 1$, s ganz; $\omega(x)$ sei für $x \geqq 1$ definiert und positiv; dann wollen wir in dieser ganzen Abhandlung mit

$$M(\omega(x); s)$$

die Menge derjenigen Systeme (Punkte) $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ mit

$$0 \leqq \theta_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

bezeichnen, welche die Approximation $\omega(x)$ zulassen. Wenn A eine Punktmenge in R_s ist, so wollen wir mit $L(A)$ das äußere (s-dimensionale) Lebesguesche Maß von A bezeichnen. Und wir fragen: Wie groß ist $L(M(\omega(x); s))$?[2]) Diese Frage wurde von Herrn A. Khintchine[3]) folgendermaßen beantwortet:

Es sei $\omega(x)$ für $x \geqq 1$ stetig und positiv; $\omega^s(x)x^{s+1}$ sei für $x \geqq 1$ abnehmend, $\omega^s(x)x^{s+1} \to 0$ für $x \to \infty$. Dann ist $L(M(\omega(x); s))$ gleich Null oder gleich Eins, je nachdem das Integral

$$\int_1^\infty \omega^s(x)x^s\,dx$$

konvergiert oder divergiert[4]).

Dieses schöne Ergebnis gibt also eine sehr vollständige Antwort auf unsere Frage; bei einer näheren Betrachtung bieten sich jedoch Fragen dar, die durch den Khintchineschen Satz nicht beantwortet werden. Es sei z. B. $s = 2$; dann ist $L(M(x^{-\alpha}; 2)) = 0$ für $\alpha > \frac{3}{2}$; man wird aber trotzdem vermuten, daß z. B. die Menge $M(x^{-\frac{1}{4}}; 2)$ wesentlich „größer" ist als $M(x^{-2}; 2)$. Weil hier das Lebesguesche Maß versagt, muß man zu einem anderen Maßbegriff greifen, der insbesondere die Mengen vom Lebesgueschen Maß Null noch weiter zu klassifizieren gestattet. Und zwar

---

[2]) Übrigens ist $M(\omega(x); s)$, wie leicht einzusehen, eine Borelsche Menge, also meßbar; die Einschränkung $0 \leqq \theta_i < 1$ ist nur aus Bequemlichkeitsgründen gemacht worden und verletzt offenbar keineswegs die Allgemeinheit der Fragestellung.

[3]) Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr. **24** (1926), S. 706—714. Fragen dieser Art gehen auf E. Borel zurück (Contribution à l'analyse arithmétique du continu, Journal de mathématiques pures et appliquées (5), **9** (1903), S. 329—375.)

[4]) $M(\omega(x); s)$ wird offenbar nicht geändert, wenn man $\omega(x)$ irgendwie abändert, aber so, daß für hinreichend große x die Funktion $\omega(x)$ ungeändert bleibt; es würde daher genügen, z. B. die Monotonie von $\omega^s(x)x^{s+1}$ erst für $x > a$ ($a \geqq 1$) vorauszusetzen. Man beachte diese triviale Bemerkung auch im folgenden.

eignet sich zu diesem Zweck ein von Herrn F. Hausdorff eingeführter Maßbegriff. Dieser wird folgendermaßen eingeführt[5]):

Es sei $f(x)$ eine für $x > 0$ definierte, stetige, positive und wachsende Funktion; $f(x) \to 0$ für $x \to 0$. Es sei R_s $(s \geqq 1)$ ein s-dimensionaler kartesischer Raum. Unter einem s-dimensionalen Würfel verstehen wir stets einen Würfel in R_s, dessen Kanten mit den Koordinatenachsen parallel sind, und zwar, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird, einen offenen Würfel. A sei eine Punktmenge aus R_s; ϱ sei eine positive Zahl.

Es sei nun $\mathfrak{S}$ ein höchstens abzählbares System von s-dimensionalen Würfeln $W_1, W_2, \ldots$, deren Kanten $d_1, d_2, \ldots$ sämtlich kleiner als ϱ sind; $\mathfrak{S}$ sei ein Überdeckungssystem von A (d. h. jeder Punkt von A sei in mindestens einem Würfel aus $\mathfrak{S}$ enthalten). Wir setzen

$$\Lambda(\mathfrak{S}) = \sum_i f(d_i)$$

(die rechte Seite soll $+\infty$ bedeuten, wenn $\sum_i f(d_i)$ divergiert). Die untere Grenze von $\Lambda(\mathfrak{S})$ für alle solchen höchstens abzählbaren Überdeckungssysteme $\mathfrak{S}$ von A, die der Bedingung $d_i < \varrho$ genügen, möge mit $L_\varrho(A; f(x))$ bezeichnet werden. Wenn ϱ abnimmt, so verschärft sich die Bedingung $d_i < \varrho$, also nimmt $L_\varrho(A; f(x))$ nicht ab, also existiert der Grenzwert

$$L(A; f(x)) = \lim_{\varrho = 0} L_\varrho(A; f(x)), \qquad (0 \leqq L(A; f(x)) \leqq \infty)\ ^6).$$

Diese Mengenfunktion $L(A; f(x))$ erfüllt (bei gegebenem s und $f(x)$) die fünf Postulate der Carathéodoryschen Maßtheorie. Wir werden davon aber keinen Gebrauch machen; wir benutzen nur die folgenden trivialen Folgerungen der Definition:

---

[5]) F. Hausdorff, Dimension und äußeres Maß, Math. Annalen 79 (1919), S. 157 bis 179. Der Leser braucht von der Hausdorffschen Theorie nichts zu kennen.

[6]) Unsere Definition weicht ein wenig von der Hausdorffschen Definition 2 (a. a. O. [5]), S. 166) ab; Herr Hausdorff überdeckt nämlich A mit Kugeln, deren Durchmesser $d_1, d_2, \ldots$ heißen; für unsere Zwecke sind die Würfel bequemer. Alle Hausdorffschen Schlüsse gelten auch für unsere Definition. Übrigens werden wir uns bei unserer Hauptuntersuchung (Satz 4) auf solche $f(x)$ beschränken, für welche $f(x)\, x^{-s}$ nicht wächst; also $f(x) \geqq f\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) \geqq s^{-\frac{s}{2}} f(x)$ für $x > 0$. Da jede Kugel vom Durchmesser d einen Würfel von der Kante $\frac{d}{\sqrt{s}}$ enthält und in einem Würfel von der Kante d enthalten ist, so besagt die Gleichung $L(A; f(x)) = 0$ offenbar dasselbe, ob wir sie in unserem (Würfel) oder im Hausdorffschen Sinne (Kugel) verstehen; dasselbe gilt von der Gleichung $L(A; f(x)) = \infty$. Und nur solche Mengen A kommen in unseren Hauptsätzen vor. In verschiedenen Fragen vom geometrischen Charakter könnte jedoch die Hausdorffsche Definition vorteilhafter sein, da sie gegenüber den euklidischen Bewegungen invariant ist.

1. Aus $A \subset B$ folgt $L(A; f(x)) \leqq L(B; f(x))$.

2. Wenn $V_1, V_2, \ldots$ höchstens abzählbar viele Mengen aus R_s sind, V ihre Vereinigungsmenge, so ist

$$L(V; f(x)) \leqq \sum_i L(V_i; f(x)).$$

3. Wenn auch $f_1(x)$ eine für $x > 0$ definierte, stetige, positive und wachsende Funktion ist ($f_1(x) \to 0$ für $x \to 0$) und wenn

$$\liminf_{x=0} \frac{f_1(x)}{f(x)} \geqq 1,$$

so ist

$$L(A; f_1(x)) \geqq L(A; f(x)).$$

Wir bemerken noch: erstens, daß $L(A; f(x))$ nur von dem Verhalten von $f(x)$ für *kleine* $x > 0$ abhängt; zweitens, daß $L(A; x^s)$ offenbar das äußere Lebesguesche Maß von A ist.

Dieser Maßbegriff $L(A; f(x))$ erlaubt uns in der Tat, die Vermutung, daß einer „schwächeren" Approximation $\omega(x)$ eine „größere" Menge $M(\omega(x); s)$ entspricht als einer „schärferen" Approximation, genau zu formulieren und in ziemlich allgemeinen Fällen zu beweisen; dies geschieht durch die Sätze 3 und 4. Um aber den Sinn dieser etwas komplizierten Sätze dem Leser deutlicher zu machen, führen wir an dieser Stelle zunächst ein einfaches Korollar derselben — nämlich den Satz 1 — an. Vorher aber noch eine kleine Bemerkung.

Unter den reellen Systemen $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ verdienen offenbar diejenigen Systeme eine besondere Beachtung, die keiner Gleichung

$$\sum_{i=1}^{s} k_i \theta_i + k_0 = 0$$

mit ganzzahligen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $k_0, k_1, \ldots, k_s$ genügen; wir wollen solche Systeme „eigentliche Systeme" nennen und mit $M_e(\omega(x); s)$ die Menge aller eigentlichen Systeme aus $M(\omega(x); s)$ bezeichnen. Der Satz 1 lautet nun:

Satz 1. *Für* $\alpha > 1 + \frac{1}{s}$ *ist*

$$L(M(x^{-\alpha}; s); x^\gamma) = L(M_e(x^{-\alpha}; s); x^\gamma) = 0 \quad \textit{für} \quad \gamma > \frac{s+1}{\alpha};$$

$$L(M(x^{-\alpha}; s); x^\gamma) = L(M_e(x^{-\alpha}; s); x^\gamma) = \infty \quad \textit{für} \quad 0 < \gamma \leqq \frac{s+1}{\alpha}.$$

Man könnte — ähnlich, aber nicht genau so wie Herr Hausdorff — sagen, daß eine Menge A aus R_s die Dimension σ besitzt, wenn σ die untere Grenze derjenigen Zahlen $\gamma > 0$ ist, für welche $L(A; x^\gamma) = 0$. Nach dieser Ausdrucksweise wäre also z. B. die Dimension von $M(x^{-\alpha}; s)$ gleich $\frac{s+1}{\alpha}$

$\left(\text{für } \alpha > 1 + \frac{1}{s}\right)$. Der Satz 1 und die weiter unten angeführten Sätze 3 und 4 bilden unseren Beitrag zu der ersten, mengentheoretischen Frage.

Die andere, elementare Frage lautet — roh gesagt — folgendermaßen: Es sei s ganz, $s \geqq 1$; $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ seien zwei für $x \geqq 1$ positive Funktionen, $x^{-1-\frac{1}{s}} \geqq \omega_1(x) > \omega_2(x)$; gibt es dann s-gliedrige Systeme (schärfer: eigentliche Systeme), die zwar die Approximation $\omega_1(x)$, nicht aber die Approximation $\omega_2(x)$ zulassen? Für $s = 1$ liefert die Theorie der Kettenbrüche in sehr allgemeinen Fällen eine bejahende Antwort auf diese Frage[7]); dagegen aber scheint für $s > 1$ noch recht wenig darüber bekannt zu sein. Wir führen zunächst folgendes wichtige Resultat an, welches in einem Satz des Herrn O. Perron[8]) enthalten ist:

Zu jedem ganzen $s \geqq 1$ gibt es eine Zahl $c(s) > 0$, so daß es eigentliche s-gliedrige Systeme gibt, die zwar die Approximation $\frac{s}{s+1} x^{-1-\frac{1}{s}}$, nicht aber die Approximation $c(s) x^{-1-\frac{1}{s}}$ zulassen.

Auch der angeführte Satz des Herrn Khintchine gibt einen Beitrag zu diesem Problem: Es sei s ganz, $s \geqq 1$; $\omega_i(x)$ $(i = 1, 2)$ seien für $x \geqq 1$ stetig und positiv; $\omega_i^s(x) x^{s+1}$ sei abnehmend für $x \geqq 1$ und $\to 0$ für $x \to \infty$; weiter sei

$$\int_1^\infty \omega_1^s(x) x^s \, dx \quad \text{divergent,}$$

$$\int_1^\infty \omega_2^s(x) x^s \, dx \quad \text{konvergent.}$$

(Z. B. $\omega_1(x) = x^{-1-\frac{1}{s}} \log^{-\frac{1}{s}}(x+1)$; $\omega_2(x) = x^{-1-\frac{1}{s}} \log^{-\frac{2}{s}}(x+1)$);

dann gibt es eigentliche s-gliedrige Systeme, welche zwar die Approximation $\omega_1(x)$, nicht aber die Approximation $\omega_2(x)$ zulassen. Denn nach dem Khintchineschen Satz ist einerseits $L(M(\omega_1(x); s)) = 1$, also auch $L(M_e(\omega_1(x); s)) = 1$ (denn die uneigentlichen Systeme bilden offenbar eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null, nämlich eine Vereinigungsmenge von abzählbar vielen $(s-1)$-dimensionalen Hyperebenen); andererseits ist $L(M(\omega_2(x); s)) = 0$ — daraus folgt aber, daß es Punkte gibt, die zwar zu $M_e(\omega_1(x); s)$, nicht aber zu $M(\omega_2(x); s)$ gehören.

Wir wollen weiter (Satz 5) unsere Frage unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen beantworten; zunächst führen wir aber folgenden einfacheren Satz an:

---

[7]) Vgl. auch den § 8, Satz 6 und die Bemerkungen dazu.

[8]) Über diophantische Approximationen, Math. Annalen **83** (1921), S. 77—84. Vgl. auch Ph. Furtwängler, Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen, Math. Annalen **96** (1926), S. 169—175 und **99** (1928), S. 71—83; A. Scholz, Zur simultanen Approximation von Irrationalzahlen, Math. Annalen **103** (1930), S. 48—51.

Satz 2. *Es sei s ganz, $s \geqq 1$, $\alpha > 1 + \frac{1}{s}$. Dann gibt es eigentliche Systeme $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, welche zwar die Approximation $x^{-\alpha}$, aber keine Approximation $x^{-\beta}$ mit konstantem $\beta > \alpha$ zulassen.*

Dieser Satz folgt sofort aus Satz 1; wir haben nämlich nur zu zeigen, daß es Punkte gibt, die zwar in $M_e(x^{-\alpha}; s)$, aber in keiner Menge $M_e\left(x^{-\alpha-\frac{1}{n}}; s\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ liegen. Dies ist aber klar, da nach Satz 1

$$L\left(M_e(x^{-\alpha}; s); x^{\frac{s+1}{\alpha}}\right) = \infty,$$

$$L\left(\sum_{n=1}^{\infty} M_e\left(x^{-\alpha-\frac{1}{n}}; s\right); x^{\frac{s+1}{\alpha}}\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} L\left(M_e\left(x^{-\alpha-\frac{1}{n}}; s\right); x^{\frac{s+1}{\alpha}}\right) = 0.$$

Wir führen nun die Hauptsätze (Satz 3, 4, 5) an:

Satz 3. Voraussetzungen. *Es sei $s \geqq 1$, s ganz; $\omega(x)$ stetig, positiv und abnehmend für $x \geqq 1$; $f(x)$ stetig, positiv und wachsend für $x > 0$; $\omega(x) \to 0$ für $x \to \infty$; $f(x) \to 0$ für $x \to 0$;*

$$\int_1^{\infty} f(2\omega(x))\, x^s\, dx$$

konvergent.

Behauptung. $L(M(\omega(x); s); f(x)) = 0$. (*Also um so mehr* $L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = 0$.)

Satz 4. Voraussetzungen. *Es sei $s \geqq 1$, s ganz; $\omega(x)$ stetig und positiv für $x \geqq 1$; $\omega^s(x)\, x^{s+1}$ monoton*[9]) *für $x \geqq 1$;*

$$\int_1^{\infty} \omega^s(x)\, x^s\, dx$$

konvergent (also ist $\omega^s(x)\, x^{s+1} \to 0$, $\omega(x) \to 0$ für $x \to \infty$, $\omega^s(x)\, x^{s+1}$ nicht wachsend, $\omega(x)$ abnehmend für $x \geqq 1$).

Weiter sei $f(x)$ positiv, stetig und wachsend für $x > 0$; $f(x) \to 0$ für $x \to 0$; $\frac{f(x)}{x^s}$ monoton für $x > 0$; $f(2\omega(x))\, x^{s+1}$ monoton für $x \geqq 1$;

$$\int_1^{\infty} f(2\omega(x))\, x^s\, dx$$

divergent $\left(\text{also } \frac{f(2\omega(x))}{\omega^s(x)} \to \infty \text{ für } x \to \infty, \text{ d. h. } \frac{f(x)}{x^s} \to \infty \text{ für } x \to 0, \frac{f(x)}{x^s} \text{ nicht wachsend für } x > 0\right)$.

---

[9]) Das Wort „monoton" wird im schwächeren Sinn: nicht wachsend oder nicht abnehmend gebraucht.

Behauptung. $L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = \infty$ (*also um so mehr* $L(M(\omega(x); s); f(x)) = \infty$).

Der Satz 1 ist eine unmittelbare Folge der Sätze 3 und 4; es genügt, $\omega(x) = x^{-\alpha}$, $f(x) = x^{\gamma}$ zu setzen.

Satz 5. *Es sei* $s \geqq 1$, s *ganz*; $\omega(x)$ *sei stetig und positiv*, $\omega^s(x)x^{s+1}$ *monoton für* $x \geqq 1$;

$$\int_1^{\infty} \omega^s(x)x^s\,dx$$

sei konvergent.

$\lambda(x)$ *sei für* $x \geqq 1$ *definiert und habe für* $x \geqq 1$ *eine stetige Ableitung*[10]; *es sei* $\frac{\lambda(x)}{x}$ *monoton und* $\geqq 1$ *für* $x \geqq 1$, $\frac{\lambda(x)}{x} \to \infty$ *für* $x \to \infty$.

Behauptung. *Es gibt eigentliche s-gliedrige Systeme, welche zwar die Approximation* $\omega(x)$, *nicht aber die Approximation* $\omega(\lambda(x))$ *zulassen.*

Es wäre noch verschiedenes zu den Sätzen 3, 4, 5 zu bemerken; um aber den Gedankengang nicht zu unterbrechen, verschiebe ich diese Bemerkungen in die beiden letzten Paragraphen, wo sich auch noch ein Satz (Satz 6) befindet, der in gewissen Fällen den Satz 5 ersetzen kann.

Wir sollen also die Sätze 3, 4, 5 beweisen. Der Satz 3 ist fast trivial, der Satz 5 ist eine leichte Folge der Sätze 3 und 4. Die ganze Schwierigkeit liegt im Beweis des Satzes 4, dem die Paragraphen 3, 4, 5 gewidmet sind.

Ich habe im Falle $s = 1$ bereits einen Spezialfall der Sätze 3 und 4 bewiesen, nämlich den Satz:

$$L(M(x^{-\alpha}; 1); x^{\gamma}) = 0 \quad \text{für} \quad \gamma > \frac{2}{\alpha},$$

$$L(M(x^{-\alpha}; 1); x^{\gamma}) = \infty \quad \text{für} \quad 0 < \gamma < \frac{2}{\alpha}$$

$$(\alpha > 2).^{11})$$

Der heutige Beweis des Satzes 4 ist mit dem damaligen Beweis verwandt, ist aber wesentlich komplizierter. Dies hat seinen Grund einerseits in der Willkürlichkeit der Funktionen $f(x)$, $\omega(x)$, hauptsächlich aber in den Schwierigkeiten, die im Fall $s > 1$ auftreten. Die wichtigsten Punkte des Beweises sind der Hilfssatz 3, der einem Hilfssatz des Herrn Khintchine[12]) nachgebildet ist, dann der Übergang von den Überdeckungssystemen zu Systemen, die ich „Überschlagungssysteme" nenne, und endlich der Hilfssatz 6.

---

[10]) Für $x = 1$ meine ich die rechtsseitige Ableitung.

[11]) Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Maß, Recueil mathématique de la Société mathématique de Moscou (im Druck).

[12]) A. a. O. [3]), Hilfssatz 3.

§ 2.

Beweis des Satzes 3.

Es seien die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt. Für ganzes $q > 1$ ist dann

$$f(2\omega(q))\,q^s \leqq 2^s f(2\omega(q))\,(q-1)^s \leqq 2^s \int_{q-1}^{q} f(2\omega(x))\,x^s\,dx;$$

also ist

$$\sum_{q=1}^{\infty} f(2\omega(q))\,q^s$$

konvergent.

Es sei $\varepsilon > 0$, $\varrho > 0$. Wir wählen eine ganze Zahl $Q > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\omega(Q) < 1, \quad 2\omega(Q) < \varrho, \quad \sum_{q=Q}^{\infty} f(2\omega(q))\,q^s < \frac{\varepsilon}{3^s}.$$

Jeder Punkt von $M(\omega(x); s)$ muß in einem s-dimensionalen Würfel $W(P)$ enthalten sein, dessen Mittelpunkt P die Koordinaten

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q} \qquad (p_1, p_2, \ldots, p_s, q \text{ ganz}, q \geqq Q) \tag{1}$$

hat und dessen Kante $2\omega(q)$ ist. Weil $M(\omega(x); s)$ im abgeschlossenen Einheitswürfel liegt und $\omega(q) < 1$ für $q \geqq Q$, so kommen nur diejenigen $W(P)$ in Betracht, deren Mittelpunktkoordinaten (1) den Ungleichungen

$$-1 < \frac{p_i}{q} < 2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{2}$$

genügen; die Anzahl derartiger Würfel bei festem q ist $(3q-1)^s$. Bilden wir also alle Würfel $W(P)$, wo P die Koordinaten (1) mit der Nebenbedingung (2) hat, so überdeckt ihre Gesamtheit der Menge $M(\omega(x); s)$. Da ihre Kanten kleiner als ϱ sind, so ist also

$$L_\varrho(M(\omega(x); s); f(x)) \leqq \sum_{q=Q}^{\infty} f(2\omega(q))\,(3q-1)^s < \varepsilon;$$

da aber ε und ϱ zwei beliebige positive Zahlen sind, so ist damit gezeigt, daß

$$L(M(\omega(x); s); f(x)) = 0,$$

w. z. b. w.

§ 3.

Zurückführung des Satzes 4 auf einen einfacheren Satz.

Hilfssatz 1. *Für $x \geqq 1$ seien $u(x)$, $l(x)$ stetig; weiter sei $u(x) > 0$, $u(x)\,x$ monoton, $l(x) \to 0$ für $x \to \infty$, $\int_1^\infty u(x)\,dx$ konvergent (also $u(x)\,x \to 0$ für $x \to \infty$, $u(x) \cdot x$ nicht wachsend).*

Dann gibt es eine für $x \geqq 1$ stetige und positive Funktion $v(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\frac{v(x)}{u(x)}$, $v(x)x$ *sind monoton für* $x \geqq 1$.
2. $v(x)x \to 0$ *für* $x \to \infty$ (*also ist* $v(x) \cdot x$ *nicht wachsend*).
3. $\int_1^\infty v(x)\,dx$ *divergiert* (*also ist* $\frac{v(x)}{u(x)}$ *nicht abnehmend,* $\frac{v(x)}{u(x)} \to \infty$ *für* $x \to \infty$).
4. $\int_1^\infty v(x)\,l(x)\,dx$ *konvergiert.*

Beweis. Wir wählen eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(1 < x_1 < x_2 < \ldots)$, so daß

$$x_n > e^{n^2}, \quad |l(x)| \leqq \frac{1}{2^n} \text{ für } x \geqq x_n.$$

Wir führen folgende Bezeichnung ein: Wenn $f(x)$ eine für $x \geqq 1$ stetige Funktion ist, die für $x \geqq \beta$ $(\beta \geqq 1)$ mit $c\,u(x)$ zusammenfällt, wo $c > 0$ von x unabhängig ist, so werde für $b \geqq a \geqq \beta$ mit $f(x; a, b)$ folgende Funktion von x bezeichnet:

$$f(x; a, b) = f(x) \quad \text{für } 1 \leqq x \leqq a,$$
$$f(x; a, b) = \frac{c_1}{x} \quad \text{für } a \leqq x \leqq b,$$
$$f(x; a, b) = c_2\,u(x) \quad \text{für } x \geqq b,$$

wo c_1, c_2 Konstanten sind; also ist

$$c\,u(a) = \frac{c_1}{a}, \qquad \text{d. h. } c_1 = c\,a\,u(a) = a\,f(a) > 0,$$
$$\frac{c_1}{b} = c_2\,u(b), \text{ d. h. } c_2 = c\,\frac{a\,u(a)}{b\,u(b)} > 0.$$

$f(x; a, b)$ ist offenbar stetig für $x \geqq 1$; weiter ist

$$f(x; a, b) = f(x) \text{ für } 1 \leqq x \leqq a,$$
$$f(x; a, b) = c\,\frac{a\,u(a)}{x} \geqq c\,u(x) = f(x) \text{ für } a \leqq x \leqq b,$$
$$f(x; a, b) = c\,\frac{a\,u(a)}{b\,u(b)}\,u(x) \geqq c\,u(x) = f(x) \text{ für } x \geqq b,$$

also

$$f(x; a, b) \geqq f(x) \text{ für } x \geqq 1.$$

Endlich ist

$$k_{a,b} = \int_1^\infty f(x; a, b)\,dx = \int_1^a f(x)\,dx + c\,a\,u(a) \log\frac{b}{a} + \frac{a\,u(a)}{b\,u(b)} \int_b^\infty f(x)\,dx;$$

also ist, bei festem a, $k_{a,b}$ eine stetige Funktion von b für $b \geqq a$, und zwar ist

$$k_{a,a} = \int_1^\infty f(x)\,dx, \qquad k_{a,b} \to \infty \text{ für } b \to \infty.$$

Wir bilden nun eine Folge von $v_1(x), v_2(x), \ldots$ folgendermaßen: Es se
$\int_1^\infty u(x)\,dx = A > 0$; dann sei: $a_1 = b_1 = 1$, $v_1(x) = u(x) = u(x; a_1, b_1)$
$v_2(x) = v_1(x; a_2, b_2)$, wo $a_2 = \max(b_1, x_1)$ und $b_2 > a_2$ so gewählt wird
daß $\int_1^\infty v_2(x)\,dx = \int_1^\infty v_1(x; a_2, b_2)\,dx = 2A$; und allgemein $(n \geqq 2)$ se
$v_n(x) = v_{n-1}(x; a_n, b_n)$, wo $a_n = \max(b_{n-1}, x_{n-1})$ und $b_n > a_n$ so ge
wählt wird, daß

$$\int_1^\infty v_n(x)\,dx = \int_1^\infty v_{n-1}(x; a_n, b_n)\,dx = nA.$$

Es ist $a_{n+1} \geqq x_n > e^{n^2}$ und für $m > n$ ist $v_m(x) \geqq v_n(x)$ für $x \geqq 1$, und
zwar $v_m(x) = v_n(x)$ für $1 \leqq x \leqq a_{n+1}$. Also existiert $\lim_{n=\infty} v_n(x) = v(x)$
und zwar ist $v(x)$ positiv und stetig für $x \geqq 1$ und $\int_1^\infty v(x)\,dx$ ist divergent

Ich behaupte: $\frac{v(x)}{u(x)}$ ist nicht abnehmend, $v(x)\,x$ nicht wachsend für
$x \geqq 1$. Denn für $a_n \leqq x \leqq b_n$ ist $v(x) = v_n(x) = \frac{\alpha}{x}$, wo α eine positive
Konstante ist, also

$$\frac{v(x)}{u(x)} = \frac{\alpha}{x\,u(x)}, \qquad v(x)\,x = \alpha;$$

ebenso für $b_n \leqq x \leqq a_{n+1}$ ist $v(x) = v_n(x) = \alpha\,u(x)$, wo α wiederum eine
positive Konstante ist, also

$$\frac{v(x)}{u(x)} = \alpha, \qquad v(x)\,x = \alpha\,u(x)\,x.$$

Weiter ist $v(x)\,x \to 0$ für $x \to \infty$, denn aus $v(x)\,x \to t$ $(0 < t \leqq \infty)$
würde folgen

$$\int_1^{a_{n+1}} v_n(x)\,dx = \int_1^{a_{n+1}} v(x)\,dx = \Omega \int_1^{a_{n+1}} \frac{dx}{x} = \Omega(\log a_{n+1}) = \Omega(n^2),$$

im Widerspruch gegen

$$\int_1^{a_{n+1}} v_n(x)\,dx < \int_1^\infty v_n(x)\,dx = nA.$$

Endlich ist $\int_1^\infty v(x)\,l(x)\,dx$ konvergent, da

$$\int_1^{a_{n+1}} v(x)|l(x)|\,dx = \int_{a_1}^{a_2} v_1(x)|l(x)|\,dx + \int_{a_2}^{a_3} v_2(x)|l(x)|\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{a_{n+1}} v_n(x)|l(x)|$$

$$\leqq \int_{a_1}^{a_2} v_1(x)|l(x)|\,dx + A\left(\frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}}\right).$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir wollen nun den Satz 4 auf den folgenden einfacheren Satz 7 zurückführen:

Satz 7. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 4 erfüllt; dazu sei noch*

$$f(2\omega(x))\,x^{s+1} \to 0 \quad \textit{für} \quad x \to \infty;$$

dann ist

$$L(M_s(\omega(x); s); f(x)) = \infty.$$

Wir sollen zeigen, daß Satz 4 aus Satz 7 folgt; es sei also der Satz 7 wahr und die Voraussetzungen des Satzes 4 seien erfüllt; dann existiert

$$\lim_{x=\infty} f(2\omega(x))\,x^{s+1} = t \qquad (0 \leqq t \leqq \infty). \tag{3}$$

Wenn $t = 0$, so ist nichts zu beweisen; es sei also $t > 0$. Wir setzen im Hilfssatz 1

$$u(x) = \omega^s(x)\,x^s, \qquad l(x) = \frac{1}{x}$$

und bekommen eine Funktion $v(x)$ mit den im Hilfssatz 1 angegebenen Eigenschaften.

Es sei $\tau(x)$ die zu $2\omega(x)$ inverse Funktion; also ist $\tau(x)$ für $0 < x \leqq 2\omega(1)$ definiert, stetig und abnehmend, $\tau(2\omega(1)) = 1$, $\tau(x) \to \infty$ für $x \to 0$. Wir setzen nun

$$f_1(x) = \frac{v(\tau(x))}{\tau^s(x)} \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq 2\omega(1),$$

$$f_1(x) = c\,x^s \qquad \text{für} \quad x \geqq 2\omega(1) \qquad (c \text{ konstant}).$$

Dann ist $f_1(x)$ für $x > 0$ stetig und positiv; für $x \geqq 2\omega(1)$ ist $f_1(x)$ wachsend. Aber auch für $0 < x \leqq 2\omega(1)$ ist $f_1(x)$ wachsend. Denn es ist, $\tau(x) = y$ gesetzt, für $0 < x \leqq 2\omega(1)$

$$f_1(x) = \frac{v(y)}{y^s} = \frac{v(y)\,y}{y^{s+1}}$$

und $v(y)\,y$ ist nicht wachsend, also ist $\frac{v(y)\,y}{y^{s+1}}$ abnehmend, wenn y wächst, d. h. wenn $x = 2\omega(y)$ abnimmt. Für $x \to 0$, d. h. für $y \to \infty$, ist $v(y)\,y \to 0$, also um so mehr $f_1(x) \to 0$.

Weiter ist $\frac{f_1(x)}{x^s}$ für $x \geqq 2\omega(1)$ nicht wachsend; dasselbe gilt aber auch für $0 < x \leqq 2\omega(1)$, denn dort ist $(\tau(x) = y)$

$$\frac{f_1(x)}{x^s} = \frac{v(y)}{2^s\omega^s(y)\,y^s} = \frac{v(y)}{2^s u(y)}.$$

Weiter ist für $x \geqq 1$

$$f_1(2\omega(x))\,x^{s+1} = \frac{v(x)}{x^s}\,x^{s+1} = v(x)\cdot x$$

monoton, und zwar

$$f_1(2\omega(x))\,x^{s+1} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty. \tag{3a}$$

Endlich ist

$$\int_1^\infty f_1(2\omega(x))\,x^s\,dx = \int_1^\infty v(x)\,dx$$

divergent; nach Satz 7 ist also

$$L(M_e(\omega(x); s); f_1(x)) = \infty;$$

nach (3), (3a) ist (wegen $t > 0$)

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} \to \infty \quad \text{für} \quad x \to 0,$$

also ist um so mehr

$$L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = \infty,$$

w. z. b. w.

Wir wollen nun den Satz 7 noch weiter auf einen einfacheren Satz zurückführen, nämlich auf den folgenden

Satz 8. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 4 erfüllt; dazu sei noch*

(4) $$f(2\omega(x))\,x^{s+1} \to 0 \quad \textit{für} \quad x \to \infty;$$

dann ist

$$L(M(\omega(x); s); f(x)) = \infty.$$

Es sei also der Satz 8 wahr; die Voraussetzungen des Satzes 7 (d. h. die Voraussetzungen des Satzes 8) seien erfüllt; dann ist also $L(M(\omega(x); s); f(x)) = \infty$ und wir sollen noch $L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = \infty$ beweisen. Es sei $M_u(\omega(x); s)$ die Menge aller uneigentlichen Systeme aus $M(\omega(x); s)$; wegen

$$L(M(\omega(x); s); f(x)) \leqq L(M_e(\omega(x); s); f(x)) + L(M_u(\omega(x); s); f(x))$$

genügt es, wenn wir

(5) $$L(M_u(\omega(x); s); f(x)) = 0$$

beweisen.

Für $s = 1$ sind die uneigentlichen Systeme mit rationalen Zahlen identisch, also ist $M_u(\omega(x); s)$ höchstens abzählbar und (5) ist trivial. Es sei also $s > 1$. Wir wählen irgendein System von $s+1$ ganzen Zahlen $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_s$ mit $k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_s^2 > 0$ und bezeichnen mit $M(k_0, k_1, \ldots, k_s)$ die Menge aller Systeme $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ aus $M(\omega(x); s)$, welche der Gleichung

$$k_0 + \sum_{i=1}^{s} k_i \theta_i = 0$$

genügen. Offenbar ist $M_u(\omega(x); s)$ die Vereinigungsmenge der abzählbar vielen Mengen $M(k_0, k_1, \ldots, k_s)$; es genügt daher,

(5a) $$L(M(k_0, k_1, \ldots, k_s); f(x)) = 0$$

zu beweisen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei etwa $k_s \neq 0$. Es sei

$$t = \frac{s-1}{|k_s|} \operatorname{Max}(|k_1|, |k_2|, \ldots, |k_s|),$$

also $t \geqq 1$. Wenn ein System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ zu $M(k_0, k_1, \ldots, k_s)$ gehört, so läßt dieses System, also um so mehr das System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1})$ die Approximation $\omega(x)$ zu, also gehört $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1})$ zu $M(\omega(x); s-1)$.

Nun ist wegen (4) das Integral

$$\int_1^\infty f(2\omega(x))\, x^{s-1}\, dx$$

konvergent, also ist nach Satz 3

$$L(M(\omega(x); s-1); f(x)) = 0. \tag{6}$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$, $\varrho > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon t^{-s}$, $\varrho_1 = \frac{\varrho}{t}$.

Wegen (6) läßt sich ein höchstens abzählbares System $\mathfrak{S}$ von $(s-1)$-dimensionalen Würfeln $W_1, W_2, \ldots$ finden, deren Kanten $2d_1, 2d_2, \ldots$ sämtlich kleiner als ϱ_1 sind, so daß $\mathfrak{S}$ die Menge $M(\omega(x), s-1)$ überdeckt und $\sum_i f(2d_i) < \varepsilon_1$ ist. Wir bilden nun ein System $\mathfrak{S}'$ von s-dimensionalen Würfeln $W_1', W_2', \ldots$ nach folgender Vorschrift: Es sei $(t_{1,i}, t_{2,i}, \ldots, t_{s-1,i})$ der Mittelpunkt von W_i; dann habe W_i' den Mittelpunkt $(t_{1,i}, t_{2,i}, \ldots, t_{s-1,i}, t_{s,i})$, wo $t_{s,i} = \frac{-1}{k_s}\left(k_0 + \sum_{n=1}^{s-1} k_n t_{n,i}\right)$ und die Kante $2td_i$ (es ist $2td_i < t\varrho_1 = \varrho$). Weil $\frac{f(x)}{x^s}$ für $x > 0$ monoton ist und weil $\int_1^\infty 2^s \omega^s(x) x^s dx$ konvergiert und $\int_1^\infty f(2\omega(x)) x^s dx$ divergiert, so ist notwendig $\frac{f(x)}{x^s} \to \infty$ für $x \to 0$, also $\frac{f(x)}{x^s}$ nicht wachsend; also ist (wegen $t \geqq 1$) $f(tx) \leqq t^s f(x)$ für $x > 0$, also

$$\sum_i f(2td_i) \leqq t^s \sum_i f(2d_i) < t^s \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Endlich behaupte ich, daß $\mathfrak{S}'$ die Menge $M(k_0, k_1, \ldots, k_s)$ überdeckt. Es sei nämlich $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ein Punkt aus $M(k_0, k_1, \ldots, k_s)$; dann ist

$$\theta_s = -\frac{1}{k_s}\left(k_0 + \sum_{n=1}^{s-1} k_n \theta_n\right)$$

und der Punkt $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s-1})$ liegt in $M(\omega(x); s-1)$; also liegt er in einem Würfel W_i aus $\mathfrak{S}$, also ist

$$|\theta_n - t_{n,i}| < d_i \leqq t d_i \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots, s-1;$$

daraus folgt aber

$$|\theta_s - t_{s,i}| = \left| \frac{\sum_{n=1}^{s-1} k_n (\theta_n - t_{n,i})}{k_s} \right| < t\, d_i;$$

also liegt $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ in W_i', w. z. b. w. Wegen der Willkürlichkeit der positiven Zahlen ϱ und ε ist damit (5a) bewiesen.

§ 4.

Hilfssätze.

Für ganzes $k > 0$ sei $\varphi(k)$ die Eulersche Funktion, d. h. die Anzahl derjenigen unter den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, k-1$, die zu k teilerfremd sind. Wenn $\varphi(k) > \frac{k}{8}$, so heiße die Zahl k „normal".

Hilfssatz 2. *Es gibt eine ganze positive Zahl c_1, so daß für jedes ganze $n \geqq c_1$ sich unter den Zahlen $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$ mindestens $\frac{n}{5}$ normale Zahlen befinden.*

Beweis. Bekanntlich ist[13])

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \log n);$$

wegen $\frac{1}{4} < \frac{3}{\pi^2} < \frac{1}{3}$ gibt es also eine ganze Zahl $c_1 > 0$, so daß für jedes ganze $n \geqq c_1$ gilt

$$\frac{1}{4} n^2 < \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(k) < \frac{1}{3} n^2,$$

also auch

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \varphi(k) > \frac{1}{4}(2n)^2 - \frac{1}{3} n^2 = \frac{2}{3} n^2. \tag{7}$$

Wäre nun die Behauptung für ein ganzes $n \geqq c_1$ falsch, so wäre (wegen $\varphi(k) \leqq k$)

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \varphi(k) < \frac{n}{5} \cdot 2n + \frac{1}{8} \cdot 2n \cdot n = \frac{13}{20} n^2 < \frac{2}{3} n^2,$$

im Widerspruch zu (7).

Hilfssatz 3. Voraussetzungen. *Es sei $s \geqq 1$, s ganz; $F(x)$ sei für $x \geqq 1$ positiv und stetig; $F(x) \cdot x^{s+1}$ sei für $x \geqq 1$ monoton. Weiter sei*

$$F(x) \cdot x^{s+1} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

(also $F(x) \cdot x^{s+1}$ nicht wachsend für $x \geqq 1$),

$$\sum_{q=1}^{\infty} F(q)\, q^s \quad \text{divergent.}$$

---

[13]) F. Mertens, Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 77 (1874), S. 289–338, insbes. S. 289–291.

Endlich sei

$$\text{entweder } \mathfrak{q} = 1$$
$$\text{oder } \mathfrak{q} \text{ eine Primzahl, } \mathfrak{q} > 32.$$

Behauptung. *Zu jeder ganzen Zahl* $\beta > 0$ *und zu jedem System* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ *von* s *ganzen Zahlen gibt es eine endliche Menge* A *von untereinander verschiedenen* s*-gliedrigen Systemen von rationalen Zahlen*

(8) $$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}$$ [14])

mit folgenden Eigenschaften:

1. $q \geqq \beta \mathfrak{q}$; $\quad \frac{\alpha_i}{\mathfrak{q}} \leqq \frac{p_i}{q} < \frac{\alpha_i + 1}{\mathfrak{q}}$; $\quad (p_i, q) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$.

2. *Für je zwei verschiedene Systeme*[15])

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}, \qquad \frac{p_1'}{q'}, \frac{p_2'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}$$

der Menge A *gilt mindestens eine von den* s *Ungleichungen* $(i = 1, 2, \ldots, s)$

$$\left| \frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'} \right| > \frac{1}{2} F^{1/s}(q) + \frac{1}{2} F^{1/s}(q').$$

3. $$\sum_A F(q) > \lambda \frac{1}{\mathfrak{q}^s},$$

wo (wie auch stets im folgenden)[16])

$$\lambda = \frac{1}{60 \cdot 2^s \cdot 32^{2s}}.$$

(Dabei wird über alle Systeme (8) aus A summiert; wenn also für jedes ganze $q > 0$ die Anzahl derjenigen Systeme (8) aus A, die q im Nenner haben, mit $a(q)$ bezeichnet wird, so ist

$$\sum_A F(q) = \sum_{q=1}^{\infty} a(q) F(q).)$$

---

[14]) Zwei solche Systeme $\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}; \frac{p_1'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}$ sollen als verschieden gelten, wenn mindestens eine von den s Ungleichungen $\frac{p_i}{q} \neq \frac{p_i'}{q'}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ erfüllt ist.

[15]) Wenn ich in diesem oder im folgenden Paragraphen ein System von s rationalen Zahlen mit $\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}$ oder mit $\frac{p_1'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}$ bezeichne, verstehe ich darunter, daß $q > 0$, $(p_i, q) = 1$ bzw. $q' > 0$, $(p_i', q') = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Es kommen nur solche Systeme vor, die eine solche Darstellung zulassen.

[16]) Der Punkt bedeutet stets das Multiplikationszeichen; $60 \cdot 2^s$ bedeutet also 60 mal 2^s und nicht $\left(\frac{602}{10}\right)^s$.

Beweis. s, $F(x)$, $\mathfrak{q}$, β, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ seien gemäß den Voraussetzungen gegeben; c_1 sei die Konstante aus Hilfssatz 2. Wir wählen eine ganze Zahl b so groß, daß

$$b > c_1, \quad b \geqq \mathfrak{q}, \quad b \geqq \beta, \tag{9}$$

$$F(x)\, x^{s+1} < \frac{1}{8 \cdot 32^s} \quad \text{für} \quad x \geqq b\mathfrak{q}. \tag{10}$$

Nun bilden wir die Menge B aller Systeme

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}, \tag{8}$$

wo

$$q = \mathfrak{q}\bar{q}, \quad \bar{q} \text{ ganz}, \quad \bar{q} \geqq b, \tag{11}$$

$$\alpha_i \bar{q} \leqq p_i < (\alpha_i + 1)\bar{q}; \quad (p_i, q) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{12}$$

Diese Systeme erfüllen die Forderung 1 der Behauptung. Für ein festes $q = \bar{q}\mathfrak{q}$ und ein festes i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ ist die Anzahl der Zahlen p_i, die den Bedingungen (12) genügen, für $\mathfrak{q} = 1$ gleich $\varphi(\bar{q})$, sonst mindestens gleich $\varphi(\bar{q}) - \frac{\bar{q}}{16}$ $\left(\text{denn die Anzahl der durch } \mathfrak{q} \text{ teilbaren Zahlen unter } \bar{q} \text{ konsekutiven ist wegen } \bar{q} \geqq b \geqq \mathfrak{q} > 32 \text{ höchstens } \frac{\bar{q}}{\mathfrak{q}} + 1 \leqq 2\frac{\bar{q}}{\mathfrak{q}} < \frac{\bar{q}}{16}\right)$. Jedenfalls ist also diese Anzahl größer als $\frac{\bar{q}}{16}$, wenn $\bar{q}$ normal ist. Daher ist die Anzahl derjenigen Systeme aus B, die in der Darstellung (8) bei gegebenem $q = \bar{q}\mathfrak{q}$ ($\bar{q}$ ganz, $\bar{q} \geqq b$) im Nenner eben diese Zahl q haben, größer als

$$\frac{\bar{q}^s}{16^s}, \tag{13}$$

wenn $\bar{q}$ normal ist.

Wir greifen nun aus B eine Teilmenge C folgendermaßen heraus: Wenn (8) ein System aus B ist (für welches also (11), (12) gilt), so rechnen wir (8) dann und nur dann *nicht* zu C, wenn es in B ein System

$$\frac{p_1'}{q'}, \frac{p_2'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}$$

mit $q' < q$ gibt, welches die s Ungleichungen

$$\left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| \leqq \frac{1}{2} F^{1/s}(q) + \frac{1}{2} F^{1/s}(q') \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{14}$$

erfüllt. Jede Teilmenge von C erfüllt auch die Forderung 2 der Behauptung; denn wenn

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}; \qquad \frac{p_1'}{q'}, \frac{p_2'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}$$

zwei verschiedene Systeme aus C sind, so ist für $q \neq q'$ die Forderung 2 nach der Definition von C trivialerweise erfüllt (aus Symmetriegründen

darf man $q' < q$ annehmen); wenn aber $q = q'$, so ist $p_i \neq p_i'$ für mindestens ein i, also (nach (10))

$$\left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| \geqq \frac{1}{q} > \sqrt[s]{8} \cdot 32 F^{1/s}(q) q^{1/s} > \frac{1}{2} F^{1/s}(q) + \frac{1}{2} F^{1/s}(q').$$

Es sei nun t_q bei gegebenem q ($q = \bar{q}\mathfrak{q} \geqq b\mathfrak{q}$, $\bar{q}$ ganz) die Anzahl derjenigen Systeme (8) mit dem Nenner q, die bei dem Übergang von B zu C weggelassen werden. Wir wählen noch eine Zahl $q' = \bar{q}'\mathfrak{q}$ ($\bar{q}'$ ganz, $b \leqq \bar{q}' < \bar{q}$) [17]) und eine ganze Zahl i ($1 \leqq i \leqq s$) und bezeichnen mit $w(i, q', q)$ die Anzahl derjenigen Zahlen p_i mit $(p_i, q) = 1$, $\alpha_i \bar{q} \leqq p_i < (\alpha_i + 1)\bar{q}$, für welche die i-te Ungleichung (14) durch eine geeignete Zahl p_i' mit $(p_i', q') = 1$ erfüllt wird. Dann ist offenbar

$$t_q \leqq \sum_{\bar{q}'=b}^{\bar{q}-1} w(1, q', q)\, w(2, q', q) \ldots w(s, q', q) \tag{15}$$

$$\left(\sum_{m}^{m-1} \text{ soll stets Null bedeuten}\right).$$

Aus (14) folgt wegen $q = \bar{q}\mathfrak{q}$, $q' = \bar{q}'\mathfrak{q}$, $q' < q$

$$|p_i \bar{q}' - p_i' \bar{q}| < F^{1/s}(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}\, \bar{q}'\mathfrak{q}.$$

Es sei $(\bar{q}, \bar{q}') = d$; der Ausdruck $p_i \bar{q}' - p_i' \bar{q}$ soll also gleich $a\,d$ sein, wo

$$a \text{ ganz}, \quad |a| < \frac{F^{1/s}(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}\, \bar{q}'\mathfrak{q}}{d}, \quad a \neq 0$$

(denn $p_i \bar{q}' - p_i' \bar{q} = 0$, d. h. $\frac{p_i}{\bar{q}} = \frac{p_i'}{\bar{q}'}$ ist wegen $(p_i, \bar{q}) = 1$, $(p_i', \bar{q}') = 1$, $0 < \bar{q}' < \bar{q}$ ausgeschlossen). Dies gibt höchstens

$$2\left[\frac{F^{1/s}(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}\, \bar{q}'\mathfrak{q}}{d}\right]$$

Möglichkeiten für a. Soll aber $p_i \bar{q}' - p_i' \bar{q} = a\,d$ sein, wo a fest gewählt ist, so muß p_i die Kongruenz

$$p_i \frac{\bar{q}'}{d} \equiv a \left(\mathrm{mod}\, \frac{\bar{q}}{d}\right)$$

erfüllen; und diese Kongruenz hat im Intervall $\alpha_i \bar{q} \leqq p_i < (\alpha_i + 1)\bar{q}$ genau d Lösungen. Also ist

$$w(i, q', q) \leqq 2d\left[\frac{F^{1/s}(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}\, \bar{q}'\mathfrak{q}}{d}\right] \leqq 2 F^{1/s}(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}\, \bar{q}'\mathfrak{q};$$

also ist nach (15)

$$t_q \leqq 2^s \bar{q}^s \sum_{\bar{q}'=b}^{\bar{q}-1} F(\bar{q}'\mathfrak{q})\, \bar{q}'^s \mathfrak{q}^s. \tag{16}$$

---

[17]) Für $\bar{q} = b$ ist offenbar $t_q = 0$.

Weil $F(x)x^s$ für $x \geqq 1$ abnimmt, so ist

$$F(\bar{q}'q)\bar{q}'^s q^s \geqq \frac{1}{q}\sum_{q=\bar{q}'q}^{\bar{q}'q+q-1} F(q)q^s;$$

also ist die Reihe

$$\sum_{\bar{q}'=1}^{\infty} F(\bar{q}'q)\bar{q}'^s q^s$$

divergent. Wir können daher eine ganze Zahl $b' \geqq b$ wählen, so daß

$$\sum_{\bar{q}'=b}^{b'} F(\bar{q}'q)\bar{q}'^s q^s \geqq \frac{1}{2\cdot 32^s} > \sum_{\bar{q}'=b}^{b'-1} F(\bar{q}'q)\bar{q}'^s q^s. \tag{17}$$

Wegen (10) ist $b' \geqq 4b$, denn

$$\sum_{\bar{q}'=b}^{4b-1} F(\bar{q}'q)\bar{q}'^s q^s < \frac{1}{8\cdot 32^s}\sum_{\bar{q}'=b}^{4b-1}\frac{1}{\bar{q}'q} < \frac{1}{2\cdot 32^s}.$$

Wir wählen nun für A die Menge aller derjenigen Systeme (8) aus C, für welche $bq \leqq q \leqq b'q$. Die Anzahl $a(q)$ aller Systeme (8) aus A, die im Nenner die Zahl q haben ($q = \bar{q}q$, $\bar{q}$ ganz, $b \leqq \bar{q} \leqq b'$), ist nach (13), (16), (17) größer als

$$\frac{\bar{q}^s}{16^s} - 2^s\bar{q}^s\sum_{\bar{q}'=b}^{\bar{q}-1} F(\bar{q}'q)\bar{q}'^s q^s > \frac{\bar{q}^s}{2\cdot 16^s},$$

falls $\bar{q}$ normal ist. Daher ist

$$\sum_A F(q) = \sum_{q=1}^{\infty} a(q)F(q) \geqq \frac{1}{2\cdot 16^s}\sum_{\bar{q}=b}^{b'}{}' F(\bar{q}q)\bar{q}^s;$$

dabei soll der Strich in der letzten Summe (und auch im folgenden) andeuten, daß nur über normale $\bar{q}$ summiert wird.

Wir wählen ein ganzes r so, daß $2^r b - 1 \leqq b' < 2^{r+1}b - 1$; es ist $r \geqq 2$. Für ganzes $t \geqq 0$ ist nach Hilfssatz 2 (da $b > c_1$)

$$\sum_{\bar{q}=2^t b}^{2^{t+1}b-1}{}' F(\bar{q}q)\bar{q}^s \geqq F(2^{t+1}bq)(2^t b)^s\frac{1}{5}2^t b \geqq \frac{1}{5\cdot 2^{2s+1}}\sum_{\bar{q}=2^{t+1}b}^{2^{t+2}b-1} F(\bar{q}q)\bar{q}^s.$$

Also ist (man beachte (17) und (10))

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\cdot 16^s}\sum_{\bar{q}=b}^{b'}{}' F(\bar{q}q)\bar{q}^s &\geqq \frac{1}{5\cdot 2^{2s+2}\cdot 16^s}\sum_{\bar{q}=2b}^{2^{r+1}b-1} F(\bar{q}q)\bar{q}^s \\ &\geqq \frac{1}{5\cdot 2^{2s+2}\cdot 16^s}\frac{1}{q^s}\left(\sum_{\bar{q}=b}^{b'} F(\bar{q}q)\bar{q}^s q^s - \sum_{\bar{q}=b}^{2b-1} F(\bar{q}q)\bar{q}^s q^s\right) \\ &\geqq \frac{1}{5\cdot 4\cdot 2^{2s}\cdot 16^s}\cdot\frac{1}{q^s}\left(\frac{1}{2\cdot 32^s} - \frac{1}{8\cdot 32^s}\right) > \frac{1}{60\cdot 2^s\cdot 32^{2s}\cdot q^s},\end{aligned}$$

w. z. b. w.

§ 5.

Beweis des Satzes 8.

In diesem Beweise liegt die Hauptschwierigkeit. Wir schreiben den Satz 8 noch einmal ausführlich auf:

Satz 8. Voraussetzungen. *Es sei* $s \geqq 1$, s *ganz*; $\omega(x)$ *sei stetig und positiv für* $x \geqq 1$; $\omega^s(x)x^{s+1}$ *sei monoton für* $x \geqq 1$;

$$\int_1^\infty \omega^s(x)x^s\,dx$$

sei konvergent (also ist $\omega^s(x)x^{s+1} \to 0$ *für* $x \to \infty$, $\omega^s(x)x^{s+1}$ *nicht wachsend,* $\omega(x)$ *abnehmend für* $x \geqq 1$*).*

Weiter sei $f(x)$ *positiv, stetig und wachsend für* $x > 0$; $f(x) \to 0$ *für* $x \to 0$; $\frac{f(x)}{x^s}$ *monoton für* $x > 0$, $f(2\omega(x))x^{s+1}$ *monoton für* $x \geqq 1$; $f(2\omega(x))x^{s+1} \to 0$ *für* $x \to \infty$ *(also ist* $f(2\omega(x))x^{s+1}$ *nicht wachsend für* $x \geqq 1$*); endlich sei*

$$\int_1^\infty f(2\omega(x))x^s\,dx \tag{18}$$

divergent $\left(\text{also } \frac{f(x)}{x^s} \to \infty \text{ für } x \to 0,\ \frac{f(x)}{x^s} \text{ nicht wachsend für } x > 0\right)$.

Behauptung. $L(M(\omega(x); s); f(x)) = \infty$.

Wir bemerken zunächst, daß aus der Monotonie von $f(2\omega(x))x^s$ und der Divergenz von (18) bekanntlich auch die Divergenz der Reihe

$$\sum_{q=1}^\infty f(2\omega(q))q^s \tag{19}$$

folgt.

Wir werden im folgenden zeigen: Wenn die Voraussetzungen des Satzes 8 erfüllt sind, so läßt sich zu jedem $\eta > 0$ eine perfekte Teilmenge

$$N = N(\eta, \omega(x), s, f(x))$$

von $M(\omega(x), s)$ konstruieren, so daß

$$L(N; f(x)) \geqq \eta.$$

Damit wird offenbar der Satz 8 bewiesen sein.

Es seien also s, $\omega(x)$, $f(x)$ gemäß den Voraussetzungen des Satzes 8 gegeben und es sei η eine positive Zahl. Wir deuten die Menge $M(\omega(x); s)$ als eine Punktmenge in einem kartesischen Raume R_s (wobei jedem reellen System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ der Punkt mit den Koordinaten $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ entsprechen soll). Unter einem Würfel werden wir in diesem Paragraphen stets einen Würfel in R_s verstehen, dessen Kanten mit den Koordinatenachsen parallel sind, und zwar, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt

wird, einen offenen Würfel. Wir werden oft von Punkten P sprechen, deren Koordinaten sich in der Form

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q} \quad (q>0,\ (p_i,q)=1 \text{ für } i=1,2,\ldots,s)$$

schreiben lassen; wir werden dann mit $J(P)$ den Würfel mit dem Mittelpunkt P und der Kantenlänge $2\omega(q)$ bezeichnen; das Zeichen $\omega(P)$ soll die Zahl $\omega(q)$ bedeuten (ein Mißverständnis ist nicht zu befürchten). Die abgeschlossene Hülle einer Menge, z. B. der Mengen $J(P)$, W, V_n, soll durch einen Querschnitt gekennzeichnet werden, also z. B. $\overline{J}(P)$, $\overline{W}$, $\overline{V}_n$.

Wir führen für den Rest dieses Paragraphen folgende Bezeichnungen ein:

$$\lambda = \frac{1}{60\cdot 2^s\cdot 32^{s^2}}; \quad \tau = \frac{\lambda}{2\cdot 16^s}, \quad \mu = \frac{\lambda\tau}{16^s}; \tag{20}$$

also

$$\mu^2 < \frac{1}{2\cdot 32^s}. \tag{21}$$

Wir konstruieren nun die gesuchte Menge $N = N(\eta, \omega(x), s, f(x))$ folgendermaßen.

Wir wählen erstens eine ganze Zahl $\beta_0 > 1$ so groß, daß für $x \geqq \beta_0$ folgendes gilt:

I. $$\omega(x) < \frac{1}{x};$$

II. $$\frac{\mu^{1/s}\lambda^{1/s}}{\eta^{1/s}} f^{1/s}(2\omega(x)) > 4\omega(x);$$

III. $$f(2\omega(x)) < \frac{\eta}{\mu}.$$

IV. Es gibt mindestens eine Primzahl $p > 32$, so daß $\frac{1}{\omega(x)} < p < \frac{2}{\omega(x)}$.

Nun wenden wir den Hilfssatz 3 mit

$$F(x) = \frac{\mu\lambda}{\eta} f(2\omega(x)), \quad q=1, \quad \beta=\beta_0, \quad \alpha_i = 0 \quad (i=1,2,\ldots,s)$$

an und finden eine endliche Menge A von Punkten mit den Koordinaten

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}, \tag{22}$$

wo folgendes gilt:

1. $q \geqq \beta_0$; $0 \leqq \frac{p_i}{q} < 1$; $(p_i, q) = 1$ $(i=1,2,\ldots,s)$; wegen $q>1$ ist dann sogar $0 < \frac{p_i}{q} < 1$.

2. Für je zwei verschiedene Punkte $\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}$; $\frac{p_1'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}$ aus A ist mindestens eine von den s Ungleichungen

$$\left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| > \frac{1}{2}\frac{\mu^{1/s}\lambda^{1/s}}{\eta^{1/s}} f^{1/s}(2\omega(q)) + \frac{1}{2}\frac{\mu^{1/s}\lambda^{1/s}}{\eta^{1/s}} f^{1/s}(2\omega(q')) \quad (i=1,2,\ldots,s) \tag{23}$$

erfüllt; wegen II folgt aus (23)

$$\left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| > 2\omega(q) + 2\omega(q'). \tag{24}$$

3.
$$\frac{\mu\lambda}{\eta}\sum_{A} f(2\omega(q)) > \lambda,$$

also

$$\sum_{A} f(2\omega(q)) > \frac{\eta}{\mu}. \tag{25}$$

Die Punkte der Menge A wollen wir „Punkte erster Ordnung" nennen; die Würfel $J(P)$, wo P ein beliebiger Punkt erster Ordnung ist, wollen wir „Würfel erster Ordnung" nennen. Aus III und (25) folgt, daß es mehr als einen Punkt erster Ordnung gibt. Aus I folgt, daß die *abgeschlossenen* Würfel erster Ordnung im Einheitswürfel E ($0 < \theta_i < 1$ für $i = 1, 2, \ldots, s$) liegen, und aus (24) folgt, daß sie paarweise punktfremd sind.

Nun definieren wir Punkte und Würfel n-ter Ordnung ($n > 1$ ganz) durch Induktion. Es sei also n ganz, $n \geqq 1$; für jedes ganze k mit $1 \leqq k \leqq n$ seien die Punkte und Würfel k-ter Ordnung definiert; ihre Anzahl sei endlich; und zwar sei jeder Punkt k-ter Ordnung ein Punkt mit rationalen Koordinaten, die sich in der Form $\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}$ schreiben lassen, wo $0 < p_i < q$, $(p_i, q) = 1$, $q \geqq \beta_0$. Die Würfel k-ter Ordnung seien genau alle Würfel $J(P)$, wo P ein beliebiger Punkt k-ter Ordnung ist. Für jedes feste k ($1 \leqq k \leqq n$) sollen alle *abgeschlossenen* Würfel k-ter Ordnung in E liegen und paarweise punktfremd sein.

Wir definieren nun Punkte und Würfel $(n+1)$-ter Ordnung wie folgt: Es sei

$$\overline{P} = \left(\frac{\overline{p}_1}{\overline{q}}, \frac{\overline{p}_2}{\overline{q}}, \ldots, \frac{\overline{p}_s}{\overline{q}}\right) \qquad (0 < \overline{p}_i < \overline{q},\ (\overline{p}_i, \overline{q}) = 1)$$

ein beliebiger Punkt n-ter Ordnung. Wir wählen (was wegen $\overline{q} \geqq \beta_0$ und wegen IV möglich ist) eine Primzahl $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\overline{P}) > 32$ so, daß $\frac{\omega(\overline{P})}{2} < \frac{1}{\mathfrak{q}} < \omega(\overline{P})$. Dann gibt es (da $J(\overline{P})$ die Kantenlänge $2\omega(\overline{P})$ hat) sicher s ganze Zahlen $\alpha_i = \alpha_i(\overline{P})$ ($\alpha_i > 0$, $\alpha_i + 1 < \mathfrak{q}$ für $i = 1, 2, \ldots, s$) so, daß der durch die Ungleichungen $\frac{\alpha_i}{\mathfrak{q}} \leqq \theta_i \leqq \frac{\alpha_i + 1}{\mathfrak{q}}$ definierte abgeschlossene Würfel in $J(\overline{P})$ liegt. Wir wählen nun eine ganze Zahl $\beta = \beta(\overline{P})$ so, daß

V. $$\beta \geqq n+1, \quad \beta \geqq \beta_0,$$

VI. $$\lambda^2\mu^2\frac{\omega^s(\overline{P})}{f(2\omega(\overline{P}))} > 4^s\frac{\omega^s(x)}{f(2\omega(x))} \quad \text{für} \quad x \geqq \beta\mathfrak{q},$$

VII. $$\omega(x) < \frac{1}{\mathfrak{q}x} \quad \text{für} \quad x \geqq \beta\mathfrak{q},$$

VIII. $$f(2\omega(x)) < \frac{1}{2^s\lambda\mu^2} f(2\omega(\overline{P})) \quad \text{für} \quad x \geqq \beta\mathfrak{q}.$$

Dann wenden wir den Hilfssatz 3 mit

$$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}(\bar{P}),\quad \alpha_i=\alpha_i(\bar{P}),\quad \beta=\beta(\bar{P}),\quad F(x)=\mu^2\lambda^2 f(2\,\omega(x))\frac{\omega^s(\bar{P})}{f(2\,\omega(\bar{P}))}$$

an und finden: Es gibt eine endliche Menge $A(\bar{P})$ von Punkten

$$P=\left(\frac{p_1}{q},\frac{p_2}{q},\ldots,\frac{p_s}{q}\right) \tag{26}$$

mit folgenden Eigenschaften:

4. $q\geqq\beta\mathfrak{q}$; $\quad\frac{\alpha_i}{\mathfrak{q}}\leqq\frac{p_i}{q}<\frac{\alpha_i+1}{\mathfrak{q}}$; $\quad(p_i,q)=1$ für $i=1,2,\ldots,s$;

wegen $q>\mathfrak{q}$ ist sogar $\frac{\alpha_i}{\mathfrak{q}}<\frac{p_i}{q}<\frac{\alpha_i+1}{\mathfrak{q}}$; also

$$\left|\frac{p_i}{q}-\frac{\alpha_i}{\mathfrak{q}}\right|\geqq\frac{1}{q\,\mathfrak{q}},\quad \left|\frac{p_i}{q}-\frac{\alpha_i+1}{\mathfrak{q}}\right|\geqq\frac{1}{q\,\mathfrak{q}},$$

so daß wegen VII der abgeschlossene Würfel $\bar{J}(P)$ ganz in $J(\bar{P})$ liegt.

5. Für je zwei verschiedene Punkte

$$\left(\frac{p_1}{q},\frac{p_2}{q},\ldots,\frac{p_s}{q}\right);\quad\left(\frac{p_1'}{q'},\frac{p_2'}{q'},\ldots,\frac{p_s'}{q'}\right)$$

aus $A(\bar{P})$ ist mindestens eine von den s Ungleichungen $(i=1,2,\ldots,s)$

$$\left|\frac{p_i}{q}-\frac{p_i'}{q'}\right|>\frac{1}{2}\mu^{2/s}\lambda^{2/s}\frac{\omega(\bar{P})}{f^{1/s}(2\,\omega(\bar{P}))}f^{1/s}(2\,\omega(q))$$
$$+\frac{1}{2}\mu^{2/s}\lambda^{2/s}\frac{\omega(\bar{P})}{f^{1/s}(2\,\omega(\bar{P}))}f^{1/s}(2\,\omega(q')) \tag{27}$$

erfüllt; wegen VI folgt daraus

$$\left|\frac{p_i}{q}-\frac{p_i'}{q'}\right|>2\,\omega(q)+2\,\omega(q'). \tag{28}$$

6. $$\mu^2\lambda^2\frac{\omega^s(\bar{P})}{f(2\,\omega(\bar{P}))}\sum_{A(\bar{P})}f(2\,\omega(q))>\frac{\lambda}{\mathfrak{q}^s},$$

also, da $\frac{1}{\mathfrak{q}}>\frac{\omega(\bar{P})}{2}$,

$$\sum_{A(\bar{P})}f(2\,\omega(q))>\frac{1}{2^s\lambda\mu^s}f(2\,\omega(\bar{P})). \tag{29}$$

Diese Konstruktion führen wir für alle Würfel $J(\bar{P})$ n-ter Ordnung durch; die Vereinigungsmenge A_{n+1} aller zugehörigen Mengen $A(\bar{P})$ ist eine endliche Punktmenge; die Punkte, die zu A_{n+1} gehören, mögen „Punkte $(n+1)$-ter Ordnung“ heißen. Die Würfel $J(P)$, wo P ein beliebiger Punkt $(n+1)$-ter Ordnung ist, mögen „Würfel $(n+1)$-ter Ordnung“ heißen. Die Punkte $(n+1)$-ter Ordnung sind in der Tat endlich viele Punkte $\left(\frac{p_1}{q},\frac{p_2}{q},\ldots,\frac{p_s}{q}\right)$, wo $0<p_i<q$, $(p_i,q)=1$ $(i=1,2,\ldots,s)$, $q\geqq\beta_0$. Jeder

abgeschlossene Würfel $(n+1)$-ter Ordnung liegt in einem offenen Würfel n-ter Ordnung; je zwei abgeschlossene Würfel $(n+1)$-ter Ordnung sind daher und nach (28) punktfremd und alle abgeschlossenen Würfel $(n+1)$-ter Ordnung liegen in E.

Durch unsere Konstruktionsvorschrift sind also in der Tat Punkte und Würfel aller Ordnungen $n = 1, 2, \ldots$ definiert. Wegen (29) und VIII liegen in jedem Würfel n-ter Ordnung mindestens zwei Würfel $(n+1)$-ter Ordnung. Die Vereinigungsmenge aller Würfel n-ter Ordnung heiße V_n; offenbar ist $V_{n+1} \subset V_n$, ja sogar $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$. Also ist

$$N = V_1 V_2 V_3 \ldots = \overline{V}_1 \overline{V}_2 \overline{V}_3 \ldots \quad (\text{also } N \subset E)$$

eine nichtleere abgeschlossene Menge. N ist sogar perfekt; denn wegen V und 4. ist die Kante eines Würfels n-ter Ordnung höchstens gleich $2\omega(n)$ und jeder Würfel n-ter Ordnung enthält mindestens zwei Würfel $(n+1)$-ter Ordnung, also mindestens zwei Punkte von N.

N ist weiter eine Teilmenge von $M(\omega(x); s)$; denn jeder Punkt $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ von N liegt für jedes n in einem Würfel n-ter Ordnung $J(P_n)$; wenn also

$$P_n = \left(\frac{p_{1,n}}{q_n}, \frac{p_{2,n}}{q_n}, \ldots, \frac{p_{s,n}}{q_n}\right) \qquad (0 < p_{i,n} < q_n,\ (p_{i,n}, q_n) = 1),$$

so ist

$$q_n \geqq n, \qquad \left|\theta_i - \frac{p_{i,n}}{q_n}\right| < \omega(q_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

N ist eben die gesuchte Menge; wir werden in der Tat zeigen, daß

$$L(N; f(x)) \geqq \eta.$$

Wir führen zunächst folgende Benennung ein: Wenn ein offener Würfel W Teilmenge eines Würfels n-ter Ordnung ist, aber mit mehr als einem Würfel $(n+1)$-ter Ordnung gemeinsame Punkte hat, so heiße W ein „Würfel n-ter Art“. Durch diese Definition ist also nicht für jeden Würfel eine Art definiert; solche Würfel, welchen nach dieser Definition eine Art zukommt, wollen wir „normale Würfel“ nennen. Es ist klar, daß für einen normalen Würfel ihre Art eindeutig bestimmt ist: denn wenn ein Würfel W Teilmenge eines Würfels n-ter Ordnung ist, so kann W nicht mit zwei Würfeln l-ter Ordnung mit $l \leqq n$ gemeinsame Punkte haben; und ebenso, wenn W mit mindestens zwei Würfeln $(n+1)$-ter Ordnung gemeinsame Punkte hat, so ist W sicher nicht Teilmenge eines Würfels l-ter Ordnung wo $l \geqq n+1$.

Wenn ein System $\mathfrak{U}$ von endlich oder abzählbar vielen (offenen) Würfeln $W_1, W_2, \ldots$ mit den Kantenlängen $d_1, d_2, \ldots$ vorliegt, so werde

$$\Lambda(\mathfrak{U}) = \sum_i f(d_i)$$

gesetzt. Nach der Definition ist bei gegebenem $\varrho > 0$ die Zahl $L_\varrho(N; f(x))$ gleich der unteren Grenze der Zahlen $\Lambda(\mathfrak{U})$ für alle höchstens abzählbaren Systeme $\mathfrak{U}$, welche N überdecken und aus Würfeln bestehen, deren Kanten sämtlich kleiner als ϱ sind.

Wir wählen nun im Rest dieses Paragraphen $\varrho = \varrho_0$ fest, und zwar setzen wir $\varrho_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{s}}$, wo σ das Minimum des Abstandes von je zweien abgeschlossenen Würfeln erster Ordnung ist; σ ist in der Tat positiv, da die endlich vielen abgeschlossenen Würfel erster Ordnung paarweise punktfremd sind.

Es sei nun $\mathfrak{U}$ ein höchstens abzählbares Überdeckungssystem von N, welches aus Würfeln besteht, deren Kanten sämtlich kleiner als ϱ_0 sind. Da N beschränkt und abgeschlossen ist, so läßt sich nach dem Borelschen Überdeckungssatz aus $\mathfrak{U}$ ein endliches Teilsystem $\mathfrak{U}'$ von Würfeln herausgreifen, welches ebenfalls N überdeckt. Wenn wir noch aus $\mathfrak{U}'$ alle Würfel weglassen, welche überhaupt keinen Punkt von N enthalten, bekommen wir ein Teilsystem $\mathfrak{U}''$, welches wieder N überdeckt, und offenbar ist

$$\Lambda(\mathfrak{U}'') \leqq \Lambda(\mathfrak{U}') \leqq \Lambda(\mathfrak{U}).$$

Es sei W ein Würfel aus $\mathfrak{U}''$; jeder Punkt aus N liegt in einem Würfel erster Ordnung; W enthält mindestens einen Punkt von N; also hat W mit mindestens einem Würfel erster Ordnung einen nichtleeren Durchschnitt; weil aber die Diagonale von W kleiner als $\varrho_0\sqrt{s} = \sigma$ ist, so hat W mit *genau* einem Würfel erster Ordnung einen nichtleeren Durchschnitt. Weil aber der offene Würfel W einen Punkt von N enthält, weil jeder Punkt von N für jedes n in einem Würfel n-ter Ordnung liegt, weil endlich die Kantenlänge der Würfel n-ter Ordnung für $n \to \infty$ gegen Null strebt (nämlich höchstens $2\omega(n)$ ist), so gibt es ein n, so daß W einen *ganzen* Würfel n-ter Ordnung, also mindestens zwei Würfel $(n+1)$-ter Ordnung enthält. Es gibt also eine *kleinste* ganze Zahl $l \geqq 0$, so daß W mit mindestens zwei Würfeln $(l+1)$-ter Ordnung gemeinsame Punkte hat; und zwar ist $l \geqq 1$ (offenbar hat dann W für jedes $n \leqq l$ mit genau einem Würfel n-ter Ordnung einen nichtleeren Durchschnitt). Es sei J derjenige Würfel l-ter Ordnung, mit welchem W einen nichtleeren Durchschnitt hat; wir können dann

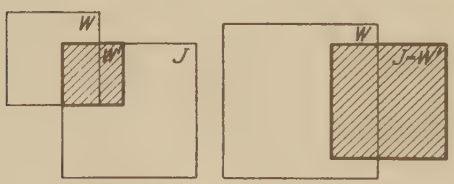

Fig. 1. Wenn zwei Würfel W und J einen nichtleeren Durchschnitt haben, so läßt sich ein Würfel W' (schraffiert) finden, dessen Kante nicht länger als diejenige von W ist, so daß $WJ \subset W' \subset J$. In dem Fall $s = 2$ sind neben den gezeichneten Fällen noch zwei typische Fälle möglich, nämlich $W \subset J$ (dann setze man $W' = W$) und $J \subset W$ (dann setze man $W' = J$).

offenbar (vgl. die Fig. 1, wo $s = 2$) einen Würfel W' finden, dessen Kante nicht größer als diejenige von W ist und für welchen

$$WJ \subset W' \subset J.$$

W' ist dann offenbar ein Würfel l-ter Art (er ist nämlich in J enthalten und wegen $WJ \subset W'J$ hat er mit mindestens zwei Würfeln $(l+1)$-ter Ordnung einen nichtleeren Durchschnitt), also ein normaler Würfel. Wenn wir nun in $\mathfrak{U}''$ jeden Würfel W nach dieser Vorschrift durch den zugehörigen Würfel W' ersetzen, so bekommen wir ein System $\mathfrak{V}$ von endlich vielen normalen Würfeln, welches ebenfalls N überdeckt (denn es ist $NW = NWJ \subset NW'J = NW'$); und da die Kante von jedem Würfel W' höchstens gleich der Kante des entsprechenden Würfels W ist, so ist

$$\Lambda(\mathfrak{V}) \leqq \Lambda(\mathfrak{U}'') \leqq \Lambda(\mathfrak{U}).$$

Jedes System von endlich vielen normalen Würfeln, welches N überdeckt, wollen wir ein „normales Überdeckungssystem“ nennen. Und wir sehen:

$L_{\varrho_0}(N; f(x))$ ist mindestens gleich[18]) *der unteren Grenze von $\Lambda(\mathfrak{V})$, wenn $\mathfrak{V}$ alle normalen Überdeckungssysteme durchläuft.*

Wir wollen nun eine Abschätzung für die Kantenlänge eines Würfels l-ter Art angeben; dies geschieht durch den folgenden

Hilfssatz 4. *Es sei W ein Würfel l-ter Art; W ist also in einem Würfel l-ter Ordnung $J(P)$ enthalten, hat aber mit mehr als einem Würfel $(l+1)$-ter Ordnung — sagen wir mit den Würfeln $J(P_1), J(P_2), \ldots, J(P_t)$ $(t \geqq 2)$ — einen nichtleeren Durchschnitt.*

Behauptung. *Die Kantenlänge von W ist mindestens gleich*

$$\frac{1}{4} \frac{\omega(P)}{f^{1/s}(2\,\omega(P))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{n=1}^{t} f(2\,\omega(P_n))}.$$

Beweis. Wir konstruieren um jeden Punkt P_n $(n = 1, 2, \ldots, t)$ als Mittelpunkt einen Würfel $K(P_n)$ mit der Halbkante

$$k_n = \frac{1}{2} \frac{\omega(P)}{f^{1/s}(2\,\omega(P))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} f^{1/s}(2\,\omega(P_n)).$$

Nach (27) (denn die Punkte $(l+1)$-ter Ordnung $P_1, P_2, \ldots, P_t$ gehören zu $A(P)$) sind je zwei Würfel $K(P_n)$ punktfremd. Nach VI ist

$$k_n > 2\omega(P_n).$$

---

[18]) Wir müssen sagen „*mindestens* gleich“, da nach der Definition eines normalen Überdeckungssystems vielleicht auch solche normale Überdeckungssysteme existieren können, in welchen Würfel von der Kantenlänge $\geqq \varrho_0$ auftreten.

Weil also bei jedem n $(n = 1, 2, \ldots, t)$ der Würfel W mindestens einen Punkt im Würfel $J(P_n)$ (Mittelpunkt P_n, Halbkante $\omega(P_n)$) und mindestens einen Punkt außerhalb des Würfels $K(P_n)$ (Mittelpunkt P_n, Halbkante $k_n > 2\omega(P_n)$) hat, so enthält der Durchschnitt $W \cdot K(P_n)$ sicher einen Würfel von der Kante $\frac{1}{2}k_n$ (vgl. die Fig. 2, wo W schraffiert ist). Da je zwei Würfel $K(P_n)$ punktfremd sind, so ist das Volumen von W mindestens gleich

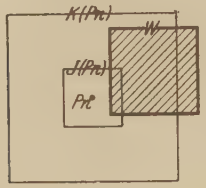

Fig. 2.

$$\frac{1}{2^s}\sum_{n=1}^{t} k_n^s,$$

also die Kante von W mindestens gleich

$$\frac{1}{2}\sqrt[s]{\sum_{n=1}^{t} k_n^s}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir wollen noch einen neuen Begriff „Überschlagungssystem" einführen und zwar auf folgende Weise. Es sei J ein Würfel $(n+1)$-ter Ordnung, W ein Würfel n-ter Art; wir sagen, daß J von W *„getroffen"* wird, wenn

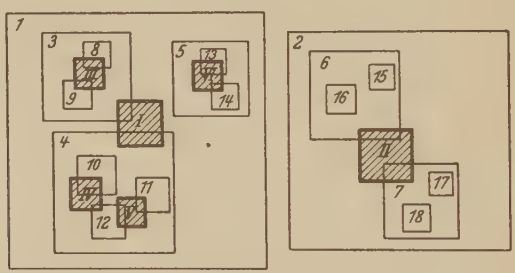

Fig. 3. Schematische Darstellung eines Überschlagungssystems (für $s = 2$). Die Quadrate 1 bis 18 sollen Würfel erster bis dritter Ordnung sein; und zwar 1 und 2 von erster, 3 bis 7 von zweiter, 8 bis 18 von dritter Ordnung; Würfel höherer Ordnung sind nicht gezeichnet. Die (schraffierten) Quadrate I bis VI sind normale Würfel, und zwar I und II von erster Art, die übrigen von zweiter Art.

Der Würfel $\left\{\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\\\text{IV}\\\text{V}\\\text{VI}\end{matrix}\right\}$ streift alle Punkte von N, die in $\left\{\begin{matrix}\text{3 und 4 (oder in 8, 9, 10, 11, 12)}\\\text{6 und 7 (oder in 15, 16, 17, 18)}\\\text{8 und 9}\\\text{10 und 12}\\\text{11 und 12}\\\text{13 und 14}\end{matrix}\right\}$ liegen. Die Würfel I bis VI bilden also ein Überschlagungssystem, welches genau zwei irreduzible Teilsysteme (nämlich I, II, VI und II, III, IV, V, VI) enthält.

$J \cdot W$ nicht leer ist. Es sei nun P ein Punkt von N, W ein Würfel n-ter Art. P liegt in genau einem Würfel J $(n+1)$-ter Ordnung; wir sagen, daß P von W *„gestreift"* wird, wenn J von W getroffen wird (d. h. wenn

$J \cdot W$ nicht leer ist). Wenn insbesondere P in W liegt, so wird offenbar P von W gestreift. Ist $\mathfrak{S}$ ein System von normalen Würfeln und P ein Punkt von N, so sagen wir, daß P von $\mathfrak{S}$ gestreift wird, wenn P von mindestens einem Würfel aus $\mathfrak{S}$ gestreift wird.

Ein System von endlich vielen normalen Würfeln, von welchem jeder Punkt von N gestreift wird, heiße ein Überschlagungssystem. Offenbar ist jedes normale Überdeckungssystem zugleich auch ein Überschlagungssystem. Ein Überschlagungssystem, dessen kein echtes Teilsystem Überschlagungssystem ist, heiße ein irreduzibles Überschlagungssystem. Jedes Überschlagungssystem enthält offenbar mindestens ein Teilsystem, welches ein irreduzibles Überschlagungssystem ist[19]). Und es gilt offenbar folgendes:

$L_{\varrho_0}(N; f(x))$ ist mindestens gleich der unteren Grenze von $\Lambda(\mathfrak{S})$, wo $\mathfrak{S}$ alle Überschlagungssysteme (oder, was auf dasselbe hinausläuft, alle irreduziblen Überschlagungssysteme) durchläuft.

Wenn in einem Überschlagungssystem $\mathfrak{S}$ mindestens ein Würfel l-ter Art, aber kein Würfel von höherer als l-ter Art vorkommt, so heiße $\mathfrak{S}$ „von l-ter Art". Es sei $\mathfrak{S}$ ein Überschlagungssystem l-ter Art; für $i = 1, 2, \ldots, l$ seien

$$d_{1,i}, d_{2,i}, \ldots, d_{n_i,i} \qquad (n_i \geqq 0)$$

die Kanten der Würfel i-ter Art aus $\mathfrak{S}$. Wir ordnen dann dem System $\mathfrak{S}$ die Zahl (τ ist in (20) eingeführt worden)

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}) = \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{n_i} f(d_{k,i}) + \tau \sum_{k=1}^{n_l} f(d_{k,l})$$

zu (für $l = 1$ ist also

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}) = \tau \sum_{k=1}^{n_1} f(d_{k,1})).$$

$\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ unterscheidet sich also von $\Lambda(\mathfrak{S})$ bloß dadurch, daß die Beiträge, die von den Würfeln der höchsten vorkommenden Art herrühren, nur mit dem Gewicht τ gerechnet werden. Wegen $\tau < 1$ ist also

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}) < \Lambda(\mathfrak{S})$$

und wir haben also den

Hilfssatz 5. *$L_{\varrho_0}(N; f(x))$ ist mindestens gleich der unteren Grenze der Zahlen $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$, wo $\mathfrak{S}$ alle irreduziblen Überschlagungssysteme durchläuft.*

Den Kernpunkt des Beweises des Satzes 8 bildet nun folgender

Hilfssatz 6. *Es sei $l > 1$; $\mathfrak{S}$ sei ein irreduzibles Überschlagungssystem l-ter Art; dann gibt es ein irreduzibles Überschlagungssystem $\mathfrak{S}''$ von niedrigerer als l-ter Art, so daß*

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}'') < \mathsf{M}(\mathfrak{S}).$$

[19]) Diese Verhältnisse sind auf der Fig. 3 für $s = 2$ schematisch dargestellt.

Beweis. Es genügt, wenn wir zeigen, daß es zu $\mathfrak{S}$ ein Überschlagungssystem $\mathfrak{S}'$ von $(l-1)$-ter Art gibt, so daß

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}') < \mathsf{M}(\mathfrak{S}).$$

Denn $\mathfrak{S}'$ enthält sicher ein irreduzibles Überschlagungssystem $\mathfrak{S}''$, welches dann sicher von höchstens $(l-1)$-ter Art ist. Nun enthält $\mathfrak{S}''$ keinen Würfel, der nicht in $\mathfrak{S}'$ enthalten wäre; wenn $\mathfrak{S}''$ vielleicht von niedrigerer als $(l-1)$-ter Art ist, sagen wir von k-ter Art, so kommen die Beiträge, die von den Würfeln k-ter Art herrühren, in $\mathsf{M}(\mathfrak{S}')$ mit dem Gewicht Eins, dagegen aber in $\mathsf{M}(\mathfrak{S}'')$ nur mit dem Gewicht $\tau < 1$ vor. Also ist

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}'') \leqq \mathsf{M}(\mathfrak{S}') < \mathsf{M}(\mathfrak{S}).$$

Wir wollen also die Existenz von $\mathfrak{S}'$ nachweisen. In $\mathfrak{S}$ kommen wirklich Würfel l-ter Art vor. Jeder Würfel l-ter Art ist in einem Würfel l-ter Ordnung, also auch in einem (eindeutig bestimmten) Würfel $(l-1)$-ter Ordnung enthalten. Es seien

$$J(P_1), J(P_2), \ldots, J(P_t) \qquad (t \geqq 1) \tag{30}$$

genau diejenigen Würfel $(l-1)$-ter Ordnung, die mindestens einen Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ enthalten; wir bilden aus $\mathfrak{S}$ ein neues System $\mathfrak{S}'$ von endlich vielen normalen Würfeln, indem wir aus $\mathfrak{S}$ alle Würfel $(l-1)$-ter und l-ter Art, die in den Würfeln (30) enthalten sind, weglassen und zu dem so entstehenden System von Würfeln die Würfel (30) hinzufügen. Jeder Punkt von N, der von einem weggelassenen Würfel gestreift wurde, liegt notwendig in einem von den Würfeln (30), also wird dieser Punkt auch von $\mathfrak{S}'$ gestreift, also ist $\mathfrak{S}'$ auch ein Überschlagungssystem[20]), und zwar offenbar von $(l-1)$-ter Art (denn jeder Würfel $(l-1)$-ter Ordnung enthält mindestens zwei Würfel l-ter Ordnung, also ist jeder Würfel $(l-1)$-ter Ordnung zugleich auch von $(l-1)$-ter Art); es bleibt also noch übrig,

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}') < \mathsf{M}(\mathfrak{S})$$

zu beweisen.

Zu diesem Zweck betrachten wir einen Würfel $J(P_n)$ $(1 \leqq n \leqq t)$ und einen Punkt P von N, der in $J(P_n)$ liegt. P wird also von einem Würfel W aus $\mathfrak{S}$ gestreift. Ich behaupte: W ist entweder von $(l-1)$-ter oder von l-ter Art. Denn gesetzt, W sei von m-ter Art, wo $m < l-1$; es sei dann J derjenige Würfel $(m+1)$-ter Ordnung, in welchem P liegt (also $J(P_n) \subset J$, da $m+1 \leqq l-1$); dann würde also J von W getroffen, d. h. alle Punkte aus $N \cdot J$, also um so mehr alle Punkte aus $N \cdot J(P_n)$, würden von W gestreift. Wenn wir also aus $\mathfrak{S}$ diejenigen Würfel l-ter Art weglassen, die in $J(P_n)$ liegen (es gibt in $\mathfrak{S}$ mindestens einen solchen

[20]) Man könnte zeigen, daß bereits $\mathfrak{S}'$ irreduzibel ist, wir brauchen es aber nicht.

Würfel), so würden wir wieder ein Überschlagungssystem bekommen, also wäre $\mathfrak{S}$ nicht irreduzibel, gegen die Voraussetzung.

Also wird jeder Punkt von $N \cdot J(P_n)$ von einem Würfel $(l-1)$-ter oder l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ gestreift; dieser Würfel liegt dann offenbar in $J(P_n)$. Wir wollen nun den Beitrag derjenigen Würfel $(l-1)$-ter und l-ter Art aus $\mathfrak{S}$, die in $J(P_n)$ liegen, zur Summe $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ abschätzen.

Wir bemerken zunächst: Da $\frac{f(x)}{x^s}$ für $x > 0$ nicht wächst, so ist für

$$x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_c > 0 \qquad (c \geqq 1)$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_c) f(\sqrt[s]{x_i}) \geqq x_i f(\sqrt[s]{x_1 + x_2 + \ldots + x_c}) \quad (i = 1, 2, \ldots, c),$$

also (durch Addition)

$$\sum_{i=1}^{c} f(\sqrt[s]{x_i}) \geqq f(\sqrt[s]{x_1 + x_2 + \ldots + x_c}); \tag{31}$$

weiter ist für $x > 0$, $0 < \xi < 1$

$$f(\xi x) \geqq \xi^s f(x). \tag{31a}$$

Es seien

$$U_1, U_2, \ldots, U_a \tag{32}$$

diejenigen Punkte l-ter Ordnung, die in $J(P_n)$ enthalten sind;

$$W_1, W_2, \ldots, W_m \tag{33}$$

seien diejenigen Würfel $(l-1)$-ter Art aus $\mathfrak{S}$, die in $J(P_n)$ liegen (es kann auch $m = 0$ sein). Einige von den Würfeln $J(U_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, a)$ werden von den Würfeln (33) getroffen; die Numerierung in (32) sei so gewählt, daß genau die Würfel $J(U_i)$ mit $1 \leqq i \leqq \bar{a}$ von den Würfeln (33) getroffen werden, die übrigen aber nicht (für $m = 0$ ist $\bar{a} = 0$ zu setzen; es ist $\bar{a} \leqq a$ — man könnte sogar $\bar{a} < a$ zeigen, wir brauchen es aber nicht). Nach (29) ist

$$\sum_{i=1}^{a} f(2\omega(U_i)) > \frac{1}{2^s \lambda \mu^2} f(2\omega(P_n)).$$

Es sind also zwei Fälle möglich, die wir gesondert betrachten.

1. Fall:

$$\sum_{i=1}^{\bar{a}} f(2\omega(U_i)) > \frac{1}{2 \cdot 2^s \lambda \mu^2} f(2\omega(P_n)); \tag{34}$$

2. Fall: (34) ist nicht wahr, also

$$\sum_{i=\bar{a}+1}^{a} f(2\omega(U_i)) > \frac{1}{2 \cdot 2^s \lambda \mu^2} f(2\omega(P_n)). \tag{35}$$

Wir betrachten nun im ersten Falle den Beitrag, den ein Würfel W_k $(1 \leqq k \leqq m)$ zu $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ liefert; dieser Beitrag ist gleich $f(d_k)$, wo d_k die

Kante von W_k ist. Nach dem Hilfssatz 4 ist

$$d_k \geqq \frac{1}{4} \frac{\omega(P_n)}{f^{1/s}(2\omega(P_n))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(U_i))},$$

wo $\sum_{(k)}$ bedeutet, daß über diejenigen i summiert wird, für welche $J(U_i)$ von W_k getroffen wird. Da aber jedes $J(U_i)$ mit $1 \leqq i \leqq \bar{a}$ mindestens von einem W_k getroffen wird, so ist wegen (31), (34), (31a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} f(d_k) &\geqq \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{1}{4} \frac{\omega(P_n)}{f^{1/s}(2\omega(P_n))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(U_i))}\right) \\ &\geqq f\left(\frac{1}{4} \frac{\omega(P_n)}{f^{1/s}(2\omega(P_n))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\bar{a}} f(2\omega(U_i))}\right) \\ &> f\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^{1/s}} \cdot \omega(P_n) \cdot \lambda^{1/s}\right) \geqq \frac{\lambda}{2 \cdot 16^s} f(2\omega(P_n)) = \tau f(2\omega(P_n)).\end{aligned}$$

Betrachten wir nun den zweiten Fall. Es sei $J(U_i)$ ein von den W_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ nicht getroffener Würfel l-ter Ordnung aus $J(P_n)$, also $\bar{a} < i \leqq a$. Jeder Punkt von $N \cdot J(U_i)$ muß dann also von einem Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ gestreift werden; also muß jeder Würfel $(l+1)$-ter Ordnung, der in $J(U_i)$ liegt, von einem Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ — der dann auch in $J(U_i)$ liegen muß — getroffen werden. Es seien

$$X_1, X_2, \ldots, X_v$$

die in $J(U_i)$ liegenden Punkte $(l+1)$-ter Ordnung,

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_w$$

die in $J(U_i)$ liegenden Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$. Die Kante d_k von Y_k $(1 \leqq k \leqq w)$ genügt nach dem Hilfssatz 4 der Ungleichung

$$d_k \geqq \frac{1}{4} \frac{\omega(U_i)}{f^{1/s}(2\omega(U_i))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(X_t))},$$

wo $\sum_{(k)}$ bedeutet, daß über diejenigen Werte von t $(1 \leqq t \leqq v)$ summiert wird, für welche $J(X_t)$ von Y_k getroffen wird. Da jeder Würfel $J(X_t)$ $(t = 1, 2, \ldots, v)$ von mindestens einem Y_k getroffen wird, so ist nach (31), (29), (31a)

$$\begin{aligned}\tau \sum_{k=1}^{w} f(d_k) &\geqq \tau \sum_{k=1}^{w} f\left(\frac{1}{4} \frac{\omega(U_i)}{f^{1/s}(2\omega(U_i))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(X_t))}\right) \\ &\geqq \tau f\left(\frac{1}{4} \frac{\omega(U_i)}{f^{1/s}(2\omega(U_i))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{t=1}^{v} f(2\omega(X_t))}\right) \\ &> \tau f\left(\frac{1}{8} \lambda^{1/s} \omega(U_i)\right) \geqq \frac{\lambda \tau}{16^s} f(2\omega(U_i)).\end{aligned}$$

Die Zahl $\tau \sum_{k=1}^{w} f(d_k)$ ist eben der Beitrag, den die in $J(U_i)$ enthaltenen Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ zu $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ liefern. Der Beitrag, den alle in den Würfeln $J(U_i)$ $(\bar{a} < i \leqq a)$ enthaltenen Würfel l-ter Art aus $\mathfrak{S}$ zu $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ liefern, ist also nach (35), (21) größer als

$$\frac{\lambda\tau}{16^s} \sum_{i=\bar{a}+1}^{a} f(2\omega(U_i)) > \frac{\tau}{2 \cdot 32^s \mu^2} f(2\omega(P_n)) > \tau f(2\omega(P_n)).$$

In beiden Fällen ist also der Beitrag der Würfel $(l-1)$-ter und l-ter Art aus $\mathfrak{S}$, die in $J(P_n)$ liegen, zu $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$ größer als $\tau f(2\omega(P_n))$. Dieser Beitrag geht bei dem Übergang von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{S}'$ verloren und wird durch den von $J(P_n)$ herrührenden Beitrag $\tau f(2\omega(P_n))$ ersetzt (denn $\mathfrak{S}'$ ist von $(l-1)$-ter Art); also ist in der Tat

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}') < \mathsf{M}(\mathfrak{S}), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Nach den Hilfssätzen 5 und 6 ist also folgendes klar:

$L_{\varrho_0}(N; f(x))$ ist mindestens gleich der unteren Grenze von $\mathsf{M}(\mathfrak{S})$, wo $\mathfrak{S}$ alle Überschlagungssysteme erster Art durchläuft.

Es sei nun $\mathfrak{S}$ ein Überschlagungssystem erster Art, in welchem also nur Würfel erster Art vorkommen. Es sei $J(P)$ ein Würfel erster Ordnung; $W_1, W_2, \ldots, W_m$ seien die Würfel (erster Art) aus $\mathfrak{S}$, die in $J(P)$ liegen. $P_1, P_2, \ldots, P_n$ seien die Punkte zweiter Ordnung, die in $J(P)$ liegen. Die Kante d_k von W_k genügt nach dem Hilfssatz 4 der Ungleichung

$$d_k \geqq \frac{1}{4} \frac{\omega(P)}{f^{1/s}(2\omega(P))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(P_i))},$$

wo $\sum_{(k)}$ bedeutet, daß über diejenigen i summiert wird, für welche $J(P_i)$ von W_k getroffen wird. Da jedes $J(P_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ von mindestens einem W_k getroffen wird, so ist nach (31), (29), (31a)

$$\begin{aligned}
\tau \sum_{k=1}^{m} f(d_k) &\geqq \tau \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{1}{4} \frac{\omega(P)}{f^{1/s}(2\omega(P))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{(k)} f(2\omega(P_i))}\right) \\
&\geqq \tau f\left(\frac{1}{4} \frac{\omega(P)}{f^{1/s}(2\omega(P))} \mu^{2/s} \lambda^{2/s} \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{n} f(2\omega(P_i))}\right) \\
&> \tau f\left(\frac{1}{8} \omega(P) \lambda^{1/s}\right) \geqq \frac{\lambda\tau}{16^s} f(2\omega(P)).
\end{aligned}$$

Daher ist (die folgende Summe ist über alle Punkte P erster Ordnung zu erstrecken) wegen (25), (20)

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}) > \frac{\lambda\tau}{16^s} \sum_{P} f(2\omega(P)) > \frac{\eta\lambda\tau}{16^s \mu} = \eta.$$

Also ist

$$L_{\varrho_0}(N; f(x)) \geqq \eta;$$

und, da $L_\varrho(N; f(x))$ mit abnehmendem ϱ nicht abnimmt, um so mehr

$$L(N; f(x)) = \lim_{\varrho=0} L_\varrho(N; f(x)) \geqq \eta.$$

Damit ist aber der Satz 8 bewiesen.

§ 6.

Beweis des Satzes 5.

Die Voraussetzungen des Satzes 5 seien erfüllt; da $\frac{\lambda(x)}{x}$ für $x \geqq 1$ nicht abnimmt, so ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda(x)}{x}\right) \geqq 0,$$

also

$$\frac{d\lambda(x)}{dx} \geqq \frac{\lambda(x)}{x} \geqq 1 \quad \text{für} \quad x \geqq 1.$$

Die zu $\lambda(x)$ inverse Funktion $\mu(x)$ ist also für $x \geqq \lambda(1)$ definiert, stetig und wachsend und besitzt für $x \geqq \lambda(1)$ eine stetige und beschränkte Ableitung[91]); es ist $\frac{\mu(x)}{x} \to 0$ für $x \to \infty$. Wir setzen nun im Hilfssatz 1

$$u(x) = 2^s \omega^s(x) x^s \quad \text{für} \quad x \geqq 1,$$

$$l(x) = \frac{\mu^s(x)}{x^s} \frac{d\mu(x)}{dx} \quad \text{für} \quad x \geqq \lambda(1),$$

$$l(x) = l(\lambda(1)) \quad \text{für} \quad 1 \leqq x \leqq \lambda(1)$$

und finden eine Funktion $v(x)$, die die im Hilfssatz 1 angegebenen Eigenschaften besitzt. Es sei $\chi(x)$ die zu $2\omega(x)$ inverse Funktion, die also für $0 < x \leqq 2\omega(1)$ definiert, stetig und abnehmend ist; und zwar ist $\chi(x) \to \infty$ für $x \to 0$, $\chi(2\omega(1)) = 1$.

Wir setzen

$$f(x) = \frac{v(\chi(x))}{\chi^s(x)} \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq 2\omega(1),$$

$$f(x) = \bar{c}\, x^s \quad \text{für} \quad x \geqq 2\omega(1),$$

wo $\bar{c}$ von x unabhängig ist. Also ist $f(x)$ stetig und positiv für $x > 0$. Für $x \geqq 2\omega(1)$ ist $f(x)$ wachsend, $\frac{f(x)}{x^s}$ nicht wachsend; dasselbe gilt aber für $0 < x \leqq 2\omega(1)$; denn für diese Werte von x ist, $\chi(x) = y$ gesetzt (also $x = 2\omega(y)$),

$$f(x) = \frac{v(y)\, y}{y^{s+1}}$$

mit wachsendem y abnehmend, also mit wachsendem x wachsend; und

[91]) Für $x = \lambda(1)$ meine ich die rechtsseitige Ableitung.

zwar ist $f(x) = \frac{v(y)\,y}{y^{s+1}} \to 0$ für $y \to \infty$, d. h. für $x \to 0$; ebenso ist

$$\frac{f(x)}{x^s} = \frac{v(y)}{2^s \omega^s(y)\, y^s} = \frac{v(y)}{u(y)}$$

nicht abnehmend bei wachsendem y, d. h. nicht wachsend bei wachsendem x. Weiter ist

$$f(2\omega(x))\, x^{s+1} = \frac{v(x)}{x^s} \cdot x^{s+1} = v(x) \cdot x$$

monoton für $x \geqq 1$ und

$$\int_1^\infty f(2\omega(x))\, x^s\, dx = \int_1^\infty v(x)\, dx$$

divergent; also ist nach Satz 4

$$L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = \infty. \tag{36}$$

Weiter ist $\omega(\lambda(x))$ für $x \geqq 1$ stetig, positiv und abnehmend; $\omega(\lambda(x)) \to 0$ für $x \to \infty$; und

$$\int_1^\infty f(2\omega(\lambda(x)))\, x^s\, dx = \int_{\lambda(1)}^\infty f(2\omega(y))\, \mu^s(y)\, \frac{d\mu(y)}{dy}\, dy$$

$$= \int_{\lambda(1)}^\infty \frac{v(y)}{y^s}\, \mu^s(y)\, \frac{d\mu(y)}{dy}\, dy = \int_{\lambda(1)}^\infty v(y)\, l(y)\, dy$$

ist konvergent; also ist nach Satz 3

$$L\left(M_e(\omega(\lambda(x)); s); f(x)\right) = 0. \tag{37}$$

Nach (36), (37) muß es also Punkte geben, die zwar in $M_e(\omega(x); s)$, nicht aber in $M_e(\omega(\lambda(x)); s)$ liegen, w. z. b. w.

§ 7.

Bemerkungen zu Satz 3 und 4.

Wir wollen uns jetzt etwas näher über die Tragweite der Sätze 3 und 4 orientieren. Der wesentliche Inhalt dieser Sätze läßt sich etwa folgendermaßen zusammenfassen[22]):

Satz 9. *Es sei* $s \geqq 1$, s *ganz*; $\omega(x)$ *sei für* $x \geqq 1$ *positiv, stetig und abnehmend*; $f(x)$ *sei für* $x > 0$ *positiv, stetig und wachsend*; $\omega(x) \to 0$ *für* $x \to \infty$, $f(x) \to 0$ *für* $x \to 0$.

Weiter sei

a) $\omega^s(x)\, x^{s+1}$ *und* $f(2\omega(x))\, x^{s+1}$ *monoton für* $x \geqq 1$, $\frac{f(x)}{x^s}$ *monoton für* $x > 0$;

b) $\int_1^\infty \omega^s(x)\, x^s\, dx$ *konvergent.*

[22]) Der Satz 3 ist sogar etwas allgemeiner als der entsprechende Teil des Satzes 9.

Dann ist entweder

$$L(M_s(\omega(x); s); f(x)) = 0$$

oder

$$L(M_s(\omega(x); s); f(x)) = \infty,$$

je nachdem das Integral

$$\int_1^\infty f(2\omega(x))\, x^s\, dx$$

konvergiert oder divergiert.

Die Funktion $\omega(x)$ gibt das Approximationsgesetz an, welches wir untersuchen; die Funktion $f(x)$ gibt das Gesetz an, nach welchem das Maß einer Menge gemessen wird. Es ist daher ganz natürlich, wenn wir uns auf solche Funktionen $\omega(x)$ und $f(x)$ beschränken, deren Verlauf gewissermaßen regelmäßig ist, für welche also z. B. die Funktionen $\omega^s(x)\, x^{s+1}$, $f(2\omega(x))\, x^{s+1}$ für große x, $\frac{f(x)}{x^s}$ für kleine $x > 0$ monoton sind (für allzu wilde Funktionen $f(x)$, $\omega(x)$ wäre übrigens der Satz 9 sicher falsch). Wenn wir noch bedenken, daß $L(M_s(\omega(x); s); f(x))$ nur von dem Verhalten von $\omega(x)$ für *große* x und von dem Verhalten von $f(x)$ für *kleine* $x > 0$ abhängt, so sehen wir, daß die Bedingungen a) der Natur des Problems ganz angemessen sind. Dagegen aber bedeutet die Bedingung b) eine wesentliche Einschränkung; z. B. über die Approximation

$$\omega(x) = x^{-1-\frac{1}{s}} \log^{-\frac{1}{s}}(1+x)$$

besagt der Satz 9 gar nichts. Worin liegt das?

Es sei A eine beschränkte Punktmenge in R_s; es sei $L(A) > 0$; wir haben schon bemerkt, daß $L(A) = L(A; x^s)$. Es sei nun $f(x)$ für $x > 0$ positiv, stetig und wachsend, $f(x) \to 0$ für $x \to 0$, $f(x)\, x^{-s}$ monoton für $x > 0$. Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)}{x^s} = \alpha \qquad (0 \leqq \alpha \leqq \infty)$$

und offenbar gilt:

Wenn $\alpha = 0$, so ist $L(A; f(x)) = 0$;

wenn $0 < \alpha < \infty$, so ist $L(A; f(x)) = \alpha L(A)$;

wenn $\alpha = \infty$, so ist $L(A; f(x)) = \infty$.

Sobald wir also $L(A)$ kennen, können wir sofort auch $L(A; f(x))$ bestimmen: der feinere Maßbegriff $L(A; f(x))$ gibt uns also im Falle $L(A) > 0$ gegenüber dem äußeren Lebesgueschen Maß $L(A)$ nichts wesentlich Neues. Wenn nun $\int_1^\infty \omega^s(x)\, x^s\, dx$ divergiert, so ist nach dem Khintchineschen Satz $L(M_s(\omega(x); s)) = 1$, also hat es keinen Sinn, die Menge $M_s(\omega(x); s)$ (d. h. also die Menge derjenigen eigentlichen Systeme des Würfels $0 \leqq \theta_i < 1$,

welche die Approximation $\omega(x)$ zulassen) mit Hilfe des Hausdorffschen Maßbegriffes zu untersuchen. Man müßte hier die Frage anders stellen: im Falle der Divergenz von $\int_1^\infty \omega^s(x)\, x^s\, dx$ hat die Menge derjenigen Systeme, welche die Approximation $\omega(x)$ *nicht* zulassen, das Lebesguesche Maß Null, also könnte man versuchen, *diese* Menge mit Hilfe des Hausdorffschen Maßbegriffes zu untersuchen. Ich habe bereits in dieser Richtung im Spezialfall $s = 1$ verschiedenes bewiesen[23]). Der Beweis beruhte aber wesentlich auf der Theorie der Kettenbrüche, so daß eine direkte Übertragung auf den (interessantesten) Fall $s > 1$ aussichtslos erscheint.

§ 8.

Bemerkungen zu Satz 5; Satz 6.

Der Satz 5 ist sehr scharf für solche Funktionen $\omega(x)$, die für $x \to \infty$ nicht allzu stark abnehmen; wenn z. B.

$$s = 2, \quad \omega_1(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}, \quad \omega_2(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}} \log 3x},$$

so besagt der Satz 5: es gibt eigentliche Systeme (θ_1, θ_2), welche zwar die Approximation $\omega_1(x)$, nicht aber die Approximation $\omega_2(x)$ zulassen; es genügt nämlich, im Satz 5

$$s = 2, \quad \omega(x) = \omega_1(x), \quad \lambda(x) = x \log^{\frac{1}{4}} 3x \quad (\text{also } \omega(\lambda(x)) = \omega_2(x))$$

zu setzen.

Für allzu stark abnehmende Funktionen $\omega(x)$ ist aber der Satz 5 ziemlich schwach; wenn wir z. B. für $s = 2$, $\omega_1(x) = e^{-x}$, $\omega_2(x) = e^{-2x}$ fragen, ob es eigentliche Systeme (θ_1, θ_2) gibt, die zwar die Approximation $\omega_1(x)$, nicht aber die Approximation $\omega_2(x)$ zulassen, so gibt uns der Satz 5 keine Antwort; denn wenn wir versuchen, $\omega(x) = \omega_1(x)$, $\omega(\lambda(x)) = \omega_2(x)$ zu setzen, so kommt $\lambda(x) = 2x$ heraus und die Voraussetzungen des Satzes 5 sind nicht erfüllt[24]). Für solche allzu stark abnehmende Funktionen $\omega(x)$, nämlich für solche Funktionen, die „wesentlich kleiner" als x^{-2} sind, kann man aber den Satz 5 durch einen viel schärferen Satz ersetzen, nämlich durch den folgenden

Satz 6. *Es sei $\omega(x)$ für $x \geqq 1$ positiv und abnehmend, $\omega(x) = o(x^{-2})$ (für $x \to \infty$). Dann gibt es für jedes ganze $s \geqq 1$ ein eigentliches System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, welches zwar die Approximation $\omega(x)$, aber keine Approximation $c\,\omega(x)$ $(0 < c < 1$, c von x unabhängig$)$ zuläßt.*

---

[23]) Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Prace mate matyczno-fizyczne **36**, 2. Heft (1928/29).

[24]) Eine nähere Diskussion der Tragweite des Satzes 5 kann dem Leser überlassen werden.

Beweis. Wir beweisen zuerst den Satz 6 für $s=1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\omega(x)<\frac{1}{2x^2}$. Jeder unendliche regelmäßige Kettenbruch[25])

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\ldots$$

definiert eine irrationale Zahl θ $(0<\theta<1)$. Es sei $\frac{p_n}{q_n}$ sein n-ter Näherungsbruch in irreduzibler Form; dann ist

$$q_{n+1}=b_{n+1}q_n+q_{n-1}, \qquad \frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)}<\left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Wir wählen die ganzen positiven Zahlen $b_1, b_2, \ldots$ sukzessive so, daß

$$b_{n+1}\omega(q_n)q_n^2>1, \qquad \lim_{n=\infty} b_{n+1}\omega(q_n)q_n^2=1$$

(das geht, weil $\omega(q_n)q_n^2\to 0$); dann ist $b_{n+1}\to\infty$, also $q_{n+1}>\frac{1}{q_n\omega(q_n)}$, $q_{n+1}+q_n\sim\frac{1}{q_n\omega(q_n)}$ und daher

$$\left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|<\omega(q_n), \qquad \left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|\sim\omega(q_n).$$

Wäre nun für unendlich viele Paare von ganzen Zahlen a_n, c_n $(n=1,2,\ldots; c_n\to\infty)$

$$\left|\theta-\frac{a_n}{c_n}\right|<c\,\omega(c_n), \tag{38}$$

wo $0<c<1$ und c von n nicht abhängt, so wäre wegen $\omega(c_n)<\frac{1}{2c_n^2}$ sicher $\frac{a_n}{c_n}$ einem Näherungsbruch von θ gleich, also (l_n ganz) $a_n=l_n p_m$, $c_n=l_n q_m$, wo offenbar $m\to\infty$ für $n\to\infty$; also wäre (weil $\omega(x)$ abnimmt)

$$\left|\theta-\frac{a_n}{c_n}\right|\sim\omega(q_m)\geqq\omega(c_n),$$

im Widerspruch gegen (38).

Für $s=1$ ist also der Satz 6 wahr; wir wollen ihn also durch Induktion beweisen. Es sei also $s\geqq 1$; $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)$ sei ein eigentliches System, welches zwar die Approximation $\omega(x)$, aber keine Approximation $c\,\omega(x)$ $(0<c<1$, c von x unabhängig) zuläßt. Es genügt zu zeigen: es gibt eine reelle Zahl θ_{s+1}, so daß $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s,\theta_{s+1})$ ein eigentliches System ist, welches die Approximation $\omega(x)$ zuläßt[26]).

---

[25]) Wegen der benutzten Sätze über Kettenbrüche vgl. z. B. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Leipzig und Berlin, 1913), insbes. S. 37—55.

[26]) Denn, daß dieses System keine Approximation $c\,\omega(x)$ $(0<c<1$, c unabhängig von $x)$ zuläßt, ist klar, da dasselbe bereits vom System $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)$ gilt.

Dies beweisen wir wie folgt. Es seien $k_1, k_2, \ldots, k_s$ ganze Zahlen, $k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_s^2 > 0$. Wenn x alle ganzen Zahlen durchläuft, so hat der Ausdruck $\left| x + \sum_{i=1}^{s} k_i \theta_i \right|$ ein *positives* Minimum

$$a(k_1, k_2, \ldots, k_s).$$

(Denn $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ist ein eigentliches System.) Es sei für ganzes $q > 0$

$$A(q) = \min_{\substack{|k_i| \leqq q^2 \\ \sum_{i=1}^{s} k_i^2 > 0}} a(k_1, k_2, \ldots, k_s).$$

Es gibt eine Folge von Systemen von ganzen Zahlen

$$q_n, p_{1,n}, p_{2,n}, \ldots, p_{s,n} \qquad (n = 1, 2, \ldots; q_n \to \infty),$$

so daß

$$\left| \theta_i - \frac{p_{i,n}}{q_n} \right| < \omega(q_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{39}$$

Wir wählen nun zwei Folgen von ganzen Zahlen

$$n_1, n_2, \ldots; \; p_{s+1,n_1}, p_{s+1,n_2}, \ldots \qquad (0 < n_1 < n_2 < \ldots)$$

folgendermaßen: $n_1 = 1$; $p_{s+1,n_1} = 0$; wenn

$$n_1, n_2, \ldots, n_k; \; p_{s+1,n_1}, p_{s+1,n_2}, \ldots, p_{s+1,n_k}$$

bereits gewählt sind, so wählen wir n_{k+1} und $p_{s+1,n_{k+1}}$ folgendermaßen: $n_{k+1} > n_k$ sei so groß, daß

$$q_{n_{k+1}} > \max\left(\frac{3^k}{\omega(q_{n_1})}, \frac{3^{k-1}}{\omega(q_{n_2})}, \ldots, \frac{3}{\omega(q_{n_k})} \right),$$

$$q_{n_{k+1}} > \max\left(\frac{3^k q_{n_1}^2}{A(q_{n_1})}, \frac{3^{k-1} q_{n_2}^2}{A(q_{n_2})}, \ldots, \frac{3 q_{n_k}^2}{A(q_{n_k})} \right).$$

Dann können und wollen wir die ganze Zahl $p_{s+1,n_{k+1}}$ so wählen, daß für $i = 1, 2, \ldots, k$ gilt

$$0 < \frac{p_{s+1,n_{k+1}}}{q_{n_{k+1}}} - \frac{p_{s+1,n_k}}{q_{n_k}} < \min\left(\frac{\omega(q_{n_i})}{3^{k+1-i}}, \frac{A(q_{n_i})}{3^{k+1-i} q_{n_i}^2} \right). \tag{40}$$

Aus (40) folgt dann für $k' > k$

$$0 < \frac{p_{s+1,n_{k'}}}{q_{n_{k'}}} - \frac{p_{s+1,n_k}}{q_{n_k}} < \omega(q_{n_k}) \sum_{i=1}^{k'-k} \frac{1}{3^i}, \tag{41}$$

$$0 < \frac{p_{s+1,n_{k'}}}{q_{n_{k'}}} - \frac{p_{s+1,n_k}}{q_{n_k}} < \frac{A(q_{n_k})}{q_{n_k}^2} \sum_{i=1}^{k'-k} \frac{1}{3^i}. \tag{42}$$

Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{k=\infty} \frac{p_{s+1,n_k}}{q_{n_k}} = \theta_{s+1}$$

und es ist nach (41)

$$0 < \theta_{s+1} - \frac{p_{s+1,n_k}}{q_{n_k}} \leqq \frac{\omega(q_{n_k})}{2}; \tag{43}$$

aus (39), (43) folgt, daß das System $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, \theta_{s+1})$ die Approximation $\omega(x)$ zuläßt; aus (43) folgt wegen $\omega(x) = o(x^{-1})$, daß θ_{s+1} irrational ist.

Wir wollen nun voraussetzen, daß eine Gleichung

$$k_0 + \sum_{i=1}^{s+1} k_i \theta_i = 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{s+1} k_i^2 > 0\right) \tag{44}$$

besteht, wo k_i $(i = 0, 1, \ldots, s+1)$ ganze Zahlen sind. Dann ist $k_{s+1} \neq 0$ (denn $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ist ein eigentliches System), $\sum_{i=1}^{s} k_i^2 > 0$ (denn θ_{s+1} ist irrational). Wir wählen nun ein k so, daß

$$q_{n_k}^2 \omega(q_{n_k}) < \frac{1}{s+1}, \qquad q_{n_k} > \max(|k_1|, |k_2|, \ldots, |k_{s+1}|).$$

Dann folgt aus (44)

$$k_0 q_{n_k} + \sum_{i=1}^{s+1} k_i p_{i,n_k} + \sum_{i=1}^{s+1} k_i (q_{n_k}\theta_i - p_{i,n_k}) = 0;$$

also ist einerseits

$$\sum_{i=1}^{s+1} k_i (q_{n_k}\theta_i - p_{i,n_k}) \text{ ganz},$$

andererseits

$$\left|\sum_{i=1}^{s+1} k_i (q_{n_k}\theta_i - p_{i,n_k})\right| < (s+1) q_{n_k}^2 \omega(q_{n_k}) < 1,$$

also

$$\sum_{i=1}^{s+1} k_i (q_{n_k}\theta_i - p_{i,n_k}) = 0.$$

Daraus folgt aber

$$k_{s+1} q_{n_k}\left(\theta_{s+1} - \frac{p_{s+1,n_k}}{q_{n_k}}\right) = \sum_{i=1}^{s} k_i p_{i,n_k} - \sum_{i=1}^{s} k_i q_{n_k}\theta_i,$$

also $\left(\text{weil } |k_i| < q_{n_k},\ \sum_{i=1}^{s} k_i^2 > 0\right)$

$$\left|k_{s+1} q_{n_k}\left(\theta_{s+1} - \frac{p_{s+1,n_k}}{q_{n_k}}\right)\right| \geqq A(q_{n_k});$$

also

$$\left|\theta_{s+1} - \frac{p_{s+1,n_k}}{q_{n_k}}\right| \geqq \frac{A(q_{n_k})}{q_{n_k}^2}.$$

Dies ist aber im Widerspruch gegen (42); denn aus (42) folgt für $k' \to \infty$

$$\left|\theta_{s+1} - \frac{p_{s+1,n_k}}{q_{n_k}}\right| \leqq \frac{A(q_{n_k})}{2 q_{n_k}^2}.$$

Also enthält die Annahme, daß eine Gleichung von der Form (44) besteht, einen Widerspruch, also ist $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s+1})$ ein eigentliches System, womit Satz 6 bewiesen ist.

Man sieht, daß der Kern des Satzes 6 in dem eindimensionalen Fall $(s=1)$ liegt: man realisiert zunächst die gesuchten Approximationsverhältnisse für $s=1$ durch eine Zahl θ_1 und fügt dann weitere Zahlen $\theta_2, \theta_3, \ldots$ hinzu, wobei man nur dafür zu sorgen hat, daß die bei θ_1 erreichte Approximation durch diese Erweiterung nicht gestört wird. Es ist klar, daß jeder Verschärfung oder jedem Analogon des Satzes 6 für $s=1$ (und man kennt viele solche interessante Verschärfungen und Analoga) eine Verschärfung oder ein Analogon des Satzes 6 für beliebiges s entspricht; ich gehe aber nicht näher darauf ein. Der Beweis des Satzes 6 hat gegenüber demjenigen des Satzes 5 den Vorzug, daß er einen konstruktiven Charakter besitzt, wogegen der Satz 5 ein reiner Existenzsatz ist; auch ist der Beweis des Satzes 6 unvergleichlich einfacher. Dagegen ist aber die Beweismethode des Satzes 6 nur bei denjenigen Approximationsverhältnissen anwendbar, die für $s=1$ realisierbar sind (roh gesagt also dann, wenn die behandelte Approximation „besser" als $\frac{1}{x^2}$ ist); in den übrigen Fällen (und diesen Fällen kommt von unserem Standpunkt aus gewiß das größte Interesse zu, denn eben hier äußern sich die dem Fall $s>1$ eigenen Verhältnisse) steht uns nur der Satz 5 zur Verfügung.

Potštejn in Böhmen, den 13. Juni 1930.

(Eingegangen am 17. Juni 1930.)

Some problems of diophantine approximation (I).

By

S. D. Chowla in Cambridge.

---

1. Introduction. Let[1])

$$\theta = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots \tag{1}$$

be an infinite simple continued fraction. When θ has bounded partial quotients Hardy and Littlewood[2]) have proved that

$$\sum_{n \leqq x} e^{2\pi i n^2 \theta} = O(x^{\frac{1}{2}}). \tag{2}$$

More general sums have recently been considered by Oppenheim[3]). He found that if θ has b. p. q. then, for $k > 2$,

$$\sum_{n \leqq x} r_k(n)\, e^{n\pi\theta i} = O(x^{\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}}) \tag{3}$$

and

$$\sum_{n \leqq x} r(n)\, e^{n\pi\theta i} = O(x^{\frac{1}{2}} \log x) \tag{4}$$

where $r(n) = r_2(n)$ and

$$r_k(n) = \sum_{n_1^2 + \dots + n_k^2 = n} 1 \tag{5}$$

is the number of representations of n as a sum of k squares.

I[4]) have recently proved that if θ has b. p. q., then

$$\sum_{n \leqq x} r_k(n)\, e^{n\pi\theta i} = O(x^{\frac{1}{2}k - 1}) \tag{6}$$

---

[1]) Throughout this paper θ denotes an irrational number. When $a_n = O(1)$ I shall say for brevity that "θ has bounded partial quotients", or even that "θ has b. p. q.".

[2]) Acta Math. 37 (1914), pp. 193–238.

[3]) Proc. Lond. Math. Soc. 28 (1928), pp. 476–483.

[4]) "Note on a trigonometric sum", Jour. Lond. Math. Soc. 5 (1930), pp. 176–178.

for $k \geqq 12$. This result, which is an improvement of Oppenheim's (3), is "best possible". Dr. Walfisz, to whom I communicated my result, proved (6) for $k \geqq 5$, and also improved Oppenheim's (3) in the case $k = 3$. His paper follows mine.

In this paper I treat the case $k = 4$. When θ has b. p. q. I prove that

$$\sum_{n \leqq x} r_4(n)\, e^{n\pi\theta i} = O(x \log^2 x). \tag{7}$$

I next prove a general result, which gives as particular cases (4) and results like

$$\sum_{n \leqq x} d(n)\, e^{2n\pi\theta i} = O(x^{\frac{1}{2}} \log x) \tag{8}$$

where $d(n)$ is the number divisors of n.

Now let

$$\sigma_a(n) = \sum_{d \mid n} d^a. \tag{9}$$

When a is positive and θ any irrational number I prove that

$$\sum_{n \leqq x} \sigma_a(n)\, e^{2n\pi\theta i} = o(x^{a+1}) \tag{10}$$

and

$$\sum_{n \leqq x} d(n)\, e^{2n\pi\theta i} = o(x \log x). \tag{11}$$

In connection with (11) I prove the interesting result that if $\varphi(x)$ is any positive decreasing function tending to 0 as x tends to ∞, then it is possible to find irrationals θ such that

$$\sum_{n \leqq x} d(n)\, e^{2n\pi\theta i} = \Omega(x \log x\, \varphi(x)). \tag{12}$$

A similar result with $r(n)$ in place of $d(n)$: that it is possible to find irrationals θ such that

$$\sum_{n \leqq x} r(n)\, e^{2n\pi\theta i} = \Omega(x\, \varphi(x)) \tag{13}$$

is mentioned in Oppenheim's paper.

Now let $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, where $[x]$ denotes the greatest integer contained in x. If θ is any irrational number I prove that for $a > 0$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^{a+1}} \sin 2n\pi\theta \tag{14}$$

converges and is equal to

$$-\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{\psi(n\theta)}{n^{1+a}}. \tag{15}$$

When $a = 1$ this result has been proved by Landau[5]).

[5]) Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême, Classe des Sciences, 1919.

In the case $a = 0$ I prove that

$$\sum_1^\infty \frac{d(n)}{n} \sin(2n\pi\theta) = -\pi \sum_1^\infty \frac{\psi(n\theta)}{n} \tag{16}$$

in the special case when θ has bounded partial quotients. I also prove that there are irrationals θ such that

$$\sum_1^\infty \frac{d(n)}{n} \cos(2n\pi\theta) \tag{17}$$

diverges. Although I am not able to prove such a result for the left side of (16), I do prove that we can find irrationals θ such that

$$\sum_1^\infty \frac{\psi(n\theta)}{n} \tag{18}$$

diverges.

I now proceed to the proofs of (7), (8), (10), (11) and (12), The next few sections are devoted to the proofs of some lemmas.

2. Lemma 1. *If θ has bounded partial quotients, then*

$$\sum_{n \leqq x} \frac{1}{|\sin n\pi\theta|} = O(x \log x). \tag{19}$$

Proof. Let

$$\{u\} = \text{Min}(u - [u],\ [u] + 1 - u). \tag{21}$$

Let $q_1, q_2, q_3, \ldots$ be the denominators of the convergents to θ in (1). Behnke[6]) has proved that

$$\sum_{n < q_m} \frac{1}{\{n\theta\}} = O(q_m \log q_m). \tag{22}$$

Let m be the unique integer such that

$$q_{m-1} \leqq x < q_m. \tag{23}$$

From (22) and (23) we obtain

$$\sum_{u \leqq x} \frac{1}{\{n\theta\}} \leqq \sum_{n < q_m} \frac{1}{\{n\theta\}} = O(q_m \log q_m). \tag{24}$$

Now since $a_n = O(1)$,

$$q_m < (a_m + 1)\, q_{m-1} \leqq (a_m + 1)\, x = O(x). \tag{25}$$

From (24) and (25) it follows that

$$\sum_{n \leqq x} \frac{1}{\{n\theta\}} = O(x \log x). \tag{26}$$

---

[6]) Abhandlungen des Mathematischen Seminars Hamburg 3 (1924), pp. 261–318.

Since

$$|\sin \pi x| \geqq 2\{x\}. \tag{27}$$

Lemma 1 is equivalent to (26).

I now prove

3. Lemma 2. *If* $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ *be two fractions such that*

$$p q' - p' q = \pm 1 \tag{28}$$

then the relation

$$\operatorname{Min}\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right) < \frac{a}{b} < \operatorname{Max}\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right) \tag{29}$$

is impossible unless

$$b > \operatorname{Max}(q, q'). \tag{30}$$

Proof. Without loss of generality we can suppose that

$$\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{p'}{q'}. \tag{31}$$

From (28) and (31) it follows that

$$\frac{p'}{q'} - \frac{a}{b} < \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{1}{q q'}. \tag{32}$$

From (32) it follows that

$$b > q(b p' - a q') \geqq q. \tag{33}$$

Again, we have from (28) and (31)

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{1}{q q'}, \tag{34}$$

whence

$$b > q'(a q - b p) \geqq q'. \tag{35}$$

From (33) and (35) we obtain (30).

I now prove[7])

4. Lemma 3. *If*

$$\theta = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots \tag{36}$$

is an infinite simple continued fraction and

$$\operatorname{Max}(1 + a_n) = K (< \infty) \tag{37}$$

then if u, v *are any positive integers and*

$$\frac{u}{v}\theta = b_1 + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots \tag{38}$$

we have

$$\operatorname{Max} b_n < 2 u v K^3. \tag{39}$$

[7]) I do not use the full force of Lemma 3 in the present paper.

Proof. Let us denote by (c, d) the greatest common divisor of c and d. Write

$$\frac{c}{(c,d)} = c', \quad \frac{d}{(c,d)} = d'. \tag{40}$$

Further let $\frac{p_n}{q_n}$ be the nth convergent to θ in (36) and $\frac{p'_n}{q'_n}$ the nth convergent to $\frac{u}{v}\theta$ in (38).

Let n be the unique integer such that

$$q_n \leqq d' < q_{n+1}. \tag{41}$$

Since $p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = \pm 1$ it follows from Lemma 2 and (41) that

$$\left|\theta - \frac{c}{d}\right| = \left|\theta - \frac{c'}{d'}\right| > \left|\theta - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geqq \frac{1}{2 q_{n+1} q_{n+2}} \tag{42}$$

$$\geqq \frac{1}{2(a_{n+2}+1)(a_{n+1}+1)^2 q_n^2} \geqq \frac{1}{2K^3 q_n^2} \geqq \frac{1}{2K^3 d'^2} \geqq \frac{1}{2K^3 d^2}.$$

From (42) it follows that

$$\left|\theta - \frac{vc}{ud}\right| > \frac{1}{2K^3 u^2 d^2} \tag{43}$$

whence

$$\left|\frac{u}{v}\theta - \frac{c}{d}\right| > \frac{1}{2K^3 u v d^2}. \tag{44}$$

If possible suppose that (39) is not true. Then there is a b_{n+1} such tha

$$b_{n+1} \geqq 2uvK^3. \tag{45}$$

From (45) it would follow that

$$\left|\frac{u}{v}\theta - \frac{p'_n}{q'_n}\right| < \frac{1}{q'_n q'_{n+1}} < \frac{1}{b_{n+1} q'^2_n} \leqq \frac{1}{2uvK^3 q'^2_n}. \tag{46}$$

Since (46) contradicts (44), (45) is false and Lemma 3 is proved. I particular we see that

(47) *If θ has bounded partial quotients then so has $\frac{u}{v}\theta$, where u, v ar any positive integers.*

I now prove

5. Lemma 4. *If*

$$v \text{ is prime}, \tag{48}$$

$$v = o(x), \tag{49}$$

$$1 \leqq c \leqq v - 1 \tag{50}$$

then[8])

$$S(x, v) = \sum_{n=1}^{x} d(nv + c) = \left(1 - \frac{1}{v}\right) x \log x + O(x \log v). \tag{51}$$

[8]) The constants implied in the order symbols are independant both of v and x

Proof. We have

$$d(n) = 2\Big(\sum_{\substack{d \mid n \\ d \leqq n^{\frac{1}{2}}}} 1\Big) - k_n \tag{52}$$

where $k_n = 1$ or 0 according as n is or is not a perfect square. From (51) and (52) it follows that

$$S(x,v) = 2\Big(\sum_{m \leqq (vx+c)^{\frac{1}{2}}} g(m)\Big) + O\big((vx+c)^{\frac{1}{2}}\big) \tag{53}$$

$$= 2\Big(\sum_{m \leqq (vx+c)^{\frac{1}{2}}} g(m)\Big) + O\big((vx)^{\frac{1}{2}}\big) = 2\Big(\sum_{m \leqq (vx+c)^{\frac{1}{2}}} g(m)\Big) + O(x)$$

by (49), where

$$g(m) = \sum_{\substack{nv \equiv -c \,(\mathrm{mod}\, m) \\ \mathrm{Max}\left(1, \frac{m^2-c}{v}\right) \leqq n \leqq x}} 1. \tag{54}$$

Since $1 \leqq c \leqq v-1$ it is obvious that

$$g(m) = \frac{x}{m} + O\Big(\frac{m}{v}\Big) + O(1) = \frac{x}{m} + O\Big(\sqrt{\frac{x}{v}}\Big) \tag{55}$$

if $(v, m) = 1$, and

$$g(m) = 0 \tag{56}$$

if $m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, v)$.

From (53), (55) and (56) it follows that

$$S(x,v) = 2x \sum_{\substack{m \leqq (vx+c)^{\frac{1}{2}} \\ (m,v)=1}} \frac{1}{m} + O\Big(\sum_{m \leqq (vx+c)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{x}{v}}\Big) + O(x) \tag{57}$$

$$= 2x \sum_{m \leqq (vx+c)^{\frac{1}{2}}}{}' \frac{1}{m} - \frac{2x}{v} \sum_{m \leqq \frac{(vx+c)^{\frac{1}{2}}}{v}}{}' \frac{1}{m} + O\Big(\sqrt{vx \cdot \frac{x}{v}}\Big) + O(x)$$

$$= 2x\Big(\frac{1}{2}\log(vx+c) + O(1)\Big) - \frac{2x}{v}\Big(\frac{1}{2}\log(vx+c) - \log v + O(1)\Big) + O(x)$$

$$= \Big(1 - \frac{1}{v}\Big) x \log x + O(x \log v).$$

6. Lemma 5. *If*

$$v \text{ is prime}, \tag{58}$$

$$v < x^{\frac{1}{2}}, \tag{59}$$

$$1 \leqq c \leqq v-1 \tag{60}$$

then

$$T(x,v) = \sum_{n \leqq x} \frac{d(nv+c)}{nv+c} \tag{61}$$

$$= \frac{1}{2v}\Big(1 - \frac{1}{v}\Big)\log^2 x + O\Big(\frac{\log x \log v}{v}\Big) + O(\log^2 v).$$

Proof. We have by Lemma 4,

$$T(x,v)=\sum_{n\leqq v^2}\frac{d(nv+c)}{nv+c}+\sum_{v^2<n\leqq x}\frac{S(n,v)-S(n-1,v)}{nv+c} \tag{62}$$

$$=O(\log^2 v)+\frac{S(x,v)}{xv+c}-\frac{S(v^2,v)}{v^2+c}+\sum_{v^2<n<x}\frac{vS(n,v)}{(nv+c)(nv+v+c)}$$

$$=O(\log^2 v)+O\left(\frac{\log x}{v}\right)+O\left(\frac{\log v}{v}\right)+\sum_{v^2<n<x}\frac{\left(1-\frac{1}{v}\right)nv\log n+O(nv\log v)}{n^2v^2+O(nv^2)}$$

$$=O(\log^2 v)+O\left(\frac{\log x}{v}\right)+\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v^2}\right)\left(\frac{1}{2}\log^2 x+O(\log^2 v)\right)+O\left(\frac{\log x\log v}{v}\right)$$

$$=\frac{1}{2v}\left(1-\frac{1}{v}\right)\log^2 x+O\left(\frac{\log x\log v}{v}\right)+O(\log^2 v).$$

7. Lemma 6. *If*

$$v \text{ is prime}, \tag{63}$$

$$v<x^{\frac{1}{2}} \tag{64}$$

then

$$\sum_{n\leqq x}\frac{d(nv)}{nv}=\frac{2v-1}{2v^2}\log^2 x+O(\log x\log v)+O(v\log^2 v). \tag{65}$$

Proof. We have

$$\sum_{n\leqq x}d(n)=\sum_{n\leqq x}\left[\frac{x}{n}\right]=x\log x+O(x). \tag{66}$$

By partial summation it follows that

$$\sum_{n\leqq x}\frac{d(n)}{n}=\frac{1}{2}\log^2 x+O(\log x). \tag{67}$$

From (67) and Lemma 5 we deduce that

$$\sum_{n\leqq x+1}\frac{d(nv)}{nv}=\sum_{n\leqq vx+v}\frac{d(n)}{n}-\sum_{n<v}\frac{d(n)}{n}-\sum_{c=1}^{v-1}\sum_{n\leqq x}\frac{d(nv+c)}{nv+c} \tag{68}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\log^2(vx+v)+O(\log vx)\right)+O(\log^2 v)-\frac{1}{2}\frac{(v-1)^2}{v^2}\log^2(x)$$
$$+O(\log x\log v)+O(v\log^2 v)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log(vx)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2-\frac{1}{2}\frac{(v-1)^2}{v^2}\log^2(x)+O(\log x\log v)+O(v\log^2 v)$$

$$=\frac{2v-1}{2v^2}\log^2 x+O(\log x\log v)+O(v\log^2 v).$$

8. Lemma 7. *If*

(69) $$v \text{ is prime},$$

(70) $$v = o(x)$$

then

(71) $$\sum_{n \leqq x} d(nv) = \left(2 - \frac{1}{v}\right) x \log x + O(vx \log v).$$

Proof. From Lemma 4 we have

(72) $$\sum_{n \leqq x+1} d(nv) = \sum_{n \leqq vx+v} d(n) - \sum_{n<v} d(n) - \sum_{c=1}^{v-1} \sum_{n \leqq x} d(nv+c)$$

$$= (vx+v)\log(vx+v) + O(vx) + O(v \log v) - \frac{(v-1)^2}{v} x \log x + O(vx \log v)$$

$$= \left(2 - \frac{1}{v}\right) x \log x + O(vx \log v).$$

9. Lemma 8.

(73) $$r_4(n) = 8\sigma(n) - 32\sigma\left(\frac{n}{4}\right)$$

where $\sigma(x) = \sigma_1(x)$ *if* x *is a positive integer,* $\sigma(x) = 0$ *if* x *is not a positive integer.*

Proof. See the proof of (2.3) in Walfisz's paper "Teilerprobleme"[9]).

Lemma 9. *If* $0 < \beta < \frac{1}{2}$ *then, for every irrational number* θ, *we have*

(74) $$\sum_{\substack{\{n\theta\} \leqq \beta \\ n \leqq x}} 1 = N(\beta, x) = 2\beta x + o(x).$$

Proof. This follows from the well-known result[10])

(75) $$\sum_{\substack{n\theta - [n\theta] \leqq \beta \\ n \leqq x}} 1 = \beta x + o(x).$$

10. Lemma 10. *We have*[11]), *for real* u *and integers* $n > 0$

(76) $$\left| \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\sin 2m\pi u}{m} \right| < c_1 \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{n\{u\}}\right).$$

Proof. See Satz 412 of Landau's "Vorlesungen über Zahlentheorie".

I now prove[12])

11. Theorem 1. *If* u, v *are positive integers and* θ *has bounded partial quotients*

(77) $$\sum_{n \leqq x} \sigma(n)\, e\left(n\pi \frac{u}{v}\theta i\right) = O(x \log^2 x).$$

---

[9]) Math. Zeitschr. 26 (1927), pp. 66–88.

[10]) See Weyl's paper in Math. Annalen 77 (1916), pp. 313–352.

[11]) $c_1, c_2, \ldots$ denote absolute constants.

[12]) Sometimes it is convenient to write $e(x)$ for e^x.

Proof. From (47) it follows that it is enough to prove (77) in the special case $u=2,\ v=1$. We have

$$(78)\qquad \Big|\sum_{n\leqq x}\frac{\sigma(n)}{n}e(2n\pi\theta i)\Big| = \Big|\sum_{d\leqq x}\frac{1}{d}\Big(\sum_{n\leqq\frac{x}{d}}e(2nd\pi\theta i)\Big)\Big|$$

$$< c_2\sum_{d\leqq x}\frac{1}{d\,|\sin d\pi\theta|} = O(\log^2 x)$$

by partial summation from Lemma 1. Finally by partial summation from (78) we obtain the special case $u=2,\ v=1$ of (77). Thus Theorem 1 is proved.

From Theorem 1 and Lemma 8 we obtain at once

Theorem 2. *If u, v are positive integers and θ has bounded partial quotients then*

$$(79)\qquad \sum_{n\leqq x}r_4(n)\,e\Big(n\pi\frac{u}{v}\theta i\Big) = O(x\log^2 x).$$

I now prove[13])

12. Theorem 3. *Let a, b, c, d be any positive integers. We define $t(n)$ as the coefficient of n^{-s} in the Dirichlet product of the series*

$$(80)\qquad \sum a_n n^{-s} = a^{-s}+(a+b)^{-s}+(a+2b)^{-s}+\ldots$$

and

$$(81)\qquad \sum c_n n^{-s} = c^{-s}+(c+d)^{-s}+(c+2d)^{-s}+\ldots.$$

Then if u, v are positive integers and θ has bounded partial quotients,

$$(82)\qquad \sum_{n\leqq x}t(n)\,e\Big(n\pi\frac{u}{v}\theta i\Big) = O(x^{\frac{1}{2}}\log x).$$

Proof. By (47) it is enough to prove (82) in the special case $u=2,\ v=1$. From (80) and (81) we have

$$(83)\qquad t(n) = \sum_{d\mid n}a_d c_{\frac{n}{d}} = \sum_{\substack{d\mid n\\ d\leqq n^{\frac{1}{2}}}}a_d c_{\frac{n}{d}} + \sum_{\substack{d\mid n\\ d\leqq n^{\frac{1}{2}}}}c_d a_{\frac{n}{d}} - k_n a_{n^{\frac{1}{2}}} c_{n^{\frac{1}{2}}}$$

where $k_n=1$ or 0 according as n is or is not a perfect square; if m is a positive integer a_m and c_m are defined by (80) and (81). If m is not a positive integer we have $a_m = c_m = 0$.

Since a_n, c_n are $O(1)$ it follows from (83) that

$$(84)\qquad \sum_{n\leqq x}t(n)\,e(2n\pi\theta i)$$

$$= O(x^{\frac{1}{2}}) + \sum_{m\leqq x^{\frac{1}{2}}}\Big(c_m\sum_{m\leqq n\leqq\frac{x}{m}}a_n e(2mn\pi\theta i)\Big) + \sum_{m\leqq x^{\frac{1}{2}}}\Big(a_m\sum_{m\leqq n\leqq\frac{x}{m}}c_n e(2mn\pi\theta i$$

[13]) In the whole of section 12 I have avoided using $c_1, c_2, \ldots$ in the sense of footnote [11]) in order to avoid confusion with the new cs defined in (81).

From (80) and (81) it follows that

$$\sum_{n\leqq x} c_n e(2mn\pi\theta i) = O\Big(\frac{1}{|\sin md\pi\theta|}\Big) \tag{85}$$

and

$$\sum_{n\leqq x} a_n e(2mn\pi\theta i) = O\Big(\frac{1}{|\sin mb\pi\theta|}\Big). \tag{86}$$

From (84), (85) and (86) it follows that

$$\sum_{n\leqq x} t(n) e(2n\pi\theta i) = O(x^{\frac{1}{2}}) + O\Big(\sum_{m\leqq x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|\sin bm\pi\theta|}\Big) + O\Big(\sum_{m\leqq x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|\sin dm\pi\theta|}\Big) \tag{87}$$

$$= O(x^{\frac{1}{2}}) + O\Big(\sum_{m\leqq bdx^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|\sin m\pi\theta|}\Big) = O(x^{\frac{1}{2}}) + O(x^{\frac{1}{2}}\log x) = O(x^{\frac{1}{2}}\log x)$$

by Lemma 1.

Thus Theorem 3 is proved. Putting $a=b=c=d=1$ we obtain the interesting special case

$$\sum_{n\leqq x} d(n) e\Big(n\pi\frac{u}{v}\theta i\Big) = O(x^{\frac{1}{2}}\log x) \tag{88}$$

where u, v are positive integers and θ has bounded partial quotients.

For $s>1$ it is known that

$$\Sigma r(n) n^{-s} = 4(1^{-s}+2^{-s}+\ldots)(1^{-s}-3^{-s}+-\ldots). \tag{89}$$

From Thecrem 3 and (89) it is easy to deduce that

$$\sum_{n\leqq x} r(n) e\Big(n\pi\frac{u}{v}\theta i\Big) = O(x^{\frac{1}{2}}\log x) \tag{90}$$

where u, v are positive integers and θ has bounded partial quotients.

I now prove

13. Theorem 4. *If a is positive and θ is any irrational number then*

$$\sum_{n\leqq x} \sigma_a(n) e(2n\pi\theta i) = o(x^{1+a}). \tag{91}$$

Proof. We have

$$\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a = \sum_{\substack{d|n \\ d\leqq n^{\frac{1}{2}}}} d^a + \sum_{\substack{d|n \\ d\leqq n^{\frac{1}{2}}}} \frac{n^a}{d^a} - k_n n^{\frac{1}{2}a} \tag{92}$$

where $k_n=1$ or 0 according as n is or is not a perfect square. From (92) it follows that

$$\frac{\sigma_a(n)}{n^a} = \sum_{\substack{d|n \\ d\leqq n^{\frac{1}{2}}}} (d^a n^{-a}) + \sum_{\substack{d|n \\ d\leqq n^{\frac{1}{2}}}} (d^{-a}) - k_n n^{-\frac{1}{2}a}. \tag{93}$$

From (93) we obtain

$$(94)\qquad \sum_{n\leqq x}\sigma_a(n)n^{-a}e(2n\pi\theta i)=\sum_{d\leqq x^{\frac{1}{2}}}d^a\Big(\sum_{d\leqq n\leqq\frac{x}{d}}n^{-a}d^{-a}e(2nd\pi\theta i)\Big)$$

$$+\sum_{d\leqq x^{\frac{1}{2}}}d^{-a}\Big(\sum_{d\leqq n\leqq\frac{x}{d}}e(2nd\pi\theta i)\Big)-\sum_{n\leqq x^{\frac{1}{2}}}e(2n^2\pi\theta i)n^{-a}=S_1(x)+S_2(x)+S_3(x).$$

It is obvious that when $a>0$

$$(95)\qquad S_3(x)=O(x^{\frac{1}{2}}).$$

We have

$$(96)\qquad S_1(x)=\sum_{d\leqq x^{\frac{1}{2}}}\Big(\sum_{d\leqq n\leqq\frac{x}{d}}n^{-a}e(2nd\pi\theta i)\Big)$$

$$(97)\qquad =O\Big(\sum_{d\leqq x^{\frac{1}{2}}}\sum_{d\leqq n\leqq\frac{x}{d}}n^{-a}\Big).$$

Now when $0<a<1$ it follows from (97) that

$$(98)\qquad S_1(x)=O\Big(\sum_{d\leqq x^{\frac{1}{2}}}\frac{x^{1-a}}{d^{1-a}}\Big)$$

$$=O(x^{1-a}\cdot x^{\frac{1}{2}a})=O(x^{1-\frac{1}{2}a}).$$

When $a=1$ it is obvious from (97) that

$$(99)\qquad S_1(x)=O(x^{\frac{1}{2}}\log x).$$

When $a>1$ (97) shows that

$$(100)\qquad S_1(x)=O(x^{\frac{1}{2}}).$$

From (98), (99), (100) it follows that when $a>0$

$$(101)\qquad S_1(x)=o(x).$$

Finally

$$(102)\qquad |S_2(x)|=\Big|\sum_{d\leqq x^{\frac{1}{2}}}\sum_{d\leqq n\leqq\frac{x}{d}}e(2nd\pi\theta i)d^{-a}\Big|$$

$$<c_3\sum_{d\leqq x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Min}\Big(\frac{x}{d^{1+a}},\frac{1}{d^a|\sin d\pi\theta|}\Big)<c_4\sum_{d\leqq m}\frac{1}{d^a\{d\theta\}}+c_5x\sum_{d>m}\frac{1}{d^{1+a}}=o(x)$$

for every irrational θ, by proper choice of m.

From (94), (95), (101) and (102) it follows that

$$(103)\qquad \sum_{n\leqq x}\sigma_a(n)n^{-a}e(2n\pi\theta i)=o(x).$$

Theorem 4 follows by easy partial summation from (103).

14. We now prove

Theorem 5. *For every irrational* θ

$$\sum_{n\leqq x} d(n)\, e(2n\pi\theta i) = o(x\log x). \tag{104}$$

Proof. We put $a=0$ in (94) and obtain

$$\sum_{n\leqq x} d(n)\, e(2n\pi\theta i) = 2\sum_{n\leqq x^{\frac{1}{2}}}\ \sum_{n\leqq m\leqq \frac{x}{n}} e(2mn\pi\theta i) - \sum_{n\leqq x^{\frac{1}{2}}} e(2n^2\pi\theta i) \tag{105}$$

$$= 2S_1(x) - S_2(x).$$

Obviously,

$$S_2(x) = O(x^{\frac{1}{2}}). \tag{106}$$

Let us define $k_1(n)$ and $k_2(n)$ as follows:

$$k_1(n)=1 \quad \text{if} \quad \{n\theta\}>\varepsilon,$$
$$k_1(n)=0 \quad \text{if} \quad \{n\theta\}\leqq\varepsilon,$$
$$k_2(n)=1-k_1(n).$$

From these definitions it follows that

$$|S_1(x)| = \left|\sum_{n\leqq x^{\frac{1}{2}}}\ \sum_{n\leqq m\leqq\frac{x}{n}} e(2mn\pi\theta i)\right| < c_6\sum_{n\leqq x^{\frac{1}{2}}} \operatorname{Min}\left(\frac{x}{n}, \frac{1}{\{n\theta\}}\right) \tag{107}$$

$$< c_7\sum_{n\leqq x^{\frac{1}{2}}} x\frac{k_2(n)}{n} + c_8\sum_{n\leqq x^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\varepsilon}\cdot k_1(n) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}x^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(\sum_{n\leqq x^{\frac{1}{2}}} x\frac{k_2(n)}{n}\right).$$

From (74) we see that

$$k_2(n) = N(\varepsilon, n) - N(\varepsilon, n-1). \tag{108}$$

From (74) it follows that to every positive ε, however small, there corresponds a number $\xi=\xi(\varepsilon)$ such that for all $n>\xi$,

$$N(\varepsilon, n) < 3\varepsilon n. \tag{109}$$

Now from (108),

$$\sum_{n\leqq x^{\frac{1}{2}}} x\frac{k_2(n)}{n} = O\left(\sum_{n\leqq x^{\frac{1}{2}}}\frac{xN(\varepsilon,n)}{n(n+1)}\right) + O(\varepsilon x) \tag{110}$$

$$= O\left(\sum_{n\leqq\xi}\frac{xn}{n(n+1)}\right) + O\left(\sum_{\xi<n\leqq x^{\frac{1}{2}}}\frac{\varepsilon n x}{n(n+1)}\right) + O(\varepsilon x)$$

$$= O(x\xi) + O(\varepsilon x\log x) + O(\varepsilon x)$$

$$= O(\varepsilon x\log x) = o(x\log x).$$

From (105), (106), (107) and (110) Theorem 5 follows.

15. I now show how to prove

Theorem 6. *If $\varphi(x)$ is any positive increasing function of x tending to ∞ with x we can find irrationals θ such that*

$$\sum_{n \leqq x} d(n) \cos(2n\pi\theta) = \Omega_R\left(\frac{x \log x}{\varphi(x)}\right). \tag{111}$$

Proof. I first draw the attention of the reader to the fact that my method does not lead to any similar result for the sum

$$\sum_{n \leqq x} d(n) \sin(2n\pi\theta). \tag{112}$$

I introduce here the following notation:

$$l_n(x) = \log(l_{n-1}(x)); \quad n = 2, 3, \ldots, \qquad l_1(x) = \log x \tag{113}$$

and

$$e_n(x) = e(e_{n-1}(x)); \quad n = 2, 3, \ldots, \qquad e_1(x) = e(x) = e^x. \tag{114}$$

For the sake of clearness I shall prove (111) in the particular case

$$\varphi(x) = l_7(x) \tag{115}$$

and it is very easy to see that the method leads at once to the general result.

We write

$$\theta = 1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots \tag{116}$$

whose convergents are $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ $(q_1 = 1)$. Since

$$(q_{n-1}, q_n) = 1 \tag{117}$$

and

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \tag{118}$$

it is possible to determine $a_2, a_3, a_4, \ldots$ so that they are the least integers making

$$q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots \text{ primes} \tag{119}$$

and satisfying

$$a_{n+1} \geqq (A(n))^4 \tag{120}$$

where

$$A = A(n) = \left[\frac{e_7(q_n)}{q_n}\right] + 1. \tag{121}$$

Consider the sum

$$S(q_n) = \sum_{s < A q_n} d(s) \cos(2s\pi\theta). \tag{122}$$

From (118) and (120) it follows that

$$\theta = \frac{p_n}{q_n} + O\left(\frac{1}{A^4 q_n^2}\right). \tag{123}$$

From (122) and (123) it follows that

$$\begin{aligned} S(q_n) &= \sum_{s<q_n} d(s)\cos(2s\pi\theta) + \sum_{q_n \leqq s<Aq_n} d(s)\cos(2s\pi\theta) \\ &= O(q_n \log q_n) + \sum_{q_n \leqq s<Aq_n} d(s)\cos\left(2s\pi\frac{p_n}{q_n} + O\left(\frac{1}{A^3 q_n}\right)\right) \\ &= O(q_n \log q_n) + O\left(\frac{Aq_n \log(Aq_n)}{A^3 q_n}\right) + \sum_{q_n \leqq s<Aq_n} d(s)\cos\left(2s\pi\frac{p_n}{q_n}\right). \end{aligned} \tag{124}$$

From (121) it follows that

$$e_6(q_n) = O(A) \tag{125}$$

and hence (124) becomes

$$S(q_n) = O(A) + \sum_{q_n \leqq s<Aq_n} d(s)\cos\left(2s\pi\frac{p_n}{q_n}\right). \tag{126}$$

It is easy to see that

$$\begin{aligned} &\sum_{q_n \leqq s<Aq_n} d(s)\cos\left(2s\pi\frac{p_n}{q_n}\right) \\ &= \sum_{s<A} d(sq_n) + \sum_{c<q_n} \cos\left(2c\pi\frac{p_n}{q_n}\right)\left(\sum_{s<A} d(sq_n + c)\right) = S_1 + S_2. \end{aligned} \tag{127}$$

Since q_n is prime and from (125), $q_n = o(A)$ we have, from Lemma 7

$$S_1 = \left(2 - \frac{1}{q_n}\right) A \log A + O(Aq_n \log q_n) \tag{128}$$

and from Lemma 4

$$\sum_{s<A} d(sq_n + c) = \left(1 - \frac{1}{q_n}\right) A \log A + O(A \log q_n). \tag{129}$$

We have

$$\sum_{c<q_n} \cos\left(2c\pi\frac{p_n}{q_n}\right) = -1. \tag{130}$$

From (127), (129) and (130) it follows that

$$S_2 = -\left(1 - \frac{1}{q_n}\right) A \log A + O(Aq_n \log q_n). \tag{131}$$

From (126), (127), (128) and (131) it follows that

$$S(q_n) = \sum_{s<Aq_n} d(s)\cos(2s\pi\theta) = A \log A + O(Aq_n \log q_n). \tag{132}$$

If we write $Aq_n = x$, (132) gives

$$\sum_{s \leqq x} d(s)\cos(2s\pi\theta) \sim \frac{Aq_n \log(Aq_n)}{q_n} \sim \frac{x \log x}{l_7(x)}. \tag{133}$$

This is true for an infinity of x. Hence

$$\sum_{s \leqq x} d(s) \cos(2s\pi\theta) = \Omega_R\left(\frac{x \log x}{l_7(x)}\right). \tag{134}$$

The more general Theorem 6 can be proved quite similarly.

16. I now prove

Theorem 7. *If $\varphi(x)$ is any positive increasing function of x tending to ∞ with x, we can find irrationals θ such that*

$$\sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \cos(2n\pi\theta) = \Omega_R\left(\frac{\log^2 x}{\varphi(x)}\right). \tag{135}$$

Proof. As in the last section I illustrate the method of proof by proving this theorem in the case

$$\varphi(x) = l_7(x). \tag{136}$$

Let θ be defined as in the last section. Consider the sum

$$S(q_n) = \sum_{s < A q_n} \frac{d(s)}{s} \cos(2s\pi\theta) \tag{137}$$

where A is defined by (121). We have from (123),

$$\begin{aligned} S(q_n) &= \sum_{s < q_n} \frac{d(s)}{s} \cos(2s\pi\theta) + \sum_{q_n \leqq s < A q_n} \frac{d(s)}{s} \cos(2s\pi\theta) \\ &= O(\log^2 q_n) + \sum_{q_n \leqq s < A q_n} \frac{d(s)}{s} \cos(2s\pi\theta) \\ &= O(\log^2 q_n) + \sum_{q_n \leqq s < A q_n} \frac{d(s)}{s} \cos\left(\frac{2s\pi p_n}{q_n}\right) + O\left(\frac{1}{A^3 q_n} \sum_{s < A q_n} \frac{d(s)}{s}\right) \\ &= O(\log^2 q_n) + \sum_{q_n \leqq s < A q_n} \frac{d(s)}{s} \cos\left(\frac{2s\pi p_n}{q_n}\right) \end{aligned} \tag{138}$$

from (67) and (125).

We have

$$\sum_{q_n \leqq s < A q_n} \frac{d(s)}{s} \cos\left(\frac{2s\pi p_n}{q_n}\right) = \sum_{s < A} \frac{d(s q_n)}{s q_n} + \sum_{c < q_n} \left(\cos\left(\frac{2c\pi p_n}{q_n}\right) \sum_{s < A} \frac{d(s q_n + c)}{s q_n + c}\right) = S_1 - \tag{139}$$

Since q_n is prime and $q_n^2 < A$ by (125), we can apply Lemmas 5 and 6 to S_1 and S_2, and obtain

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2q_n - 1}{2q_n^2} \log^2 A + O(\log A \log q_n) + O(q_n \log^2 q_n) \\ &= \frac{2q_n - 1}{2q_n^2} \log^2 A + O(\log A \log q_n) \end{aligned} \tag{140}$$

by (125); taking note of (130),

$$(141)\qquad S_2 = -\frac{1}{2q_n}\left(1-\frac{1}{q_n}\right)\log^2 A + O(\log A \log q_n) + O(q_n \log^2 q_n)$$
$$= \left(-\frac{1}{2q_n} + \frac{1}{2q_n^2}\right)\log^2 A + O(\log A \log q_n)$$

from (125).

Finally from (138), (139), (140) and (141) it follows that

$$(142)\qquad \sum_{s \leqq A q_n} \frac{d(s)}{s}\cos(2s\pi\theta) = \frac{1}{2q_n}\log^2 A + O(\log A \log q_n) \sim \frac{1}{2q_n}\log^2(Aq_n).$$

Put $Aq_n = x$ and (142) becomes, in virtue of (121),

$$(143)\qquad \sum_{s \leqq x} \frac{d(s)}{s}\cos(2s\pi\theta) \sim \frac{1}{2}\frac{\log^2 x}{l_\eta(x)}.$$

The general case of Theorem 7 is proved in the same way.

17. In the following sections I prove (14), (15), (16) and (18). I first prove

Theorem 8. *For every positive a and every irrational θ*

$$(144)\qquad \sum_1^\infty \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}}\sin(2n\pi\theta) = -\pi\sum_1^\infty \frac{\psi(n\theta)}{n^{1+a}}.$$

Proof. Since θ is irrational,

$$(145)\qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(2nd\pi\theta)}{n} = -\pi\psi(d\theta)$$

for every positive integer d.

We have

$$(146)\qquad \sum_{n \leqq x}\frac{\sigma_a(n)}{n^{a+1}}\sin(2n\pi\theta) = \sum_{n \leqq x}\left(\sum_{d|n} d^{-a}\right)\frac{\sin(2n\pi\theta)}{n} = \sum_{d \leqq x} d^{-1-a}\left(\sum_{n \leqq \frac{x}{d}}\frac{\sin(2nd\pi\theta)}{n}\right).$$

From Lemma 10, (145) and (146) it follows that

$$(147)\qquad \sum_{n \leqq x}\frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}}\sin(2n\pi\theta)$$
$$= -\sum_{d \leqq m}\frac{\pi\psi(d\theta)}{d^{1+a}} + O\left(\sum_{d \leqq m}\frac{d}{x\{d\theta\}}\right) + O\left(\sum_{d>m} d^{-1-a}\right)$$
$$= -\pi\sum_1^\infty \frac{\psi(d\theta)}{d^{1+a}} + o(1)$$

by proper choice of m. Theorem 8 follows from (147).

18. From Theorem 8 I shall deduce

Theorem 9. *If θ is irrational and has bounded partial quotients, then*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n} \sin(2n\pi\theta) = -\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{\psi(n\theta)}{n}. \tag{148}$$

Proof. When θ has bounded partial quotients it is known that[14])

$$\sum_{n \leqq x} \psi(n\theta) = O(\log x). \tag{149}$$

It follows that

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\psi(n\theta)}{n} \tag{150}$$

converges and hence from a well-known theorem that

$$\operatorname*{Lt}_{a \to +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n\theta)}{n^{1+a}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\psi(n\theta)}{n}. \tag{151}$$

It follows from Theorem 8 and (151) that (148) will be proved if we can prove that

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{d(n)}{n} \sin(2n\pi\theta) = \operatorname*{Lt}_{a \to +0} \sum_{1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}} \sin(2n\pi\theta). \tag{152}$$

We shall now prove (152). That the left side of (152) converges follows from (8).

We have, for every positive a $(d = 1, 2, 3, \ldots)$

$$d^{-a} - 1 = O(a \log d). \tag{153}$$

It follows that

$$\begin{aligned} &\sum_{n \leqq x} \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}} \sin(2n\pi\theta) - \sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \sin(2n\pi\theta) \\ &= \sum_{n \leqq x} \frac{\sum_{d \mid n} d^{-a}}{n} \sin(2n\pi\theta) - \sum_{n \leqq x} \frac{\sum_{d \mid n} 1}{n} \sin(2n\pi\theta) \\ &= O\left(\sum_{n=x} \frac{a \sum_{d \mid n} \log d}{n} \right) = O\left(a \sum_{n \leqq x} \frac{d(n) \log n}{n} \right) = O(a \log^3 x), \end{aligned} \tag{154}$$

the last step by partial summation from (67).

From (93) we have

$$\frac{\sigma_a(n)}{n^a} = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \leqq n^{\frac{1}{2}}}} \frac{d^a}{n^a} + \sum_{\substack{d \mid n \\ d \leqq n^{\frac{1}{2}}}} \frac{1}{d^a} - \frac{k_n}{n^{\frac{1}{2}a}} \tag{155}$$

where $k_n = 1$ or 0 according as n is or is not a perfect square.

---

[14]) A. Ostrowski, Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen, Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburg Univ. 1 (1922), S. 77—98.

From (155) it follows that for $a \geqq 0$,

$$(156)\qquad \sum_{n \leqq x} \frac{\sigma_a(n)}{n^a} \sin(2n\pi\theta)$$

$$= \sum_{d \leqq x^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{d \leqq n \leqq \frac{x}{d}} \frac{\sin(2nd\pi\theta)}{n^a} \right) + \sum_{d \leqq x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{d^a} \left(\sum_{d \leqq n \leqq \frac{x}{d}} \sin(2nd\pi\theta) \right) - \sum_{n \leqq x^{\frac{1}{2}}} \frac{\sin(2n^2\pi\theta)}{n^a}$$

$$= S_1(x) + S_2(x) - S_3(x).$$

It is obvious that for $a \geqq 0$,

$$(157)\qquad S_3(x) = O(x^{\frac{1}{2}}).$$

From Lemma 1 it follows that for $a \geqq 0$

$$(158)\qquad S_2(x) = O\left(\sum_{d \leqq x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{d^a |\sin d\pi\theta|} \right) = O(x^{\frac{1}{2}} \log x).$$

By partial summation it is easy to see that[15]) for $a \geqq 0$,

$$(159)\qquad \sum_{n \leqq x} \frac{\sin(2nd\pi\theta)}{n^a} = O\left(\frac{1}{|\sin d\pi\theta|} \right).$$

From Lemma 1, (156) and (159) it follows that, for $a \geqq 0$

$$(160)\qquad S_1(x) = O(x^{\frac{1}{2}} \log x).$$

From (156), (157), (158) and (160) it follows that

$$(161)\qquad \sum_1^\infty \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}} \sin(2n\pi\theta) - \sum_1^\infty \frac{d(n)}{n} \sin(2n\pi\theta)$$

$$= O\left(\frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}} \right) + \left(\sum_{n \leqq x} \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}} \sin(2n\pi\theta) \right) - \left(\sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \sin(2n\pi\theta) \right)$$

$$= O\left(\frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}} \right) + O(a \log^3 x),$$

from (154). From (161) it follows that

$$(162)\qquad \operatorname*{Lt}_{a \to +0} \sum_1^\infty \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}} \sin(2n\pi\theta) = \sum_{n=1}^\infty \frac{d(n)}{n} \sin(2n\pi\theta)$$

which is (152). This formula remains true when *sin* is replaced by *cos*, as a perusal of the proof of (162) shows.

As shown in the earlier part of this section, Theorem 9 follows from (162).

---

[15]) The constants implied in the O symbols *do not* depend on a.

19. I now prove[16])

Theorem 10. *There are irrationals θ such that*

$$\sum_1^\infty \frac{\psi(n\theta)}{n} \tag{163}$$

diverges.

Proof. Let $q_1 = 1, q_2, q_3, \ldots$ be the denominators of the convergents to

$$\theta = 1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots . \tag{164}$$

For $n \geqq 1$ we define a_{n+1} by

$$a_{n+1} = [e_3(q_n)] + 1 \tag{165}$$

where, as before, $[x]$ denotes the greatest integer contained in x and $e_3(x)$ is defined by (114).

Let $\frac{p_m}{q_m}$ be an *odd*[17]) convergent to (164). We know that

$$\theta = \frac{p_m}{q_m} + \frac{\beta}{q_m q_{m+1}} \tag{166}$$

where $0 < \beta < 1$.

From (166) it follows that if

$$s < q_{m+1} \tag{167}$$

then

$$f(s\theta) = f\left(s\frac{p_m}{q_m}\right) + O\left(\frac{s}{q_m q_{m+1}}\right) \tag{168}$$

where

$$f(x) = x - [x] = \frac{1}{2} + \psi(x) \tag{169}$$

is the fractional part of x.

Hence if $z \leqq e_3(q_m)$, then

$$\sum_{q_m}^{z} f(s\theta) = \sum_{q_m}^{z} f\left(s\frac{p_m}{q_m}\right) + O\left(\frac{(e_3(q_m))^2}{q_m^2 e_3(q_m)}\right) \tag{170}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q_m}\right)(z - q_m) + O(q_m) + O(1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q_m}\right)z + O(q_m).$$

By partial summation it follows from (170) that if

$$A = A(m) = [e_2(q_m)] \tag{171}$$

---

[16]) I am indebted to Mr. H. Davenport for help in this proof.

[17]) The argument breaks down completely if we take an *even* convergent; in fact it is easily seen that the proof rests on the fact that β is positive in (166

then

$$(172)\qquad \sum_{q_m}^{A}\frac{f(s\theta)}{s}=\sum_{q_m}^{A}\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{q_m}\Big)\frac{s}{s(s+1)}+q_m O\Big(\sum_{q_m}^{A}\frac{1}{s(s+1)}\Big)$$
$$=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{q_m}\Big)\Big(\log\Big(\frac{A}{q_m}\Big)+O(1)\Big)+O(1)$$
$$=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{q_m}\Big)\log\Big(\frac{A}{q_m}\Big)+O(1).$$

From (172) it follows that

$$(173)\qquad \sum_{q_m}^{A}\frac{\psi(s\theta)}{s}=-\frac{1}{2q_m}\log\Big(\frac{A}{q_m}\Big)+O(1)$$

and hence that

$$(174)\qquad \sum_{s\leqq A}\frac{\psi(s\theta)}{s}=-\frac{1}{2q_m}\log A+O(\log q_m).$$

From (171) and (174) it follows that (163) cannot converge, and in fact this series can, by taking a certain number of terms, be made less than an arbitrarily large negative number. Our method also proves the following.

Theorem 11. *If $\varphi(x)$ is any positive increasing function of x, we can find irrationals θ such that*

$$(175)\qquad \sum_{n\leqq x}\frac{\psi(n\theta)}{n}=\Omega_L\Big(\frac{\log x}{\varphi(x)}\Big).$$

Cambridge, 15th June 1930.

(Eingegangen am 26. Juni 1930.)

Über einige trigonometrische Summen.

Von

Arnold Walfisz in Radość (Polen).

Einleitung.

Das reelle θ gehöre der folgenden Klassifikation an:

Fall I. θ ist irrational und besitzt (als regelmäßiger Kettenbruc dargestellt) beschränkte Kettenbruchnenner.

Fall II. θ durchläuft eine geeignete Menge fast aller Zahlen (d. alle Zahlen bis auf eine geeignete Menge N, die als lineare Punktmeng gedeutet das Lebesguesche Maß Null besitzt).

Fall III. θ ist eine beliebige irrationale Zahl.

Fall IV. θ ist eine beliebige irrationale algebraische Zahl.

Fall V. θ gehört einer geeigneten Menge irrationaler Zahlen an (d von einem später einzuführenden Parameter φ abhängt).

Fall VI. θ ist beliebig.

Um anzudeuten, für welchen der sechs Fälle die folgenden Formel gelten, hänge ich der Formelnummer hin und wieder einen der entsprechen den Indizes I bis VI an.

Es sei für ganzes $n \geqq 0$

$$r_k(n) = \sum_{n_1^2 + \ldots + n_k^2 = n} 1$$

die Anzahl der Zerlegungen von n in $k \geqq 2$ Quadrate,

$$R_k(x) = R_k(x, \theta) = \sum_{0 \leqq n \leqq x} r_k(n)\, e^{2n\pi\theta i}. \tag{1}$$

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit sollen die Summen (1) in de Fällen I und II beim O-Problem, in den Fällen II, III und VI bei Ω-Problem untersucht werden. Ich führe zunächst einige diesbezüglich

Resultate von A. Oppenheim[1]) ((2) bis (6)) und S. D. Chowla[2])[3]) ((7), (8)) an:

$$(2_{\mathrm{I}}) \qquad R_2(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x\right),$$

$$(3_{\mathrm{I}}) \qquad R_k(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}\right) \qquad (k \geqq 3),$$

$$(4_{\mathrm{II}}) \qquad R_k(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

$$(5_{\mathrm{III}}) \qquad R_2(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$(6_{\mathrm{VI}}) \qquad R_k(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \qquad (k \geqq 3),$$

$$(7_{\mathrm{I}}) \qquad R_k(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1} \log^2 x\right) \qquad (k \geqq 4),$$

$$(8_{\mathrm{I}}) \qquad R_k(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \qquad (k \geqq 12).$$

Diese Abschätzungen ergänze ich im folgenden durch:

$$(9_{\mathrm{II}}) \qquad R_2(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^{2+\varepsilon} x\right),$$

$$(10_{\mathrm{I}}) \qquad R_3(x) = O\left(x^{\frac{3}{4}} \log x\right),$$

$$(11_{\mathrm{II}}) \qquad R_3(x) = O\left(x^{\frac{3}{4}} \log^{2+\varepsilon} x\right),$$

$$(12_{\mathrm{II}}) \qquad R_4(x) = O\left(x \log^{3+\varepsilon} x\right),$$

$$(13_{\mathrm{I,\,II}}) \qquad R_k(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \qquad (k \geqq 5),$$

$$(14_{\mathrm{III}}) \qquad R_k(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{4}}\right),$$

$$(15_{\mathrm{II}}) \qquad R_k(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{4}} \log^{\frac{k}{4}} x\right),$$

$$(16_{\mathrm{VI}}) \qquad R_4(x) = \Omega\left(x \log\log x\right).$$

Im zweiten Teil betrachte ich Summen, die mit der Teilerfunktion

$$d(n) = \sum_{d \mid n} 1$$

(Teileranzahl der natürlichen Zahl n) zusammenhängen.

---

[1]) A. Oppenheim "The approximate functional equation for the multiple theta-function and the trigonometric sums associated therewith" [Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, **28** (1928), S. 476—483].

[2]) S. D. Chowla "Note on a trigonometric sum" [Journal of the London Mathematical Society **5** (1930), S. 176—178].

[3]) S. D. Chowla "Some problems of diophantine approximation (I)" [Mathematische Zeitschrift **33** (1931), S. 544—563], unmittelbar vorangehende Arbeit.

$\varphi(x)$ bedeute eine beliebige Funktion von x, die für $x > 0$ (definiert und) positiv ist und für $x \to \infty$ monoton gegen Null abnimmt. Ich knüpfe an folgende Resultate von Chowla (l. c. [3])) an:

$$(17_{\mathrm{I}}) \qquad \sum_{n \leqq x} d(n)\, e^{2n\pi\theta i} = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x\right) [4]),$$

$$(18_{\mathrm{III}}) \qquad \sum_{n \leqq x} d(n)\, e^{2n\pi\theta i} = o(x \log x),$$

$$(19_{\mathrm{V}}) \qquad \sum_{n \leqq x} d(n) \cos 2n\pi\theta = \Omega_R(\varphi(x)\, x \log x),$$

$$(20_{\mathrm{V}}) \qquad \sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \cos 2n\pi\theta = \Omega_R(\varphi(x) \log^2 x)$$

und beweise

$$(21_{\mathrm{II}}) \qquad \sum_{n \leqq x} d(n)\, e^{2n\pi\theta i} = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^{2+\varepsilon} x\right) [5]),$$

$$(22_{\mathrm{II}}) \qquad \sum_{n \leqq x} d(n)\, e^{2n\pi\theta i} = \Omega\left(x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} x \log\log x\right),$$

$$(23_{\mathrm{V}}) \qquad \sum_{n \leqq x} d(n) \sin 2n\pi\theta = \underset{L}{\Omega_R}(\varphi(x)\, x \log x),$$

$$(24_{\mathrm{V}}) \qquad \sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2n\pi\theta = \underset{L}{\Omega_R}(\varphi(x) \log x),$$

$$(25_{\mathrm{VI}}) \qquad \sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2n\pi\theta = O(\log x),$$

$$(26_{\mathrm{III}}) \qquad \sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2n\pi\theta = o(\log x),$$

$$(27_{\mathrm{IV}}) \qquad \sum_{n=1} \frac{d(n)}{n} e^{2n\pi\theta i} \quad \text{konvergiert.}$$

Methodisch ist zu der obigen Formelsammlung folgendes zu bemerken. Oppenheim stützt sich beim Beweise von (2_{I}) und (3_{I}) auf seine Verallgemeinerung tiefliegender Hardy-Littlewoodscher asymptotischer Thetatransformationsformeln[6]). Chowla (l. c. [3])) gibt für (2_{I}) einen elementaren Be-

---

[4]) Falls die untere Summationsgrenze nicht explizit bezeichnet wird, ist sie stets Eins.

[5]) Diese Abschätzung dient als Prototyp zu (9) und soll daher im ersten Teil erledigt werden.

[6]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood "Some problems of Diophantine approximation. II. The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ-functions" [Acta Mathematica 37 (1914), S. 193—239], S. 197—210. Diese Transformationsformeln wurden seitdem einfacher von J. G. van der Corput, L. J. Mordell, J. R. Wilton begründet.

weis, indem er (nach Jacobi) $r_2(n)$ als Teilerfunktion in Restklassen darstellt. Auf ähnlicher Grundlage beruhen die Beweise von (7_{I}), (9_{II}), (12_{II}), (17_{I}), (21_{II}) und (25_{VI}), während (18_{III}), (26_{III}) und (27_{IV}) arithmetisch etwas komplizierter sind. (5_{III}) und (14_{III}) sind einfache Korrolare eines Hardy-Littlewoodschen Satzes[7]). (6_{VI}) ist ganz einfach, (16_{VI}) folgt sofort aus

$$r_4(n) = \Omega(n \log\log n)\ ^{8}).$$

Zum Beweise von (4_{II}) zieht Oppenheim Hilfsmittel aus der Theorie trigonometrischer Reihen hinzu. (8_{I}) leitet Chowla aus einer Formel von S. Ramanujan[9]) her, während ich bei $(13_{\mathrm{I,\,II}})$ von einer tiefliegenden Hardyschen Identität[10]) Gebrauch mache. (10_{I}) und (11_{II}) erfordern längere analytische und arithmetische Überlegungen; zu ersterem Zwecke folge ich, stellenweise fast wörtlich, einer Ellipsoidarbeit V. Jarníks[11]). (15_{II}) stützt sich auf eine Thetaabschätzung, die ich an einer anderen Stelle kürzlich gegeben habe[12]). (19_{V}) und (20_{V}) leitet Chowla durch verhältnismäßig einfache Überlegungen her, nur an einer Stelle[13]) verwendet er merkwürdigerweise den Dirichletschen Satz von der arithmetischen Progression. (22_{II}), (23_{V}) und (24_{V}) werden mit Hilfe einer tiefliegenden Abschätzung T. Estermanns[14]) bewiesen.

Wie man aus (2) bis (16) ersieht, ist die Größenordnung von $R_k(x)$ in den Fällen I und II für $k \geqq 5$ vollständig, für $k \leqq 4$ bis auf logarithmische Spannen im Restgliede bestimmt. Von den d-Formeln sind (18), (19), (20), (23), (24), (25) und (26) definitiv; zwischen (21) und (22) besteht nur noch eine logarithmische Spanne. (17) ist wahrscheinlich auch scharf, doch vermag ich kein Ω-Gegenstück anzugeben.

---

[7]) l. c. [6]), S. 228, Theorem 2. 24.

[8]) Vgl. meine Arbeit „Teilerprobleme" [Mathematische Zeitschrift **26** (1927), S. 66—88], S. 79.

[9]) S. Ramanujan "On certain arithmetical functions" [Transactions of the Cambridge Philosophical Society **22** (1916), S. 159—184 oder Collected Papers of Srinivasa Ramanujan (Cambridge 1927), S. 136—162], (135) und (151).

[10]) G. H. Hardy "On the representation of a number as the sum of any number of squares and in particular of five" [Transactions of the American Mathematical Society **21** (1920), S. 255—284], S. 264—270. Hierzu Errata, ebenda **29** (1927), S. 845—847.

[11]) V. Jarník „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden" [Mathematische Annalen **100** (1928), S. 699—721], S. 702—709.

[12]) „Ein metrischer Satz über Diophantische Approximationen" [Fundamenta Mathematicae **16** (1930), S. 361—385], Formel (74).

[13]) Beim Übergang von seiner Formel (118) zu (119).

[14]) T. Estermann "On the representations of a number as the sum of three products" [Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, **29** (1929), S. 453—478], Lemma 11.

Schließlich sei noch erwähnt, daß bei Oppenheim und teilweise auch bei Chowla der Exponentialfaktor

$$e^{2n\pi\theta i} \tag{28}$$

durch

$$e^{n\pi\theta i} \quad \text{oder} \quad e^{-n\pi\theta i} \tag{29}$$

ersetzt wird. Welche der Formen (28) oder (29) gewählt wird, ist Geschmackssache — die Resultate werden hiervon offenbar nicht berührt. (29) knüpft an die in der ϑ-Theorie übliche Bezeichnungsweise an, während (28) bei elementaren Überlegungen etwas handlicher ist.

1. Teil.

§ 1. (21_{II}), (9_{II}), (12_{II}).

Die folgenden Vereinbarungen mögen für die ganze vorliegende Abhandlung gelten.

Ich bezeichne unterschiedslos: mit A positive absolute Konstanten, mit B komplexe Zahlen, für die $|B| < A$ ist, mit c positive Konstanten, die nur von θ bzw. von θ und ε (wenn ε in den Behauptungen vorkommt) abhängen dürfen. Die O- und o-Glieder dürfen implizite nur von den c abhängen. Bei allen x-Abschätzungen wird stillschweigend angenommen, daß $x > c$ ist.

Da alle zu betrachtenden trigonometrischen Summen in θ die Periode Eins haben und im Falle II die rationalen θ als Nullmenge ausgeschlossen werden können, so darf ich für I bis V

$$0 < \theta < 1 \qquad (\theta \text{ irrational})$$

annehmen.

Es sei dann

$$\theta = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \cdots \tag{30}$$

die Entwicklung von θ in einen unendlichen regelmäßigen Kettenbruch;

$$\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}, \cdots \tag{31}$$

mögen die Näherungsbrüche bei der Darstellung (30) sein[15]).

Um den Text übersichtlicher zu gestalten, formuliere ich eine ganze Anzahl bekannter Ergebnisse als Hilfssätze.

---

[15]) Für die im folgenden benutzten Eigenschaften der Kettenbrüche verweise ich auf das Buch von O. Perron „Die Lehre von den Kettenbrüchen" (Leipzig und Berlin 1913, zweite Auflage 1929).

Hilfssatz 1 (A. Khintchine[16])): *Es sei $F(x)$ für $x \geqq 1$ stetig und positiv; $x F(x)$ nehme beständig ab; das Integral*

$$\int_1^\infty F(x)\,dx$$

sei konvergent. Die Ungleichung

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{F(k)}{k} \tag{32_{II}}$$

besitzt dann höchstens eine endliche Anzahl von Lösungen in ganzen h, k.

Aus Hilfssatz 1 folgt leicht der (längst bekannte)

Hilfssatz 2:

$$k_{n+1} \leqq c\, k_n \log^{1+\varepsilon} k_n \qquad (n \geqq 2)\ ^{17}). \tag{33_{II}}$$

Beweis: Ich wende Hilfssatz 1 mit

$$F(x) = \frac{1}{x \log^{1+\varepsilon} 2x} \qquad (x \geqq 1)$$

an. (32) besagt dann, daß für jedes Paar ganzer Zahlen h, k mit $k > 0$

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| \geqq \frac{c}{k^2 \log^{1+\varepsilon} 2k} \tag{34_{II}}$$

ist. Andererseits ist für jedes $n \geqq 1$ bekanntlich

$$\frac{1}{2 k_n k_{n+1}} < \left|\theta - \frac{h_n}{k_n}\right| < \frac{1}{k_n k_{n+1}}. \tag{35_{III}}$$

Aus (34) mit $h = h_n$, $k = k_n$ und (35) folgt (33).

Für beliebige reelle u setze ich (stets)

$$\{u\} = \mathrm{Min}\,(u - [u],\ [u] + 1 - u) \tag{36}$$

(die positiv genommene Entfernung von u zur nächstliegenden ganzen Zahl).

Hilfssatz 3 (H. Behnke[18])):

$$\sum_{m < k_n} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq A\, k_n \log k_n \qquad (n \geqq 2). \tag{37_{III}}$$

---

[16]) A. Khintchine „Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen" [Mathematische Annalen 92 (1924), S. 115—125], Satz II.

[17]) (33) folgt auch unmittelbar aus einem älteren Borel-Bernsteinschen Satze (Literatur l. c. [6]), S. 215), wonach bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für fast jedes θ in (30)

$$a_n = O(n^{1+\varepsilon})$$

ist.

[18]) H. Behnke „Zur Theorie der diophantischen Approximationen" [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 3 (1924), S. 261 bis 318], S. 289.

Hilfssatz 4:

$$\sum_{m \leqq x} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq c\, x \log^{2+\varepsilon} x. \tag{38$_{\text{II}}$}$$

Beweis: Ich bestimme $n = n(x)$ durch

$$k_{n-1} \leqq x < k_n. \tag{39$_{\text{III}}$}$$

Aus (33), (37) und (39) folgt dann

$$\sum_{m \leqq x} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq \sum_{m < k_n} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq A\, k_n \log k_n \leqq c\, k_{n-1} \log^{2+\varepsilon} k_{n-1} \leqq c\, x \log^{2+\varepsilon} x.$$

Beweis von (21$_{\text{II}}$): Es ist

$$\sum_{n \leqq x} d(n)\, e^{2n\pi\theta i} = \sum_{ab \leqq x} e^{2ab\pi\theta i} = 2 \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \sum_{a \leqq b \leqq \frac{x}{a}} e^{2ab\pi\theta i} - \sum_{a \leqq \sqrt{x}} e^{2a^2\pi\theta i}, \tag{40}$$

$$\left| \sum_{a \leqq b \leqq \frac{x}{a}} e^{2ab\pi\theta i} \right| \leqq \frac{c}{|\sin a\pi\theta|} \leqq \frac{c}{\{a\theta\}}. \tag{41$_{\text{III}}$}$$

Aus (40), (41) und (38), mit $\sqrt{x}$ statt x, folgt

$$\left| \sum_{n \leqq x} d(n)\, e^{2n\pi\theta i} \right| \leqq c \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{\{a\theta\}} + \sqrt{x} \leqq c\, x^{\frac{1}{2}} \log^{2+\varepsilon} x.$$

Beweis von (9$_{\text{II}}$): Bezeichnet $\chi(n)$ den Nichthauptcharakter mod 4, d. h. ist

$$\chi(n) = 0 \text{ für gerades } n, \quad \chi(n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{ für ungerades } n, \tag{42}$$

so hat man bekanntlich für natürliches n

$$r_2(n) = 4 \sum_{d \mid n} \chi(d).$$

Also ist

$$\begin{aligned} R_2(x) &= 1 + \sum_{n \leqq x} r_2(n)\, e^{2n\pi\theta i} = 1 + 4 \sum_{ab \leqq x} \chi(a)\, e^{2ab\pi\theta i} \\ &= 1 + 4 \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \chi(a) \sum_{a \leqq b \leqq \frac{x}{a}} e^{2ab\pi\theta i} + 4 \sum_{b \leqq \sqrt{x}} \sum_{b \leqq a \leqq \frac{x}{b}} \chi(a)\, e^{2ab\pi\theta i} \\ &\quad - 4 \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \chi(a)\, e^{2a^2\pi\theta i}, \end{aligned}$$

$$|R_2(x)| \leqq 4 \sum_{b \leqq \sqrt{x}} \left| \sum_{b \leqq a \leqq \frac{x}{b}} \chi(a)\, e^{2ab\pi\theta i} \right| + 4 \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \left| \sum_{a \leqq b \leqq \frac{x}{a}} e^{2ab\pi\theta i} \right| + 1 + 4\sqrt{x}$$

$$\leqq 4 \sum_{b \leqq \sqrt{x}} \left| \sum_{b \leqq a \leqq \frac{x}{b}} \chi(a)\, e^{2ab\pi\theta i} \right| + c\, x^{\frac{1}{2}} \log^{2+\varepsilon} x, \tag{43$_{\text{II}}$}$$

wie aus dem Beweise von (21) hervorgeht.

Durchläuft m eine endliche Reihe konsekutiver ganzer Zahlen, so ist

$$\left|\sum_m e^{2(4m\pm1)b\pi\theta i}\right| = \left|\sum_m e^{8mb\pi\theta i}\right| \leqq \frac{c}{|\sin 4b\pi\theta|} \leqq \frac{c}{\{4b\theta\}}.$$

In Verbindung mit (42) ergibt dies

$$\left|\sum_{b\leqq a\leqq\frac{x}{b}} \chi(a)\, e^{2ab\pi\theta i}\right| \leqq \left|\sum_m e^{2(4m+1)b\pi\theta i}\right| + \left|\sum_m e^{2(4m-1)b\pi\theta i}\right| \leqq \frac{c}{\{4b\theta\}},$$

also nach (38), mit $4\sqrt{x}$ statt x,

$$4\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\left|\sum_{b\leqq a\leqq\frac{x}{b}} \chi(a)\, e^{2ab\pi\theta i}\right|$$

$$(44_{II}) \qquad \leqq c\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{\{4b\theta\}} \leqq c\sum_{b\leqq 4\sqrt{x}}\frac{1}{\{b\theta\}} \leqq c\,x^{\frac{1}{2}}\log^{2+\varepsilon}x.$$

(43) und (44) liefern die Behauptung.

Beweis von (12_{II}): Es sei für natürliches n

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

(Teilersumme von n),

$$(45) \qquad \sum_{0\leqq n\leqq x} r_4(n) = A_4(x), \qquad \sum_{n\leqq x}\sigma(n) = S(x).$$

Dann gilt bekanntlich[19])

$$(46) \qquad A_4(x) = 8\,S(x) - 32\,S\left(\frac{x}{4}\right) + 1.$$

Aus (45) und (46) folgt für natürliches n

$$r_4(n) = \begin{cases} 8\,\sigma(n) & \text{für} \quad n \not\equiv 0 \pmod 4 \\ 8\,\sigma(n) - 32\,\sigma\left(\frac{n}{4}\right) & \text{für} \quad n \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

$$R_4(x) = 1 + \sum_{n\leqq x} r_4(n)\, e^{2n\pi\theta i}$$

$$(47) \qquad = 1 + 8\sum_{n\leqq x}\sigma(n)\, e^{2n\pi\theta i} - 32\sum_{n\leqq\frac{x}{4}}\sigma(n)\, e^{8n\pi\theta i}.$$

Aus (38) folgt durch partielle Summation

$$(48_{II}) \qquad \sum_{m\leqq x}\frac{1}{m\{m\theta\}} \leqq c\log^{3+\varepsilon}x.$$

Wegen

$$\sum_{n\leqq x}\frac{\sigma(n)}{n}\, e^{2n\pi\theta i} = \sum_{ab\leqq x}\frac{1}{a}\, e^{2ab\pi\theta i} = \sum_{a\leqq x}\frac{1}{a}\sum_{b\leqq\frac{x}{a}} e^{2ab\pi\theta i}$$

ist

$$\left|\sum_{n\leqq x}\frac{\sigma(n)}{n}\, e^{2n\pi\theta i}\right| \leqq \sum_{a\leqq x}\frac{1}{a}\left|\sum_{b\leqq\frac{x}{a}} e^{2ab\pi\theta i}\right|.$$

---

[19]) W. Sierpiński „Teorja liczb" (Warszawa 1925), S. 365 (76). Vgl. auch l. c. [8]), S. 69 (2. 3).

In Verbindung mit (41) hat man also

$$(49_{\text{III}}) \qquad \left| \sum_{n \leqq x} \frac{\sigma(n)}{n} e^{2n\pi\theta i} \right| \leqq c \sum_{a \leqq x} \frac{1}{a\{a\theta\}}$$

und indem man in (49) θ durch 4θ ersetzt

$$(50_{\text{III}}) \qquad \left| \sum_{n \leqq x} \frac{\sigma(n)}{n} e^{8n\pi\theta i} \right| \leqq c \sum_{a \leqq x} \frac{1}{a\{4a\theta\}} \leqq c \sum_{a \leqq 4x} \frac{1}{a\{a\theta\}}.$$

Aus (49), (48) und (50), (48) (mit $4x$ statt x) folgt

$$\left| \sum_{n \leqq x} \frac{\sigma(n)}{n} e^{2n\pi\theta i} \right| \leqq c \log^{3+\varepsilon} x,$$

$$\left| \sum_{n \leqq x} \frac{\sigma(n)}{n} e^{8n\pi\theta i} \right| \leqq c \log^{3+\varepsilon} x,$$

also (nochmalige partielle Summation)

$$(51_{\text{II}}) \qquad \left| \sum_{n \leqq x} \sigma(n) e^{2n\pi\theta i} \right| \leqq c x \log^{3+\varepsilon} x,$$

$$(52_{\text{II}}) \qquad \left| \sum_{n \leqq \frac{x}{4}} \sigma(n) e^{8n\pi\theta i} \right| \leqq c x \log^{3+\varepsilon} x.$$

(47), (51) und (52) liefern die Behauptung.

§ 2. (10_{I}), (11_{II}) (Analytischer Teil).

Ich betrachte statt $R_3(x)$ den konjugiert komplexen Wert

$$(53) \qquad S_3(x) = S_3(x, \theta) = \sum_{0 \leqq n \leqq x} r_3(n) e^{-2n\pi\theta i}$$

und habe also die Behauptung für die Summe (53) nachzuweisen. θ sei in diesem Paragraphen ganz beliebig. Ich nehme an, daß

$$(54) \qquad x \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$$

ist. $s = \sigma + ti$ (σ, t reell) bezeichne eine komplexe Variable. Ich setze

$$(55) \qquad \vartheta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s} \qquad (\sigma > 0).$$

Hilfssatz 5 (O. Perron [20]): *Es sei*

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots, \quad \lambda_n \to \infty;$$

die Reihe

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n s}$$

---

[20]) Vgl. z. B. G. H. Hardy und Marcel Riesz "The general theory of Dirichlet's series" (Cambridge 1915), Theorem 13.

konvergiere für $s = \beta + \gamma i$; *es sei*

$$a > 0, \quad a > \beta, \quad \lambda_N < \xi < \lambda_{N+1}.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(s) \frac{e^{\xi s}}{s} ds.$$

Hilfssatz 6:

$$S_3(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}-\infty i}^{\frac{1}{x}+\infty i} \vartheta^3(s) \frac{e^{x(s-2\pi\theta i)}}{s-2\pi\theta i} ds. \tag{56}$$

Beweis: Aus (55) folgt für $\sigma > 0$

$$\vartheta^3(s+2\pi\theta i) = \sum_{m_1, m_2, m_3 = -\infty}^{\infty} e^{-(m_1^2+m_2^2+m_3^2)(s+2\pi\theta i)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_3(n) e^{-2n\pi\theta i} e^{-ns}.$$

Ich wende jetzt Hilfssatz 5 an mit

$$F(s) = \vartheta^3(s+2\pi\theta i); \quad \lambda_n = n, \quad \alpha_n = r_3(n) e^{-2n\pi\theta i} \qquad (n \geqq 0);$$

$$\xi = x, \quad \beta = \frac{1}{2x}, \quad \gamma = 0, \quad a = \frac{1}{x}, \quad N = x - \frac{1}{2}.$$

Dann folgt

$$S_3(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}-\infty i}^{\frac{1}{x}+\infty i} \vartheta^3(s+2\pi\theta i) \frac{e^{xs}}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}-\infty i}^{\frac{1}{x}+\infty i} \vartheta^3(s) \frac{e^{x(s-2\pi\theta i)}}{s-2\pi\theta i} ds.$$

Hilfssatz 7: *Für* $\xi > x^3$ *werde*

$$T_1(x) = T_1(x, \xi, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}+x^3 i}^{\frac{1}{x}+\xi i} \vartheta^3(s) \frac{e^{x(s-2\pi\theta i)}}{s-2\pi\theta i} ds, \tag{57}$$

$$T_2(x) = T_2(x, \xi, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}-\xi i}^{\frac{1}{x}-x^3 i} \vartheta^3(s) \frac{e^{x(s-2\pi\theta i)}}{s-2\pi\theta i} ds \tag{58}$$

gesetzt. Dann ist

$$|T_1(x)| \leqq c, \quad |T_2(x)| \leqq c. \tag{59}$$

Beweis: Da aus (55), (57) und (58)

$$|T_2(x, \xi, \theta)| = |T_1(x, \xi, -\theta)|$$

folgt, so genügt es die erste Ungleichung (59) nachzuweisen.

Bis zum Schluß dieses Paragraphen sei, ohne daß dies besonders hervorgehoben wird, $\sigma = \frac{1}{x}$, also $s = \frac{1}{x} + ti$.

Aus (55) und (57) ergibt sich

$$T_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}+x^2 i}^{\frac{1}{x}+\xi i} \sum_{n=0}^{\infty} r_3(n) \frac{e^{-ns+x(s-2\pi\theta i)}}{s-2\pi\theta i}\, ds. \tag{60}$$

Wegen

$$|e^{-ns+x(s-2\pi\theta i)}| = e^{1-\frac{n}{x}}, \qquad \frac{1}{|s-2\pi\theta i|} \leqq x,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_3(n) \left| \frac{e^{-ns+x(s-2\pi\theta i)}}{s-2\pi\theta i} \right| \leqq cx \sum_{n=0}^{\infty} r_3(n) e^{-\frac{n}{x}}$$

darf man in (60) Summation und Integration vertauschen:

$$T_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_3(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}+x^2 i}^{\frac{1}{x}+\xi i} \frac{e^{(x-n)s-2\pi x\theta i}}{s-2\pi\theta i}\, ds.$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$|T_1(x)| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} r_3(n) \left| \int_{\frac{1}{x}+x^2 i}^{\frac{1}{x}+\xi i} \frac{e^{(x-n)s}}{s-2\pi\theta i}\, ds \right|. \tag{61}$$

Wegen

$$\left| \frac{1}{s-2\pi\theta i} - \frac{1}{ti} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{x}+2\pi\theta i}{(s-2\pi\theta i)ti} \right| \leqq \frac{c}{t^2}$$

und

$$|e^{(x-n)s}| = e^{1-\frac{n}{x}}$$

ist für $n \geqq 0$, unter Berücksichtigung von (54),

$$\left| \int_{\frac{1}{x}+x^2 i}^{\frac{1}{x}+\xi i} \frac{e^{(x-n)s}}{s-2\pi\theta i}\, ds \right| \leqq \left| \int_{\frac{1}{x}+x^2 i}^{\frac{1}{x}+\xi i} \frac{e^{(x-n)s}}{ti}\, ds \right| + c \int_{x^2}^{\infty} \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{n}{x}}$$

$$= \left| \int_{x^2}^{\xi} e^{(x-n)\left(\frac{1}{x}+ti\right)} \frac{dt}{t} \right| + \frac{c}{x^3} e^{-\frac{n}{x}} = e^{1-\frac{n}{x}} \left| \int_{x^2}^{\xi} e^{(x-n)ti} \frac{dt}{t} \right| + \frac{c}{x^3} e^{-\frac{n}{x}}$$

$$\leqq ce^{-\frac{n}{x}} \frac{1}{x^3|x-n|} + \frac{c}{x^3} e^{-\frac{n}{x}} \leqq \frac{c}{x^3} e^{-\frac{n}{x}}.$$

Aus (61) folgt daher

$$|T_1(x)| \leqq \frac{c}{x^3} \sum_{n=0}^{\infty} r_3(n)\, e^{-\frac{n}{x}} = c\left(\frac{1}{x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m^2}{x}}\right)^3$$

$$\leqq c\left(\frac{1}{x} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m}{x}}\right)^3 = c\left(\frac{1}{x} \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{x}}}\right)^3 \leqq c.$$

Hilfssatz 8:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}+x^2 i}^{\frac{1}{x}+\infty i} \vartheta^3(s) \frac{e^{x(s-2\pi\theta i)}}{s-2\pi\theta i}\, ds \right| < c, \tag{62}$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}-\infty i}^{\frac{1}{x}-x^2 i} \vartheta^3(s) \frac{e^{x(s-2\pi\theta i)}}{s-2\pi\theta i}\, ds \right| < c \tag{63}$$

Beweis: Ergibt sich aus (57), (58) und (59), wenn man ξ gegen Unendlich streben läßt.

Einführung der Fareyzerschneidung[21]). Auf die t-Achse $-\infty < t < \infty$ lege ich alle zu $\sqrt{x}$ gehörigen Fareybrüche $\frac{h}{k}$ und füge auch die zugehörigen Medianten $\frac{h+h'}{k+k'}$ für je zwei Nachbarpunkte $\frac{h}{k}$ und $\frac{h'}{k'}$ hinzu. Jeder Punkt $\frac{h}{k}$ mit

$$h \gtrless 0, \quad 1 \leqq k \leqq \sqrt{x}, \quad (h,k) = 1 \tag{64}$$

bestimmt dann ein abgeschlossenes Intervall

$$\alpha_{h,k} \leqq t \leqq \beta_{h,k}, \tag{65}$$

das von $\frac{h}{k}$ bis zu den beiden nächsten Medianten reicht.

Aus (64) und der Definition des Intervalls (65) folgt bekanntlich

$$\left| t - \frac{h}{k} \right| \leqq \frac{1}{k\sqrt{x}} \quad \text{für} \quad \alpha_{h,k} \leqq t \leqq \beta_{h,k} \tag{66}$$

und

$$\frac{1}{k\sqrt{x}} \leqq \beta_{h,k} - \alpha_{h,k} \leqq \frac{2}{k\sqrt{x}}. \tag{67}$$

Hilfssatz 9 (Jarník[22])): *Gehört t dem Intervall*

$$2\pi\alpha_{h,k} \leqq t \leqq 2\pi\beta_{h,k} \tag{68}$$

---

[21]) Für die im folgenden benutzten Eigenschaften der Fareybrüche vgl. z. B. E. Landau „Vorlesungen über Zahlentheorie“ (Leipzig 1927, 3 Bände), Bd. I, S. 98–100.

[22]) l. c. [11]), S. 708 (13).

an, so ist

$$|\vartheta(s)| \leqq c k^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h}{k}\right)^2\right)^{-\frac{1}{4}}. \tag{69}$$

Hilfssatz 10: *Es werde*

$$\omega(h,k) = \min_{\alpha_{h,k} \leqq t \leqq \beta_{h,k}} \left|\frac{1}{2\pi x} + (t-\theta)i\right| \tag{70}$$

gesetzt. Dann ist

$$\int_{2\pi\alpha_{h,k}}^{2\pi\beta_{h,k}} \left|\vartheta^3(s) \frac{e^{x(s-2\pi\theta i)}}{s-2\pi\theta i}\right| dt \leqq \frac{c x^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{3}{2}} \omega(h,k)}. \tag{71}$$

Beweis: In (71) ist erstens

$$|e^{x(s-2\pi\theta i)}| = e,$$

zweitens nach (68) und (69)

$$|\vartheta^3(s)| \leqq c k^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h}{k}\right)^2\right)^{-\frac{3}{4}},$$

drittens nach (70)

$$\left|\frac{1}{s-2\pi\theta i}\right| = \frac{1}{2\pi\left|\frac{s}{2\pi} - \theta i\right|} \leqq \frac{1}{\omega(h,k)}.$$

Die linke Seite von (71) ist also

$$\leqq \frac{c}{k^{\frac{3}{2}}\omega(h,k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h}{k}\right)^2\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{c x^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}\omega(h,k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{4}}} = \frac{c x^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}\omega(h,k)}.$$

Hilfssatz 11:

$$|S_3(x)| \leqq c + c x^{\frac{1}{2}} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{\substack{-x^2 \leqq h \leqq x^2 \\ (h,k)=1}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}\omega(h,k)}. \tag{72}$$

Beweis: Aus (56), (62), (63), (71) und der Definition von (68) folgt

$$|S_3(x)| \leqq c + \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}-x^2 i}^{\frac{1}{x}+x^2 i} \vartheta^3(s) \frac{e^{x(s-2\pi\theta i)}}{s-2\pi\theta i} ds\right|$$

$$\leqq c + \sum_{k,h} \int_{2\pi\alpha_{h,k}}^{2\pi\beta_{h,k}} \left|\vartheta^3(s) \frac{e^{x(s-2\pi\theta i)}}{s-2\pi\theta i}\right| dt \tag{73}$$

$$\leqq c + c x^{\frac{1}{2}} \sum_{k,h} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}\omega(h,k)}. \tag{74}$$

In (73) und (74) durchlaufen k, h alle Zahlenpaare mit (64), für die das zugehörige Intervall (68) mindestens einen Punkt mit der Strecke

$$-x^3 \leqq t \leqq x^3 \tag{75}$$

gemeinsam hat. Liegt nun t in (68), so ist wegen (66)

$$\left|\frac{h}{k} - \frac{t}{2\pi}\right| \leqq 1,$$

also wegen (75) und (64)

$$|h| \leqq k|t| + k \leqq x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \leqq x^4.$$

Aus (74) folgt daher die Behauptung (72).

Ich lasse jetzt die Beschränkung (54) fallen. Dann gilt

Hilfssatz 12:

$$|S_3(x)| \leqq c + cx^{\frac{1}{2}} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{\substack{-x^3 \leqq h \leqq x^3 \\ (h,k)=1}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}\omega(h,k)}. \tag{76}$$

Beweis: Für natürliches n liefert (72)

$$\left|S_3\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right| = |S_3(n)| \leqq c + c\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k \leqq \sqrt{n+\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{-(n+\frac{1}{2})^3 \leqq h \leqq (n+\frac{1}{2})^3 \\ (h,k)=1}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}\omega(h,k)}$$

$$\leqq c + cn^{\frac{1}{2}} \sum_{k \leqq \sqrt{n}} \sum_{\substack{-n^3 \leqq h \leqq n^3 \\ (h,k)=1}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}\omega(h,k)}.$$

Da die rechte Seite von (76) mit x wächst und die linke im Intervall $n \leqq x < n+1$ konstant bleibt, so ist Hilfssatz 12 bewiesen.

§ 3. (10_{I}), (11_{II}) (Arithmetischer Teil).

Ich setze jetzt wieder voraus, daß

$$0 < \theta < 1, \quad \theta \text{ irrational}$$

ist.

Klasseneinteilung der Zahlenpaare h, k. Die in (76) auftretenden Zahlenpaare h, k teile ich jetzt in 5 Klassen ein, so daß jedes Paar in mindestens einer Klasse vorkommt.

Die 1. Klasse enthält die drei Paare $h^{(0)}, k^{(0)}$; $h^{(1)}, k^{(1)}$; $h^{(2)}, k^{(2)}$ mit

$$\alpha_{h^{(1)},k^{(1)}} < \theta < \beta_{h^{(1)},k^{(1)}}, \quad \beta_{h^{(0)},k^{(0)}} = \alpha_{h^{(1)},k^{(1)}}, \quad \alpha_{h^{(2)},k^{(2)}} = \beta_{h^{(1)},k^{(1)}}. \tag{77}$$

Bemerkung. Da die $\alpha_{h,k}$ und $\beta_{h,k}$ ihrer Definition nach rationale Zahlen sind, muß θ im Inneren eines der Intervalle (65) liegen. Der „Mittelpunkt" $\frac{h^{(1)}}{k^{(1)}}$ dieses Intervalls, sowie die „Mittelpunkte" $\frac{h^{(0)}}{k^{(0)}}$, $\frac{h^{(2)}}{k^{(2)}}$ der von links und rechts anstoßenden Intervalle, bilden die 1. Klasse.

Die 2. Klasse enthält alle Zahlenpaare h, k, die nicht zur ersten Klasse gehören und für die

$$(78) \qquad 0 < \frac{h}{k} < 2, \quad \left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{2}{k\sqrt{x}}.$$

Die 3. Klasse enthält alle Zahlenpaare h, k, die nicht zur ersten Klasse gehören und für die

$$(79) \qquad 0 < \frac{h}{k} < 2, \quad \left|\theta - \frac{h}{k}\right| \geqq \frac{2}{k\sqrt{x}}.$$

Die 4. Klasse enthält nur das eine Paar

$$(80) \qquad h = 0, \quad k = 1.$$

Die 5. Klasse enthält alle Paare mit

$$(81) \qquad -x^5 \leqq h < 0, \quad 2k \leqq h \leqq x^5.$$

Ich bezeichne jetzt die den Klassen 1 bis 5 entsprechenden Bestandteile von (76) mit $\sum_1$ bis $\sum_5$. Dann liefert Hilfssatz 12

$$(82_{\text{III}}) \qquad |S_3(x)| \leqq c + \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4 + \sum_5.$$

Zunächst nehme ich die Abschätzung von $\sum_4$ und $\sum_5$ vor, da hierbei der arithmetische Charakter von θ keine Rolle spielt und beide Fälle I und II gemeinsam behandelt werden können.

Hilfssatz 13:

$$(83_{\text{III}}) \qquad \sum_4 \leqq c x^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Aus (76) und (80) folgt

$$\sum_4 = c x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\omega(0,1)},$$

und hierin ist nach (70)

$$\omega(0,1) \geqq c.$$

Hilfssatz 14:

$$(84_{\text{III}}) \qquad \sum_5 \leqq c x^{\frac{3}{4}} \log x.$$

Beweis: Für die zugehörigen $\omega(h,k)$ ist nach (81) und (70)

$$\omega(h,k) \geqq c\frac{|h|}{k}.$$

Aus (76) folgt daher

$$\sum_5 \leqq c x^{\frac{1}{2}} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h \leqq x^5} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \frac{k}{h} = c x^{\frac{1}{2}} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \sum_{h \leqq x^5} \frac{1}{h} \leqq c x^{\frac{3}{4}} \log x.$$

Hilfssatz 15:

$$k^{(0)} \geqq c\sqrt{x}, \quad k^{(1)} \geqq c\sqrt{x}, \quad k^{(2)} \geqq c\sqrt{x}. \tag{85$_I$}$$

Beweis: Aus (66) und (77) folgt

$$\left|\theta - \frac{h^{(1)}}{k^{(1)}}\right| \leqq \frac{1}{k^{(1)}\sqrt{x}}. \tag{86}$$

Es ist in (30)

$$a_n \leqq c. \tag{87$_I$}$$

Irgendein Zahlenpaar h, k mit $k > 0$ sei vorgegeben. Ist $\frac{h}{k}$ keinem der Näherungsbrüche (31) gleich, so gilt bekanntlich

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| \geqq \frac{1}{2k^2}. \tag{88}$$

Wenn dagegen für ein geeignetes n

$$\frac{h}{k} = \frac{h_n}{k_n} \tag{89}$$

ist, so liefert (35)

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| > \frac{1}{2k_n k_{n+1}}. \tag{90}$$

Für $n \geqq 1$ hat man ferner, wegen (87),

$$k_{n+1} \leqq (a_{n+1}+1)k_n \leqq ck_n. \tag{91$_I$}$$

In Verbindung mit (90) und (89) ergibt dies

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| \geqq \frac{c}{k_n^2} \geqq \frac{c}{k^2}. \tag{92$_I$}$$

(88) und (92) entnimmt man, daß stets

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| \geqq \frac{c}{k^2} \tag{93$_I$}$$

ist. Insbesondere gilt also

$$\left|\theta - \frac{h^{(1)}}{k^{(1)}}\right| \geqq \frac{c}{(k^{(1)})^2}. \tag{94$_I$}$$

Aus (86) und (94) folgt

$$k^{(1)} \geqq c\sqrt{x}. \tag{95$_I$}$$

Für zwei benachbarte Fareybrüche $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}$ mit (64) gilt bekanntlich

$$\left|\frac{h}{k} - \frac{h'}{k'}\right| = \frac{1}{kk'}. \tag{96}$$

Aus (77), (86) und (96) ergibt sich für $\nu = 0$ oder 2

$$\left|\theta - \frac{h^{(\nu)}}{k^{(\nu)}}\right| \leqq \left|\theta - \frac{h^{(1)}}{k^{(1)}}\right| + \left|\frac{h^{(1)}}{k^{(1)}} - \frac{h^{(\nu)}}{k^{(\nu)}}\right| \leqq \frac{1}{k^{(1)}\sqrt{x}} + \frac{1}{k^{(1)}k^{(\nu)}}. \tag{97}$$

Aus (92), (97), (95) und (64) folgt

$$\frac{c}{(k^{(\nu)})^2} \leqq \left|\theta - \frac{h^{(\nu)}}{k^{(\nu)}}\right| \leqq \frac{c}{x} + \frac{c}{k^{(\nu)}\sqrt{x}} \leqq \frac{c}{k^{(\nu)}\sqrt{x}},$$

also

$$k^{(0)} \geqq c\sqrt{x}, \quad k^{(3)} \geqq c\sqrt{x}. \tag{98$_\text{I}$}$$

(95) und (98) liefern die Behauptung (85).

Hilfssatz 16:

$$\sum_1 \leqq c x^{\frac{3}{4}}. \tag{99$_\text{I}$}$$

Beweis: Aus (76) und (77) folgt

$$\sum_1 = c x^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{2} \frac{1}{(k^{(\nu)})^{\frac{3}{2}}\, \omega(h^{(\nu)}, k^{(\nu)})}. \tag{100}$$

Hierin ist wegen (70)

$$\omega(h^{(\nu)}, k^{(\nu)}) \geqq \frac{1}{2\pi x}. \tag{101}$$

Aus (100), (101) und (85) folgt

$$\sum_1 \leqq c x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{3}{4}} \frac{1}{x}} = c x^{\frac{3}{4}}.$$

Hilfssatz 17:

$$\sum_2 \leqq c x^{\frac{3}{4}} \log x. \tag{102$_\text{I}$}$$

Beweis: Aus (93) und (78) folgt

$$\frac{c}{k^2} \leqq \left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{2}{k\sqrt{x}}.$$

Für jedes der 2. Klasse angehörige Zahlenpaar ist demnach

$$k \geqq c x^{\frac{1}{2}}. \tag{103$_\text{I}$}$$

Nach (64) und (78) muß

$$k \leqq \sqrt{x}, \quad h < 2k \leqq 2\sqrt{x} \tag{104}$$

sein. Daher gehören der 2. Klasse höchstens

$$c\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = cx$$

Paare h, k an.

Für jedes von ihnen liegt zwischen $\frac{h}{k}$ und θ eine gewisse Anzahl $n(h,k) \geqq 1$ Intervalle (65), deren jedes nach (67) und (104) eine Länge $\geqq \frac{c}{x}$ hat. Aus (70) folgt daher

$$\omega(h,k) \geqq \frac{c}{x} n(h,k). \tag{105}$$

Aus (76), (103) und (105) folgt

$$(106_{\mathrm{I}}) \qquad \sum_{2} \leqq c x^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^{\frac{3}{4}}} \sum_{h,k \text{ in Kl. } 2} \frac{1}{n(h,k)}.$$

In (106) treten rechts höchstens cx Glieder auf; jeder Wert von $n = n(h,k)$ kommt höchstens zweimal vor. (106) ergibt daher

$$\sum_{2} \leqq c x^{\frac{3}{4}} \sum_{n \leqq cx} \frac{1}{n} \leqq c x^{\frac{3}{4}} \log x.$$

Hilfssatz 18:

$$(107_{\mathrm{I}}) \qquad \sum_{m \leqq x} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}} \{m\theta\}} \leqq c x^{\frac{1}{2}} \log x.$$

Beweis: Ich bestimme $n = n(x)$ durch (39) und wende (37) nebst (91), mit $n-1$ statt n, an. Das gibt

$$\sum_{m \leqq x} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq \sum_{m < k_n} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq A k_n \log k_n \leqq c k_{n-1} \log k_{n-1} \leqq c x \log x,$$

woraus (107) durch partielle Summation folgt.

Hilfssatz 19:

$$(108_{\mathrm{I}}) \qquad \sum_{3} \leqq c x^{\frac{3}{4}} \log x.$$

Beweis: Es gehöre h, k der 3. Klasse an. Dann ist für jedes t in (65), wegen (66) und (79),

$$(109) \qquad |t-\theta| \geqq \left|\theta - \frac{h}{k}\right| - \left|t - \frac{h}{k}\right| \geqq \left|\theta - \frac{h}{k}\right| - \frac{1}{k\sqrt{x}} \geqq \frac{1}{2}\left|\theta - \frac{h}{k}\right|.$$

Aus (70) und (109) folgt

$$k^{\frac{3}{4}} \omega(h,k) \geqq \frac{1}{2} k^{\frac{1}{4}} |k\theta - h|.$$

(76) ergibt daher

$$(110) \qquad \sum_{3} = c x^{\frac{1}{4}} \sum_{h,k \text{ in Kl. } 3} \frac{1}{k^{\frac{3}{4}} \omega(h,k)} \leqq c x^{\frac{1}{4}} \sum_{h,k \text{ in Kl. } 3} \frac{1}{k^{\frac{1}{4}} |k\theta - h|}.$$

Hierin ist bei festem k die entsprechende h-Summe, wegen (79),

$$\sum_{h} \frac{1}{|k\theta - h|} \leqq 2\left(\frac{1}{\{k\theta\}} + \sum_{h=1}^{2k} \frac{1}{h}\right) \leqq \frac{c}{\{k\theta\}} + c \log k.$$

Aus (110) und (64) folgt daher

$$(111) \qquad \sum_{3} \leqq c x^{\frac{1}{2}} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}} \{k\theta\}} + c x^{\frac{1}{2}} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{\log k}{k^{\frac{1}{2}}} \leqq c x^{\frac{1}{2}} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}} \{k\theta\}} + c x^{\frac{3}{4}} \log x.$$

Aus (111) und (107), mit $\sqrt{x}$ statt x, folgt die Behauptung (108).

Beweis von (10_{I}): (82), (99), (102), (108), (83), (84).

Hilfssatz 20:

$$(112_{II}) \qquad k^{(0)} \geqq c\frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\varepsilon} x}, \qquad k^{(1)} \geqq c\frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\varepsilon} x}, \qquad k^{(2)} \geqq c\frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\varepsilon} x}.$$

Beweis: Nach (34) ist für $\nu = 0$ oder 1 oder 2

$$(113_{II}) \qquad \left|\theta - \frac{h^{(\nu)}}{k^{(\nu)}}\right| \geqq \frac{c}{(k^{(\nu)})^2 \log^{1+\varepsilon} 2k^{(\nu)}}.$$

Zusammen mit (86) ergibt dies

$$k^{(1)} \log^{1+\varepsilon} 2k^{(1)} \geqq c\sqrt{x}.$$

Wegen $2k^{(1)} \leqq 2\sqrt{x} \leqq x$ ist also

$$(114_{II}) \qquad k^{(1)} \geqq c\frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\varepsilon} x}.$$

Es sei jetzt $\nu = 0$ oder 2. Aus (97) und (64) folgt

$$\left|\theta - \frac{h^{(\nu)}}{k^{(\nu)}}\right| \leqq \frac{c}{k^{(1)} k^{(\nu)}}.$$

In Verbindung mit (113) und (64) ergibt dies

$$k^{(\nu)} \log^{1+\varepsilon} 2k^{(\nu)} \geqq c k^{(1)},$$

$$(115_{II}) \qquad k^{(\nu)} \geqq c\frac{k^{(1)}}{\log^{1+\varepsilon} x}.$$

Für zwei benachbarte Fareybrüche $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}$ mit (64) gilt bekanntlich

$$k + k' > \sqrt{x}.$$

Ist also $k^{(1)} \leqq \frac{1}{2}\sqrt{x}$, so hat man wegen (77)

$$k^{(\nu)} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{x}.$$

Ist dagegen $k^{(1)} > \frac{1}{2}\sqrt{x}$, so folgt aus (115)

$$k^{(\nu)} \geqq c\frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\varepsilon} x}.$$

Stets ist also

$$(116_{II}) \qquad k^{(0)} \geqq c\frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\varepsilon} x}, \qquad k^{(2)} \geqq c\frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\varepsilon} x}.$$

Aus (114) und (116) folgt die Behauptung (112).

Hilfssatz 21:

$$(117_{II}) \qquad \sum_1 \leqq c x^{\frac{3}{4}} \log^{\frac{3}{2}+\varepsilon} x.$$

Beweis: Aus (100), (101) und (112), mit $\frac{2}{3}\varepsilon$ statt ε, folgt

$$\sum_1 \leqq c x^{\frac{3}{4}} \left(\frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\frac{3}{2}\varepsilon} x}\right)^{-\frac{3}{2}} = c x^{\frac{3}{4}} \log^{\frac{3}{2}+\varepsilon} x.$$

Hilfssatz 22:

$$\sum_{2} \leqq c x^{\frac{3}{4}} \log^{\frac{3}{2}+\varepsilon} x . \tag{118$_{II}$}$$

Beweis: Aus (34) und (78) folgt für jedes der zweiten Klasse angehörige Zahlenpaar h, k

$$\frac{c}{k^2 \log^{1+\varepsilon} 2k} \leqq \left| \theta - \frac{h}{k} \right| < \frac{2}{k\sqrt{x}} .$$

Wegen $2k \leqq 2\sqrt{x} \leqq x$ ist also

$$k \geqq c \frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\varepsilon} x} . \tag{119$_{II}$}$$

Aus (76) und (105) folgt, wenn $n(h,k)$ wie beim Beweise von Hilfssatz 17 definiert ist,

$$\begin{aligned} \sum_{2} &\leqq c x^{\frac{3}{2}} \sum_{h,k \text{ in Kl. 2}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} n(h,k)} \\ &= c x^{\frac{3}{4}} \sum_{\substack{h,k \text{ in Kl. 2,} \\ k < \frac{1}{4}\sqrt{x}}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} n(h,k)} + c x^{\frac{3}{4}} \sum_{\substack{h,k \text{ in Kl. 2,} \\ \frac{1}{4}\sqrt{x} \leqq k \leqq \sqrt{x}}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} n(h,k)} . \end{aligned} \tag{120}$$

Ich setze zur Abkürzung

$$\sum_{\substack{h,k \text{ in Kl. 2,} \\ k < \frac{1}{4}\sqrt{x}}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} n(h,k)} = \Sigma', \qquad \sum_{\substack{h,k \text{ in Kl. 2,} \\ \frac{1}{4}\sqrt{x} \leqq k \leqq \sqrt{x}}} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} n(h,k)} = \Sigma'' . \tag{121}$$

Aus (120) folgt dann

$$\sum_{2} \leqq c x^{\frac{3}{4}} \Sigma' + c x^{\frac{3}{4}} \Sigma'' . \tag{122}$$

In Σ' ist wegen (78)

$$\left| \theta - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{2k^2} .$$

Daher ist $\frac{h}{k}$ einem der Näherungsbrüche (31) von θ gleich. Wegen $(h,k) = 1$, $h > 0$ ist also für ein geeignetes $m \geqq 1$

$$h = h_m, \quad k = k_m . \tag{123}$$

Nun ist, ganz oberflächlich abgeschätzt,

$$4 k_m \geqq 2^{\frac{m}{2}} \qquad (m \geqq 1). \tag{124}$$

Diese natürlich wohlbekannte Abschätzung ist für $m = 1$ oder 2 klar, und allgemein ergibt sie sich aus

$$k_{m+2} \geqq k_{m+1} + k_m \geqq 2 k_m$$

durch Induktion so:

$$4 k_{m+2} \geqq 8 k_m \geqq 2^{\frac{m+2}{2}} .$$

Bezeichnet man also das größte in $\sum'$ nach (123) vorkommende m mit M, so ist nach (124)

$$2^{\frac{M}{2}} \leqq 4 k_M \leqq 4\sqrt{x},$$

d. h.

$$M \leqq c \log x.$$

In $\sum'$ kommen also höchstens $c \log x$ Glieder vor (das gilt offenbar auch dann, wenn es kein M gibt, wenn also $\sum'$ leer ist). Jedes $n(h,k) = n$ tritt höchstens zweimal auf. Aus (119), mit $\frac{\varepsilon}{3}$ statt ε, und (121) folgt daher

$$x^{\frac{3}{2}} \sum' \leqq c x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{x}}{\log^{1+\frac{\varepsilon}{3}} x}\right)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n \leqq c \log x} \frac{1}{n} = c x^{\frac{3}{4}} \log^{\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} x \sum_{n \leqq c \log x} \frac{1}{n}$$

$$(125_{\text{II}}) \qquad \leqq c x^{\frac{3}{4}} \log^{\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} x \log\log x \leqq c x^{\frac{3}{4}} \log^{\frac{3}{2}+\varepsilon} x.$$

In $\sum''$ treten wegen (104) höchstens cx Glieder auf. Jedes $n(h,k) = n$ kommt höchstens zweimal vor. Aus (121) folgt daher

$$(126_{\text{II}}) \qquad x^{\frac{1}{2}} \sum'' \leqq c x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \leqq cx} \frac{1}{n} = c x^{\frac{1}{4}} \sum_{n \leqq cx} \frac{1}{n} \leqq c x^{\frac{1}{4}} \log x.$$

Aus (122), (125) und (126) folgt die Behauptung (118).

Hilfssatz 23:

$$(127_{\text{II}}) \qquad \sum_{m \leqq x} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}} \{m\theta\}} \leqq c x^{\frac{1}{2}} \log^{2+\varepsilon} x.$$

Beweis: Folgt aus (38) durch partielle Summation.

Hilfssatz 24.

$$(128_{\text{II}}) \qquad \sum_{3} \leqq c x^{\frac{1}{4}} \log^{2+\varepsilon} x.$$

Beweis: Folgt aus (111) und (127), mit $\sqrt{x}$ statt x.

Beweis von (11_{II}): (82), (117), (118), (128), (83), (84).

§ 4. $(13_{\text{I,II}})$, (14_{III}), (15_{II}).

Hilfssatz 25 (Hardy[23])): *Es ist für* $n \geqq 1$

$$(129) \qquad r_5(n) = \frac{4}{3} \pi^2 n^{\frac{3}{2}} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^5 e^{-\frac{2np\pi i}{q}}.$$

Hierbei durchläuft p nur die zu q primen Werte, so daß $p = 0$ lediglich zu $q = 1$ gehört, während

$$(130) \qquad S_{p,q} = \sum_{m=0}^{q-1} e^{\frac{2m^2 p\pi i}{q}}$$

eine Gaußsche Summe ist.

[23]) l. c. [10]).

Hilfssatz 26:

$$(131_{\mathrm{I,II}}) \qquad \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{3}{5}}\{q\theta\}} \quad \textit{konvergiert.}$$

Beweis: Folgt durch partielle Summation aus (107) und (38).

Hilfssatz 27:

$$(132_{\mathrm{I,II}}) \qquad R_5(x) = O\left(x^{\frac{4}{5}}\right).$$

Beweis: Aus (129) folgt

$$(133) \quad R_5(x) = 1 + \sum_{n \leqq x} r_5(n)\, e^{2n\pi\theta i} = 1 + c \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^5 \sum_{n \leqq x} e^{2n\pi\left(\theta - \frac{p}{q}\right)i} n^{\frac{3}{5}}.$$

Für die Gaußsche Summe (130) gilt bekanntlich

$$(134) \qquad |S_{p,q}| \leqq \sqrt{2q}.$$

Durchläuft n eine endliche Reihe konsekutiver Zahlen, so ist

$$(135_{\mathrm{III}}) \qquad \left| \sum_{n} e^{2n\pi\left(\theta - \frac{p}{q}\right)i} \right| \leqq \frac{c}{\left\{\theta - \frac{p}{q}\right\}}.$$

Aus (135) folgt durch partielle Summation

$$(136_{\mathrm{III}}) \qquad \left| \sum_{n \leqq x} e^{2n\pi\left(\theta - \frac{p}{q}\right)i} n^{\frac{3}{5}} \right| \leqq c\, x^{\frac{3}{5}} \frac{1}{\left\{\theta - \frac{p}{q}\right\}}.$$

(133), (134) und (136) ergeben

$$(137_{\mathrm{III}}) \qquad |R_5(x)| \leqq 1 + c\, x^{\frac{3}{5}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{1}{5}}} \sum_{p=0}^{q-1} \frac{1}{\left\{\theta - \frac{p}{q}\right\}}.$$

Ich denke mir nunmehr die Zahlen

$$\theta - \frac{p}{q}, \quad 0 \leqq p \leqq q-1$$

modulo Eins reduziert und im Intervall

$$-\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}$$

untergebracht. Das gibt q verschiedene äquidistante Werte mit dem Abstand $\frac{1}{q}$, die ich ϱ nenne. Es ist dann

$$\sum_{p=0}^{q-1} \frac{1}{\left\{\theta - \frac{p}{q}\right\}} = \sum_{\varrho} \frac{1}{|\varrho|}$$

Einer und nur einer dieser Werte, ich nenne ihn ϱ_0, erfüllt die Ungleichung

$$|\varrho_0| < \frac{1}{2q}.$$

Für das zugehörige $p = p_0$ ist mit einem geeigneten ganzen g und einem geeigneten λ auf der Strecke $-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{1}{2}$

$$|\varrho_0| = \left\{\theta - \frac{p_0}{q}\right\} = \frac{|\lambda|}{q}, \qquad \theta - \frac{p_0}{q} = g + \frac{\lambda}{q}.$$

Hieraus folgt weiter

$$q\theta = p_0 + gq + \lambda,$$
$$\{q\theta\} = |\lambda| = q|\varrho_0|.$$

Es ist also

$$|\varrho_0| = \frac{\{q\theta\}}{q}.$$

Für die übrigen ϱ, ich nenne sie ϱ' (sie treten nur für $q \geqq 2$ auf), ist

$$\sum_{\varrho'} \frac{1}{|\varrho'|} \leqq 2 \sum_{p=0}^{q-1} \frac{1}{\frac{1}{2q} + \frac{p}{q}} \leqq c\, q \log q.$$

Man hat daher

$$\sum_{p=0}^{q-1} \frac{1}{\left\{\theta - \frac{p}{q}\right\}} \leqq \frac{q}{\{q\theta\}} + c\, q \log q. \tag{138_{III}}$$

(137) und (138) ergeben

$$|R_5(x)| \leqq 1 + c\, x^{\frac{3}{7}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{2}{7}}\{q\theta\}} + c\, x^{\frac{3}{7}} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{\log q}{q^{\frac{3}{7}}}$$
$$\leqq c\, x^{\frac{3}{7}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{3}{7}}\{q\theta\}} + c\, x^{\frac{3}{7}} = c\, x^{\frac{3}{7}},$$

nach (131).

Beweis von $(13_{I,II})$: Die Behauptung ist für $k = 5$ durch (132) erledigt. Hieraus ergibt sie sich für $k > 5$ durch Induktion $k \to k+1$ so:

$$R_{k+1}(x) = \sum_{0 \leqq n_1^2 + \ldots + n_k^2 + n_{k+1}^2 \leqq x} e^{2(n_1^2 + \ldots + n_k^2 + n_{k+1}^2)\pi\theta i}$$
$$= \sum_{-\sqrt{x} \leqq n_{k+1} \leqq \sqrt{x}} e^{2n_{k+1}^2 \pi\theta i} \sum_{0 \leqq n_1^2 + \ldots + n_k^2 \leqq x - n_{k+1}^2} e^{2(n_1^2 + \ldots + n_k^2)\pi\theta i}$$
$$= \sum_{-\sqrt{x} \leqq n_{k+1} \leqq \sqrt{x}} e^{2n_{k+1}^2 \pi\theta i} R_k(x - n_{k+1}^2),$$

$$|R_{k+1}(x)| \leqq \sum_{-\sqrt{x} \leqq n_{k+1} \leqq \sqrt{x}} |R_k(x - n_{k+1}^2)| \leqq c \sum_{-\sqrt{x} \leqq n_{k+1} \leqq \sqrt{x}} x^{\frac{k}{2}-1} \leqq c\, x^{\frac{k+1}{2}-1}.$$

Hilfssatz 28 (Hardy und Littlewood[24])):

$$\vartheta(\varrho - 2\pi\theta i) = \Omega\left(\sqrt[4]{\frac{1}{\varrho}}\right) \qquad (\varrho > 0,\ \varrho \to 0). \tag{139_{III}}$$

[24]) l. c. [7]).

Beweis von (14_{III})[25]: Aus (55) und (1) folgt für $\varrho > 0$

(140) $$\vartheta^k(\varrho - 2\pi\theta i) = \sum_{n=0}^{\infty} r_k(n)\, e^{2n\pi\theta i} e^{-n\varrho} = (1 - e^{-\varrho}) \sum_{n=0}^{\infty} R_k(n)\, e^{-n\varrho}.$$

Aus

$$R_k(x) = o\left(x^{\frac{k}{4}}\right)$$

würde also für $\varrho \to 0$ folgen

$$\vartheta^k(\varrho - 2\pi\theta i) = o(\varrho) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k}{4}} e^{-n\varrho} = o\left(\varrho \left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{k}{4}+1}\right) = o\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{k}{4}},$$

während nach (139)

$$\vartheta^k(\varrho - 2\pi\theta i) = \Omega\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{k}{4}}$$

ist.

Hilfssatz 29:

(141_{II}) $$\vartheta(\varrho - 2\pi\theta i) = \Omega\left(\sqrt[4]{\frac{1}{\varrho}\log\frac{1}{\varrho}}\right) \qquad (\varrho > 0,\ \varrho \to 0).$$

Beweis: l. c. [12]).

Beweis von (15_{II})[26]: Aus (140) und

$$R_k(x) = o\left(x^{\frac{k}{4}} \log^{\frac{k}{4}} x\right)$$

würde für $\varrho \to 0$ folgen

$$\vartheta^k(\varrho - 2\pi\theta i) = o(\varrho) \sum_{n=2}^{\infty} n^{\frac{k}{4}} \log^{\frac{k}{4}} n\, e^{-n\varrho}$$

$$= o\left(\varrho \left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{k}{4}+1} \log^{\frac{k}{4}}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) = o\left(\frac{1}{\varrho}\log\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{k}{4}},$$

während nach (141) für fast alle θ

$$\vartheta^k(\varrho - 2\pi\theta i) = \Omega\left(\frac{1}{\varrho}\log\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{k}{4}}$$

ist.

2. Teil.

§ 1. (27_{IV}), (26_{III}), (25_{VI}).

Hilfssatz 30 (Behnke[27]):

(142_{III}) $$\sum_{\substack{n \leqq x \\ k_r + n}} \frac{1}{\{n\theta\}} \leqq A\, x \log x \qquad (k_r \leqq x < k_{r+1})\ ^{28}).$$

---

[25]) Steht für $k = 1$ ($r_1(n) = 0$ für $n \neq m^2$, $= 1$ für $n = 0$, $= 2$ für $n = m^2$, $m \geqq 1$) auch schon bei Hardy und Littlewood, l. c. [7]). Ich wende das Verfahren noch zweimal, zum Beweise von (15) und (22) an.

[26]) (15) ist auch für $k = 1$ richtig und ergibt

II) $$\sum_{n \leqq x} e^{2n^2\pi\theta i} = \Omega\left(x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{4}} x\right).$$

[27]) l. c. [18]), S. 289–290. Für diesen Satz gebe ich einen leicht abgeänderten Beweis.

[28]) $k_r + n$ bedeute: k_r ist kein Teiler von n, im Gegensatz zu $k_r \mid n$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$x \leqq \frac{1}{4} k_{r+1}, \tag{143}$$

die anderenfalls (142) unmittelbar aus (37) folgt.

Ich bestimme die ganze Zahl $K = K(x)$ durch

$$K - 1 < \frac{x}{k_r} \leqq K. \tag{144}$$

Dann ist

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ k_r + n}} \frac{1}{\{n\theta\}} \leqq \sum_{\substack{n \leqq K k_r \\ k_r + n}} \frac{1}{\{n\theta\}} = \sum_{0 \leqq k \leqq K-1} \sum_{m < k_r} \frac{1}{\{(k k_r + m)\theta\}}. \tag{145}$$

Aus (88), (89) und (90) folgt, daß für jedes Zahlenpaar h, m mit $1 \leqq m < k_r$

$$\left|\theta - \frac{h}{m}\right| \geqq \frac{1}{2 m k_r}$$

ist. Für ein geeignetes h, etwa $h = h_0$, ist

$$\left|\theta - \frac{h_0}{m}\right| < \frac{1}{2m}$$

und hieraus folgt (vgl. den Beweis von Hilfssatz 27)

$$\left|\theta - \frac{h_0}{m}\right| = \frac{\{m\theta\}}{m}.$$

Also ist

$$\{m\theta\} \geqq \frac{1}{2k_r} \qquad (1 \leqq m < k_r). \tag{146}$$

Andererseits ist nach (35), (144) und (143) für $0 \leqq k \leqq K - 1$

$$|k k_r \theta - k h_r| \leqq \frac{k}{k_{r+1}} \leqq \frac{x}{k_r k_{r+1}} \leqq \frac{1}{4k_r},$$

also

$$\{k k_r \theta\} \leqq \frac{1}{4k_r} \qquad (0 \leqq k \leqq K - 1). \tag{147}$$

(146) und (147) liefern

$$\{k k_r \theta\} \leqq \frac{1}{2}\{m\theta\} \qquad (0 \leqq k \leqq K - 1,\ 1 \leqq m < k_r). \tag{148}$$

Wenn nun für zwei beliebige reelle Zahlen u und v

$$\{u\} \leqq \frac{1}{2}\{v\} \tag{149}$$

ist, so ist auch

$$\{u + v\} \geqq \frac{1}{2}\{v\}. \tag{150}$$

Dies zeigt man folgendermaßen: $\{u\}$, $\{v\}$ und $\{u + v\}$ behalten ihre Werte, wenn ich u und v um ganze Zahlen verändere oder wenn ich u

und v durch $-u$ und $-v$ ersetze. Ich darf also annehmen, daß

$$-\frac{1}{2} \leqq u \leqq \frac{1}{2}, \quad 0 \leqq v \leqq \frac{1}{2}$$

und somit, wegen (149), daß

$$|u| \leqq \frac{1}{2} v \leqq \frac{1}{4}.$$

Hieraus folgt dann, nach (36),

$$\{u+v\} = \operatorname{Min}(u+v, 1-u-v) \geqq \operatorname{Min}(v-|u|, 1-|u|-v)$$
$$\geqq \operatorname{Min}\left(\frac{v}{2}, 1-\frac{3v}{2}\right) = \frac{v}{2} = \frac{1}{2}\{v\}.$$

Also ist in der Tat (150) erfüllt.

Aus (148), (149) und (150) folgt

$$\{(k k_r + m)\theta\} \geqq \frac{1}{2}\{m\theta\} \qquad (0 \leqq k \leqq K-1,\ 1 \leqq m < k_r).$$

Setzt man dies in (145) ein und beachtet (37) sowie (144), so ergibt sich

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ k_r \dagger n}} \frac{1}{\{n\theta\}} \leqq 2 \sum_{0 \leqq k \leqq K-1} \sum_{m < k_r} \frac{1}{\{m\theta\}} = 2K \sum_{m < k_r} \frac{1}{\{m\theta\}}$$
$$\leqq A \frac{x}{k_r} k_r \log k_r = A x \log k_r \leqq A x \log x.$$

Hilfssatz 31 (Liouville[29]): *Ist θ Wurzel einer im Bereich der rationalen Zahlen irreduziblen algebraischen Gleichung m-ten Grades $(m > 1)$, so besteht für alle ganzen Zahlen h, k mit $k > 0$ die Ungleichung*

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| > \frac{c}{k^m}. \tag{151$_{IV}$}$$

Hilfssatz 32: *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 31 ist*

$$\sum_{n \leqq x} d(n)\, e^{2n\pi\theta i} = O\left(x^{1-\frac{1}{m}} \log x\right). \tag{152$_{IV}$}$$

Beweis: Aus (40) und (41) folgt

$$\left|\sum_{n \leqq x} d(n)\, e^{2n\pi\theta i}\right| \leqq c \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \operatorname{Min}\left(\frac{x}{a}, \frac{1}{\{a\theta\}}\right) + c\sqrt{x}$$
$$\leqq c \sum_{a \leqq x^{1-\frac{1}{m}}} \operatorname{Min}\left(\frac{x}{a}, \frac{1}{\{a\theta\}}\right) + c\sqrt{x}. \tag{153}$$

Nach (142) ist

$$\sum_{\substack{a \leqq x^{1-\frac{1}{m}} \\ k_s \dagger a}} \frac{1}{\{a\theta\}} \leqq A x^{1-\frac{1}{m}} \log x \qquad \left(k_s \leqq x^{1-\frac{1}{m}} < k_{s+1}\right). \tag{154}$$

[29]) Vgl. z. B. Perron, l. c. [15]).

Aus (35) und (151) folgt ferner

$$k_{s+1} \leqq c\, k_s^{m-1}, \qquad k_s \geqq c\, k_{s+1}^{\frac{1}{m-1}} \geqq c\, x^{\frac{1}{m}}.$$

Also ist

$$(155) \qquad \sum_{\substack{a \leqq x^{1-\frac{1}{m}} \\ k_s \mid a}} \frac{x}{a} = \sum_{b k_s \leqq x^{1-\frac{1}{m}}} \frac{x}{k_s b} \leqq \frac{x}{k_s} \sum_{b \leqq x^{1-\frac{1}{m}}} \frac{1}{b} \leqq c \frac{x}{k_s} \log x \leqq c x^{1-\frac{1}{m}} \log x.$$

Aus (153), (154) und (155) folgt die Behauptung.

Beweis von (27_{IV}). Folgt aus (152) durch partielle Summation.

Für beliebiges reelles u setze ich

$$\psi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}.$$

Es ist dann bekanntlich für irrationales u

$$(156) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi u}{n} = -\pi \psi(u).$$

Hilfssatz 33 (H. Weyl[30]):

$$(157_{III}) \qquad \sum_{n \leqq x} \psi(n\theta) = o(x).$$

Beweis von (26_{III}): Mit Hilfe von (156) erhält man

$$\sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2n\pi\theta = \sum_{a \leqq x} \frac{1}{a} \sum_{b \leqq \frac{x}{a}} \frac{\sin 2ab\pi\theta}{b}$$

$$= \sum_{a \leqq x} \frac{1}{a} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\sin 2ab\pi\theta}{b} - \sum_{a \leqq x} \frac{1}{a} \sum_{b > \frac{x}{a}} \frac{\sin 2ab\pi\theta}{b}$$

$$(158_{III}) \qquad = -\pi \sum_{a \leqq x} \frac{\psi(a\theta)}{a} - \sum_{a \leqq x} \frac{1}{a} \sum_{b > \frac{x}{a}} \frac{\sin 2ab\pi\theta}{b}.$$

Aus (157) folgt durch partielle Summation

$$(159_{III}) \qquad \sum_{a \leqq x} \frac{\psi(a\theta)}{a} = o(\log x).$$

---

[30]) Vgl. dessen Abhandlung „Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins" [Mathematische Annalen 77 (1916), S. 313–352], S. 314 (2) und S. 315, Satz 2. Nach Weyl gilt (157) für jede reelle, beschränkte, im Riemannschen Sinne integrable Funktion $\psi(u)$, sofern

$$\int_0^1 \psi(u)\, du = 0$$

ist.

Ferner ist bekanntlich[31])

$$(160_{\text{III}}) \qquad \left| \sum_{b>\frac{x}{a}}' \frac{\sin 2ab\pi\theta}{b} \right| < A \operatorname{Min}\left(1, \frac{a}{x\{a\theta\}}\right).$$

Ein Blick auf (158), (159) und (160) zeigt, daß ich nur noch

$$(161_{\text{III}}) \qquad \sum_{a \leqq x} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{x\{a\theta\}}\right) = o(\log x)$$

nachzuweisen brauche.

Ich setze nunmehr

$$(162) \qquad y = \frac{x}{\log x}.$$

Dann ist zunächst

$$\sum_{y < a \leqq x} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{x\{a\theta\}}\right) \leqq \sum_{y < a \leqq x} \frac{1}{a} = O\left(\log \frac{x}{y}\right) = O(\log \log x)$$

$$(163_{\text{III}}) \qquad = o(\log x).$$

Ferner ist nach (142)

$$(164_{\text{III}}) \qquad \sum_{\substack{a \leqq y \\ k_r + a}} \frac{1}{\{a\theta\}} \leqq A y \log y \qquad (k_r \leqq y < k_{r+1}).$$

Aus (162) und (164) folgt

$$(165_{\text{III}}) \quad \sum_{a \leqq y} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{x\{a\theta\}}\right) \leqq \frac{1}{x} \sum_{\substack{a \leqq y \\ k_r + a}} \frac{1}{\{a\theta\}} + \frac{1}{k_r} \sum_{a \leqq y} \frac{1}{a} \leqq A \frac{y \log y}{x} + A \frac{\log y}{k_r}$$

$$\leqq A + A \frac{\log y}{k_r} = o(\log y) = o(\log x),$$

weil k_r mit y ins Unendliche wächst.

(163) und (165) ergeben (161), also (26).

Beweis von (25_{VI}): Für beliebiges reelles u und beliebiges $\xi \geqq 1$ ist bekanntlich

$$\left| \sum_{b \leqq \xi}' \frac{\sin 2b\pi u}{b} \right| \leqq A.$$

Also ist

$$\left| \sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2n\pi\theta \right| \leqq \sum_{a \leqq x} \frac{1}{a} \left| \sum_{b \leqq \frac{x}{a}}' \frac{\sin 2ab\pi\theta}{b} \right| \leqq A \sum_{a \leqq x} \frac{1}{a} \leqq A \log x.$$

---

[31]) Vgl. z. B. Landau, l. c. [21]), Satz 412.

§ 2. (22_{II}).

Hilfssatz 34 (A. Khintchine[32]): *Die Funktion $F(x)$ sei für $x \geqq 1$ positiv und stetig; für $x \to \infty$ nehme $xF(x)$ monoton gegen Null ab; das Integral*

$$\int_1^\infty F(x)\,dx$$

divergiere. Dann besitzt die Ungleichung

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{F(q)}{q} \tag{166_{II}}$$

unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen p, q mit

$$q > 0, \quad (p, q) = 1. \tag{167}$$

Hilfssatz 35 (T. Estermann[33]): *Es sei*

$$p \text{ und } q \text{ ganz}, \quad q > 0, \quad (p, q) = 1; \tag{168}$$

$$\Re(y) > 0, \quad q|y| < 8\sqrt{\Re(y)}; \tag{169}$$

$$z = e^{\frac{2p\pi i}{q} - y}, \quad f(s) = \sum_{r=1}^{\infty} d(r) s^r \text{ für } |s| < 1; \tag{170}$$

γ die Eulersche Konstante.

Dann gilt, wenn $\log y$ *den Hauptzweig bedeutet,*

$$\left|f(z) - \frac{\gamma - \log y - 2\log q}{qy}\right| < A\frac{|y|\, q \log 2q}{\Re(y)}. \tag{171}$$

Hilfssatz 36:

$$f(e^{-\varrho + 2\pi\theta i}) = \Omega\left(\sqrt{\frac{1}{\varrho}\log\frac{1}{\varrho}}\log\log\frac{1}{\varrho}\right) \quad (\varrho > 0,\ \varrho \to 0). \tag{172_{II}}$$

Beweis: Ich wende Hilfssatz 34 mit

$$F(x) = \frac{1}{4\pi x \log 2x} \qquad (x \geqq 1)$$

---

[32]) l. c. [16]). Zum Beweise verwendet Khintchine Hilfsmittel aus der Kettenbruchtheorie. In der späteren Abhandlung „Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen" [Mathematische Zeitschrift 24 (1926), S. 706—714] wird der Satz auf simultane Approximationen mehrerer Zahlen verallgemeinert und mit rein metrischen Hilfsmitteln erledigt.

Es ist übrigens vollkommen nebensächlich, daß $(p, q) = 1$ in (167) verlangt wird (daher läßt auch Khintchine diese Bedingung weg), da es zu jedem irrationalen θ nur höchstens endlich viele Lösungen von (166) mit $q > 0$ und festem Werte des Quotienten $\frac{p}{q}$ gibt.

[33]) l. c. [14]).

an. Zu fast jedem θ gibt es danach eine unendliche Folge wachsender natürlicher Zahlen

$$27 \leqq q_1 < q_2 < q_3 < \dots \tag{173}$$

und eine unendliche Folge ganzer Zahlen $p_1, p_2, p_3, \dots$, so daß

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{4\pi q_n^2 \log q_n}, \quad (p_n, q_n) = 1 \qquad (n \geqq 1). \tag{174$_{\text{II}}$}$$

Ich setze

$$y_n = \frac{1}{q_n^2 \log q_n} - 2\pi i\left(\theta - \frac{p_n}{q_n}\right) \qquad (n \geqq 1), \tag{175}$$

$$z_n = e^{\frac{2p_n\pi i}{q_n} - y_n} \qquad (n \geqq 1). \tag{176}$$

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 35 sind mit

$$p = p_n, \quad q = q_n, \quad y = y_n, \quad z = z_n$$

erfüllt. Ich habe nur zu zeigen, daß die zweite Ungleichung (169) zutrifft, da im übrigen (168), (169) und (170) offenbar wegen (173), (175) und (176) erfüllt sind.

In der Tat ist nach (173), (174) und (175)

$$|y_n| \leqq \frac{1}{q_n^2 \log q_n} + \frac{1}{2q_n^2 \log q_n} \leqq \frac{2}{q_n^2 \log q_n} \leqq 2\Re(y_n), \tag{177}$$

$$q_n|y_n| \leqq \frac{2}{q_n \log q_n} \leqq \frac{2}{q_n \sqrt{\log q_n}} < 8\sqrt{\Re(y_n)}. \tag{178}$$

Aus (175) folgt

$$\frac{1}{q_n|y_n|} \leqq \frac{1}{q_n} q_n^2 \log q_n = q_n \log q_n.$$

In Verbindung mit (171) und (177) ergibt dies

$$f(z_n) = -\frac{\log q_n^2 y_n}{q_n y_n} + \frac{\gamma}{q_n y_n} + B q_n \log q_n = -\frac{\log q_n^2 y_n}{q_n y_n} + B q_n \log q_n,$$

also wegen (178)

$$|f(z_n)| \geqq \frac{|\log q_n^2 y_n|}{q_n|y_n|} - A q_n \log q_n \geqq \frac{1}{2}|\log q_n^2 y_n| q_n \log q_n - A q_n \log q_n. \tag{179}$$

Aus (173), (174) und (175) folgt

$$q_n^2 y_n = \frac{1+\tau_n}{\log q_n}, \qquad |\tau_n| \leqq \frac{1}{2},$$

$$|q_n^2 y_n| = \frac{|1+\tau_n|}{\log q_n},$$

$$\log q_n^2 y_n = \log \frac{|1+\tau_n|}{\log q_n} + B,$$

$$|\log q_n^2 y_n| \geqq \log\log q_n - A. \tag{180}$$

(179) und (180) liefern für $n > A$

$$|f(z_n)| \geqq \tfrac{1}{3} q_n \log q_n \log\log q_n. \tag{181}$$

Ich setze jetzt

$$q_n^2 \log q_n = \frac{1}{\varrho_n} \qquad (n \geqq 1) \tag{182}$$

Dann gelten die folgenden, auf wachsendes n bezogenen asymptotischen Gleichungen:

$$\log q_n \sim \tfrac{1}{2} \log \frac{1}{\varrho_n},$$

$$q_n^2 \sim \frac{2}{\varrho_n \log \frac{1}{\varrho_n}},$$

$$q_n \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varrho_n \log \frac{1}{\varrho_n}}},$$

$$\log\log q_n \sim \log\log \frac{1}{\varrho_n}.$$

Dies alles ergibt

$$q_n \log q_n \log\log q_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\varrho_n} \log \frac{1}{\varrho_n}} \log\log \frac{1}{\varrho_n}. \tag{183}$$

Aus (176), (175) und (182) folgt

$$z_n = e^{-\varrho_n + 2\pi\theta i}. \tag{184}$$

Aus (181), (183) und (184) folgt für $n > A$

$$|f(e^{-\varrho_n + 2\pi\theta i})| \geqq \tfrac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{\varrho_n} \log \frac{1}{\varrho_n}} \log\log \frac{1}{\varrho_n}.$$

Wegen $\varrho_n > 0$, $\varrho_n \to 0$ ist damit (172) nachgewiesen.

Beweis von (22_{II}): Ich setze

$$D_0(n) = \sum_{m=1}^{n} d(m)\, e^{2m\pi\theta i} \tag{185}$$

und nehme an, daß für ein gegebenes θ

$$D_0(n) = o\left(\sqrt{n \log n} \log\log n\right) \tag{186}$$

ist. Aus (185) folgt für $\varrho > 0$, $\varrho \to 0$

$$\begin{aligned} f(e^{-\varrho + 2\pi\theta i}) &= \sum_{n=1}^{\infty} d(n)\, e^{2n\pi\theta i} e^{-n\varrho} = (1 - e^{-\varrho}) \sum_{n=1}^{\infty} D_0(n)\, e^{-n\varrho} \\ &= o(\varrho) \sum_{n=27}^{\infty} \sqrt{n \log n} \log\log n\, e^{-n\varrho} = o\Big(\varrho \tfrac{1}{\varrho} \sqrt{\tfrac{1}{\varrho} \log \tfrac{1}{\varrho}} \log\log \tfrac{1}{\varrho}\Big) \\ &= o\left(\sqrt{\frac{1}{\varrho} \log \frac{1}{\varrho}} \log\log \frac{1}{\varrho}\right). \end{aligned} \tag{187}$$

Da (187) mit (172) unverträglich ist und (172) für fast alle θ zutrifft, so ist die Annahme (186) nur für eine Nullmenge von θ-Werten erfüllt. Damit ist (22) nachgewiesen.

§ 3. (24_V), (23_V).

Hilfssatz 37: *Es sei*

$$p \text{ und } q \text{ ganz}, \quad q > 1, \quad (p, q) = 1; \tag{188}$$

$$y = \sigma + ti, \quad \sigma \text{ und } t \text{ reell}, \quad 0 < \sigma \leqq \frac{1}{q^2}, \quad |t| \leqq \sigma; \tag{189}$$

$$z = e^{\frac{2p\pi i}{q} y}, \qquad f_1(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d(r)}{r} s^r \text{ für } |s| < 1. \tag{190}$$

Dann ist, wenn $\log y$ *den Hauptzweig bedeutet,*

$$\Im(f_1(z)) = \frac{1}{q} \log |y| \, \Im(\log y) + B \log^2 q. \tag{191}$$

Beweis: (168) ist offenbar wegen (188) erfüllt; weiterhin (169) wegen (189), da ja

$$q|y| \leqq q(\sigma + |t|) \leqq 2q\sigma \leqq 2\sqrt{\sigma} < 8\sqrt{\sigma} = 8\sqrt{\Re(y)};$$

jedes z mit (190) ist also ein z mit (170). Ich darf somit (171) anwenden.

Da nach (189)

$$|y| \leqq \sigma + |t| \leqq 2\sigma = 2\Re(y) \tag{192}$$

und nach (188)

$$\log 2q \leqq 2 \log q \tag{193}$$

ist, so liefert (171)

$$f(z) = \frac{\gamma - \log y - 2 \log q}{qy} + Bq \log q. \tag{194}$$

Es sei jetzt y mit (189) fest. Ich setze dann

$$\eta = v + ti, \qquad \zeta = e^{\frac{2p\pi i}{q} \eta} \tag{195}$$

und nehme an, daß

$$\sigma \leqq v \leqq \frac{1}{q^2} \tag{196}$$

ist. Aus (189), (190), (195) und (196) folgt, daß ich in (194) ersetzen darf: z durch ζ, y durch η. Es folgt dann

$$f(\zeta) = \frac{\gamma - \log \eta - 2 \log q}{q\eta} + Bq \log q. \tag{197}$$

Jetzt integriere ich beide Seiten von (197) nach v über das Intervall (196).

Nach (170), (195), (189) und (190) ist

$$\int_{\sigma}^{\frac{1}{q^2}} f(\zeta)\,dv = \int_{\sigma}^{\frac{1}{q^2}} \sum_{r=1}^{\infty} d(r)\, e^{\left(\frac{2p\pi i}{q} - v - ti\right)r} dv = \sum_{r=1}^{\infty} d(r)\, e^{\left(\frac{2p\pi i}{q} - ti\right)r} \int_{\sigma}^{\frac{1}{q^2}} e^{-vr} dv$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d(r)}{r} e^{\left(\frac{2p\pi i}{q} - \sigma - ti\right)r} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d(r)}{r} e^{\left(\frac{2p\pi i}{q} - ti\right)r} e^{-\frac{r}{q^2}}$$

$$= f_1(z) + B \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d(r)}{r} e^{-\frac{r}{q^2}}. \tag{198}$$

Aus der trivialen Abschätzung

$$\sum_{m=1}^{r} d(m) \leqq Ar \log r \qquad (r \geqq 2)$$

folgt durch partielle Summation

$$\sum_{m=1}^{r} \frac{d(m)}{m} \leqq A \log^2 r \qquad (r \geqq 2)$$

also

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{d(r)}{r} e^{-\frac{r}{q^2}} = B\left(1 - e^{-\frac{1}{q^2}}\right) \sum_{r=2}^{\infty} \log^2 r\, e^{-\frac{r}{q^2}} = B\left(\frac{1}{q^2} q^2 \log^2 q\right) = B \log^2 q \tag{199}$$

(198) und (199) ergeben

$$\int_{\sigma}^{\frac{1}{q^2}} f(\zeta)\,dv = f_1(z) + B \log^2 q. \tag{200}$$

Ich gehe jetzt dazu über, die rechte Seite von (197) über das Intervall (196) zu integrieren.

Zunächst folgt aus (189)

$$\log\left(\frac{1}{q^2} + ti\right) = B \log q. \tag{201}$$

Hieraus ergibt sich, wegen (195),

$$\int_{\sigma}^{\frac{1}{q^2}} \frac{1}{\eta}\,dv = \int_{\sigma}^{\frac{1}{q^2}} \frac{dv}{v+ti} = -\log y + \log\left(\frac{1}{q^2} + ti\right) = -\log y + B \log q. \tag{202}$$

Sodann folgt aus (189), (195) und (201)

$$\int_{\sigma}^{\frac{1}{q^2}} \frac{\log \eta}{\eta}\,dv = \int_{\sigma}^{\frac{1}{q^2}} \frac{\log(v+ti)}{v+ti}\,dv = -\frac{1}{2}\log^2 y + \frac{1}{2}\log^2\left(\frac{1}{q^2} + ti\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\log^2 y + B \log^2 q. \tag{203}$$

Endlich ist in (197)

$$(204) \qquad \int_{\sigma}^{\frac{1}{q^2}} Bq \log q \, dv = B \frac{\log q}{q}.$$

Aus (197), (200), (202), (203) und (204) folgt

$$f_1(z) = \frac{1}{2q} \log^2 y - \frac{\gamma - 2 \log q}{q} \log y + B \log^2 q.$$

Nimmt man hier auf beiden Seiten den Imaginärteil, so ergibt sich die Behauptung (191).

Beweis von (24_V): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf ich annehmen, daß

$$(205) \qquad \varphi(2) = 1; \quad \varphi(x) \geqq \frac{1}{x} \text{ für } x \geqq 2$$

ist.

Ich nehme jetzt an, die Kettenbruchnenner a_n in (30) seien so beschaffen, daß

$$(206) \qquad k_1 \geqq 7; \quad k_n^3 \log^2 k_n \leqq \log k_{n+1}, \quad \varphi(\sqrt{k_{n+1}}) \leqq \frac{1}{k_n^3} \quad (n \geqq 1).$$

Das derart spezialisierte θ wird (24) leisten.

Jedes Paar h_n, k_n erfüllt offenbar die Bedingungen (188) mit $p = h_n$, $q = k_n$. Hierbei sei bis auf weiteres $n \geqq 1$.

Da bekanntlich

$$(-1)^n \left(\theta - \frac{h_n}{k_n}\right) = \left|\theta - \frac{h_n}{k_n}\right|$$

ist, so darf ich wegen (35) setzen

$$(207_{III}) \quad (-1)^n \left(\theta - \frac{h_n}{k_n}\right) = \left|\theta - \frac{h_n}{k_n}\right| = \frac{\omega_n}{k_n k_{n+1}}, \quad \text{wobei} \quad \frac{1}{2} < \omega_n < 1.$$

Ich nehme jetzt

$$(208) \qquad \sigma_n = \frac{1}{k_{n+1}}, \quad t_n = -2\pi\left(\theta - \frac{h_n}{k_n}\right), \quad y_n = \sigma_n + t_n i.$$

Aus (206), (207) und (208) folgt

$$0 < \sigma_n = \frac{1}{k_{n+1}} \leqq \frac{1}{k_n^2}, \quad |t_n| < \frac{2\pi}{k_n} \frac{1}{k_{n+1}} \leqq \frac{1}{k_{n+1}} = \sigma_n.$$

Also ist (189) mit $y = y_n$, $\sigma = \sigma_n$, $t = t_n$, $q = k_n$ erfüllt.

Setze ich demnach noch

$$(209) \qquad z = z_n = e^{\frac{2h_n \pi i}{k_n} - y_n},$$

so folgt aus (191)

$$(210) \qquad \Im(f_1(z_n)) = \frac{1}{k_n} \log |y_n| \, \Im(\log y_n) + B \log^2 k_n.$$

Hierin ist nach (190), (209) und (208)

$$\Im(f_1(z_n)) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d(r)}{r} \sin 2r\pi\theta\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}. \tag{211}$$

Setze ich daher zur Abkürzung

$$\sum_{m=1}^{r} \frac{d(m)}{m} \sin 2m\pi\theta = D_1(r), \tag{212}$$

so folgt aus (211)

$$\Im(f_1(z_n)) = \left(1 - e^{-\frac{1}{k_{n+1}}}\right) \sum_{r=1}^{\infty} D_1(r)\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}. \tag{213}$$

Auf der rechten Seite von (210) ist, wegen (208) und (207),

$$y_n = \frac{1}{k_{n+1}}\left(1 + \frac{B}{k_n}\right), \quad |y_n| = \frac{1}{k_{n+1}}\left(1 + \frac{B}{k_n}\right), \tag{214}$$

$$\log|y_n| = -\log k_{n+1} + \frac{B}{k_n}, \tag{215}$$

$$\begin{aligned} \Im(\log y_n) &= \operatorname{arctg}\left(-2\pi\left(\theta - \frac{h_n}{k_n}\right) k_{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{2\pi\omega_n}{k_n} = (-1)^{n+1} \frac{2\pi\omega_n}{k_n} + \frac{B}{k_n^3}. \end{aligned} \tag{216}$$

Aus (210), (213), (215) und (216) folgt

$$\begin{aligned} &(-1)^n \left(1 - e^{-\frac{1}{k_{n+1}}}\right) \sum_{r=1}^{\infty} D_1(r)\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \\ &= \frac{2\pi\omega_n \log k_{n+1}}{k_n^2} + B\frac{\log k_{n+1}}{k_n^4} + B\log^2 k_n. \end{aligned} \tag{217}$$

Wegen (206) und (207) ist in (217) für $n > A$

$$\left|B\frac{\log k_{n+1}}{k_n^4}\right| \leqq \frac{1}{2}\frac{\log k_{n+1}}{k_n^2}, \quad |B\log^2 k_n| \leqq \frac{1}{2}\frac{\log k_{n+1}}{k_n^2}, \quad 3 < 2\pi\omega_n.$$

Es ist daher für $n > A$

$$(-1)^n \left(1 - e^{-\frac{1}{k_{n+1}}}\right) \sum_{r=1}^{\infty} D_1(r)\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \geqq 2\frac{\log k_{n+1}}{k_n^2},$$

also für $n > A$

$$(-1)^n \sum_{r=1}^{\infty} D_1(r)\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \geqq \frac{k_{n+1}\log k_{n+1}}{k_n^2}. \tag{218}$$

Ich nehme jetzt an, daß für alle hinreichend großen r, etwa für $r \geqq r_0 > 1$, eine der beiden Ungleichungen

$$D_1(r) \leqq \varphi(r)\log r \quad \text{oder} \quad D_1(r) \geqq -\varphi(r)\log r \tag{219}$$

erfüllt ist; je nachdem dies für die erste oder für die zweite Ungleichung (219) der Fall ist, setze ich $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$. Jedenfalls ist dann

$$\varepsilon \sum_{r=1}^{\infty} D_1(r)\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \leqq \sum_{r<r_0} |D_1(r)| + \sum_{r \geqq r_0} \varphi(r) \log r\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}. \tag{220}$$

Ich wähle jetzt ein $n_0 > 1$ mit

$$\sum_{r<r_0} |D_1(r)| \leqq \sqrt{k_{n+1}} \log k_{n+1}, \qquad \sqrt{k_{n+1}} > r_0 \quad \text{für} \quad n \geqq n_0. \tag{221}$$

Aus (220), (221), (205) und (206) folgt dann für $n \geqq n_0$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \sum_{r=1}^{\infty} D_1(r)\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} &\leqq \sqrt{k_{n+1}} \log k_{n+1} + \sum_{r_0 \leqq r \leqq \sqrt{k_{n+1}}} \varphi(r) \log r\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \\
&\quad + \sum_{r > \sqrt{k_{n+1}}} \varphi(r) \log r\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \\
&\leqq \sqrt{k_{n+1}} \log k_{n+1} + \varphi(2) \sqrt{k_{n+1}} \log k_{n+1} + \varphi(\sqrt{k_{n+1}}) \sum_{r=2}^{\infty} \log r\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \\
&\leqq 2 \sqrt{k_{n+1}} \log k_{n+1} + A \varphi(\sqrt{k_{n+1}})\, k_{n+1} \log k_{n+1} \\
&\leqq A \varphi(\sqrt{k_{n+1}})\, k_{n+1} \log k_{n+1} \leqq A \frac{k_{n+1} \log k_{n+1}}{k_n^3}. \qquad (222)
\end{aligned}$$

Aus (218) und (222) folgt für $n \geqq n_1 \geqq n_0$, $n \equiv 0 \pmod 2$ bei $\varepsilon = 1$, $n \equiv 1 \pmod 2$ bei $\varepsilon = -1$

$$\frac{k_{n+1} \log k_{n+1}}{k_n^2} \leqq A \frac{k_{n+1} \log k_{n+1}}{k_n^3}.$$

Da dies unmöglich ist, so kann keine der Ungleichungen (219) für alle hinreichend großen r erfüllt sein. Wegen (212) ist damit die Behauptung (24) nachgewiesen.

Beweis von (23_ν): Ich beginne wie beim Beweise von (24) und gehe bis zu Formel (209) einschließlich. Wiederum sei bis auf weiteres $n \geqq 1$.

Da (188) und (189) mit $p = h_n$, $q = k_n$, $y = y_n$, $\sigma = \sigma_n$, $t = t_n$ erfüllt sind, so gilt das gleiche für (168), (169), (192) und (193). Wird also noch überdies $z = z_n$ gesetzt, so ist, wegen (170) und (209), (171) anwendbar:

$$f(z_n) = \frac{\gamma - \log y_n - 2 \log k_n}{k_n y_n} + B k_n \log k_n. \tag{223}$$

Nach (214) ist

$$\frac{\gamma - 2 \log k_n}{k_n y_n} = B k_{n+1} \tag{224}$$

und nach (206)

$$k_n \log k_n = B k_{n+1}. \tag{225}$$

Aus (223), (224) und (225) folgt

$$f(z_n) = -\frac{\log y_n}{k_n y_n} + B k_{n+1}. \tag{226}$$

Nun ist nach (208)

$$\frac{\log y_n}{y_n} = \frac{1}{|y_n|^2}(\log|y_n| + i\,\Im(\log y_n))\left(\frac{1}{k_{n+1}} + 2\pi i\left(\theta - \frac{h_n}{k_n}\right)\right),$$

also

$$\begin{aligned}\Im\left(\frac{\log y_n}{y_n}\right) &= \frac{1}{|y_n|^2}\left(2\pi\left(\theta - \frac{h_n}{k_n}\right)\log|y_n| + \frac{\Im(\log y_n)}{k_{n+1}}\right)\\ &= 2\pi\left(\theta - \frac{h_n}{k_n}\right)\frac{\log|y_n|}{|y_n|^2} + \frac{B}{|y_n|^2 k_{n+1}}.\end{aligned}$$

In Verbindung mit (207), (214) und (215) liefert dies

$$\Im\left(\frac{\log y_n}{y_n}\right) = (-1)^{n+1}\frac{2\pi\omega_n}{k_n k_{n+1}}\left(\log k_{n+1} + \frac{B}{k_n}\right)k_{n+1}^2\left(1 + \frac{B}{k_n}\right) + B k_{n+1},$$

also wegen (206)

$$\Im\left(\frac{\log y_n}{y_n}\right) = (-1)^{n+1}\frac{2\pi\omega_n k_{n+1}\log k_{n+1}}{k_n} + B\frac{k_{n+1}\log k_{n+1}}{k_n^2}.$$

Nimmt man noch (226) und (206) hinzu, so folgt

$$\Im(f(z_n)) = (-1)^n\frac{2\pi\omega_n k_{n+1}\log k_{n+1}}{k_n^2} + B\frac{k_{n+1}\log k_{n+1}}{k_n^3}.$$

Wegen (207) ist also für $n > A$

$$(-1)^n\Im(f(z_n)) \geqq 2\frac{k_{n+1}\log k_{n+1}}{k_n^2}. \tag{227}$$

Nach (170), (209) und (208) ist

$$\Im(f(z_n)) = \sum_{r=1}^{\infty} d(r)\sin 2r\pi\theta\, e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}. \tag{228}$$

Setze ich daher zur Abkürzung

$$\sum_{m=1}^{r} d(m)\sin 2m\pi\theta = D(r), \tag{229}$$

so folgt aus (228)

$$\Im(f(z_n)) = \left(1 - e^{-\frac{1}{k_{n+1}}}\right)\sum_{r=1}^{\infty} D(r)\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}. \tag{230}$$

(227) und (230) ergeben für $n > A$

$$(-1)^n\left(1 - e^{-\frac{1}{k_{n+1}}}\right)\sum_{r=1}^{\infty} D(r)\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \geqq 2\frac{k_{n+1}\log k_{n+1}}{k_n^2},$$

also für $n > A$

$$(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty} D(r)\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \geqq \frac{k_{n+1}^2\log k_{n+1}}{k_n^2}. \tag{231}$$

Ich nehme jetzt an, daß für alle hinreichend großen r, etwa für $r \geqq r_0 > 1$, eine der beiden Ungleichungen

$$D(r) \leqq \varphi(r) r \log r \quad \text{oder} \quad D(r) \geqq -\varphi(r) r \log r \tag{232}$$

erfüllt ist; je nachdem dies für die erste oder für die zweite der Ungleichungen (232) der Fall ist, setze ich $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$. Jedenfalls ist dann

$$\varepsilon \sum_{r=1}^{\infty} D(r) e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \leqq \sum_{r<r_0} |D(r)| + \sum_{r \geqq r_0} \varphi(r) r \log r e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}. \tag{233}$$

Ich wähle jetzt ein $n_0 > 1$ mit

$$\sum_{r<r_0} |D(r)| \leqq k_{n+1}^{\frac{3}{2}} \log k_{n+1}, \quad \sqrt{k_{n+1}} > r_0 \quad \text{für} \quad n \geqq n_0. \tag{234}$$

Aus (233), (234), (206) und (205) folgt für $n \geqq n_0$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \sum_{r=1}^{\infty} D(r) e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} &\leqq k_{n+1}^{\frac{3}{2}} \log k_{n+1} + \sum_{r_0 < r \leqq \sqrt{k_{n+1}}} \varphi(r) r \log r e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \\
&\quad + \sum_{r > \sqrt{k_{n+1}}} \varphi(r) r \log r e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \\
&\leqq k_{n+1}^{\frac{3}{2}} \log k_{n+1} + \varphi(2) k_{n+1}^{\frac{3}{2}} \log k_{n+1} + \varphi(\sqrt{k_{n+1}}) \sum_{r=2}^{\infty} r \log r e^{-\frac{r}{k_{n+1}}} \\
&\leqq 2 k_{n+1}^{\frac{3}{2}} \log k_{n+1} + A \varphi(\sqrt{k_{n+1}}) k_{n+1}^2 \log k_{n+1} \\
&\leqq A \varphi(\sqrt{k_{n+1}}) k_{n+1}^2 \log k_{n+1} \leqq A \frac{k_{n+1}^2 \log k_{n+1}}{k_n^3}.
\end{aligned} \tag{235}$$

Aus (231) und (235) folgt für $n \geqq n_1 \geqq n_0$, $n \equiv 0 \pmod 2$ bei $\varepsilon = 1$, $n \equiv 1 \pmod 2$ bei $\varepsilon = -1$

$$\frac{k_{n+1}^2 \log k_{n+1}}{k_n^2} \leqq A \frac{k_{n+1}^2 \log k_{n+1}}{k_n^3}.$$

Da dies unmöglich ist, so kann keine der Ungleichungen (232) für alle hinreichend großen r erfüllt sein. Im Hinblick auf die Definition (229) von $D(r)$ ist damit (23) bewiesen.

Radość, den 19. Juli 1930.

(Eingegangen am 24. Juli 1930.)

Potentialtheoretische Untersuchungen.

Erste Abhandlung.

Von

Julius Schauder in Lwów.

In der Potentialtheorie und in der Theorie elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung spielen gewisse Existenzsätze sowie Ungleichheiten, betreffend Potentiale einer einfachen und einer Doppelbelegung, sowie einer Volumladung usw. eine wesentliche Rolle. Exakte Betrachtungen dieser Art hat wohl als erster Herr O. Hölder angestellt[1]). Später haben sich Liapounoff, die Herren Korn, Kellogg, Lichtenstein, Günther und andere mit dem Gegenstand beschäftigt[2]). Hervorzuheben sind vor allem die Arbeiten von Herrn Korn[3]). A. a. O. werden die in Betracht kommenden Sätze für stetig gekrümmte Flächen, die darüber hinaus noch einer weiteren Bedingung genügen, Flächen der Klasse Bh in der Bezeichnungsweise des Herrn Lichtenstein, in abschließender Weise formuliert, während die ausgeführten Beweise sich auf stetig gekrümmte Flächen schlechthin beziehen und keinen abschließenden Charakter tragen. Für viele Zwecke, namentlich für gewisse Existenzsätze der Hydrodynamik, erweist es sich als notwendig, der Betrachtung Gebiete zugrunde zu legen, deren Berandung aus Flächen mit stetiger Normale besteht, wobei die Richtungskosinus der Normale der Hölderschen Bedingung genügen (Flächen der Klasse Ah in der Nomenklatur des Herrn Lichtenstein). Mit Gebieten dieser Art beschäftigen sich

---

[1]) Beiträge zur Potentialtheorie, Stuttgart 1882.

[2]) Genauere Angaben (bis 1918) finden sich in dem Encyklopädieartikel von L. Lichtenstein. Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II C 3 (abgeschlossen 1918).

[3]) Sur les équations d'élasticité, Annales scientifiques de l'école normale superieure (1907), S. 9–75, insbes. S. 12–30.

in ihren Arbeiten über Potentiale einer einfachen Belegung und einer Volumladung die Herren Günther[4]) und Lichtenstein[5]).

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich zunächst mit dem Potential einer Doppelschicht und ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung. Die die Belegung tragende Fläche gehört der Klasse Ah an, die gewonnenen Existenzsätze und Ungleichheitsbeziehungen dürfen, innerhalb der zugrunde liegenden Voraussetzungen, als abschließend angesehen werden. Als eine Folgerung ergeben sich analoge Ungleichheiten und Existenzsätze für die Lösung des ersten Randwertproblems der Potentialtheorie in Gebieten der Klasse Ah. Diese Sätze sind den von Herrn Korn für Gebiete der Klasse Bh formulierten Sätzen ganz analog; für Potentiale einer Doppelbelegung besteht eine Analogie nicht immer. Manche der hierüber gefundenen Sätze sind neu, die anderen sind vielfach als richtig angenommen worden, doch dürften ausgeführte Beweise einem wirklichen Bedürfnis entgegenkommen.

In einer zweiten Abhandlung werde ich mich mit Gebieten der Klasse Bh beschäftigen und im Anschluß an die Resultate dieser Abhandlung die von Korn angegebenen Sätze über partielle Ableitungen zweiter Ordnung beweisen.

§ 1.

Einleitung.

Auf einer Fläche S mit stetiger Normale betrachten wir einen beliebigen Punkt P und bezeichnen mit

$$\cos(X, n_P), \quad \cos(Y, n_P), \quad \cos(Z, n_P) \tag{1}$$

die Richtungskosinus der Normale im Punkte P in bezug auf das feste Koordinatensystem X, Y, Z. Gelten dann für beliebige zwei Punkte Q_1, Q_2 der Fläche S die Ungleichheiten

[4]) N. M. Günther, Über ein Hauptproblem der Hydromechanik, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 448–499, insbes. S. 480–499. Herr Günther ist im Zusammenhang mit seinen hydrodynamischen Arbeiten öfter auf potentialtheoretische Fragen zurückgekommen. Eine Zusammenstellung der in Betracht kommenden Arbeiten des Herrn Günther (meist in russischer Sprache abgefaßt) findet sich in den Grundlagen der Hydromechanik von Herrn Lichtenstein, Berlin 1929, S. 438, 493. Die Arbeiten von Herrn Günther werden fortgesetzt.

[5]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. I. Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 72–88, insbesondere S. 83–88. Das wesentliche Ergebnis dieser und der späteren Arbeiten betrifft potentialtheoretische Hilfssätze einer anderen, neuen Art. Man vergleiche namentlich die vierte Abhandlung dieser Reihe, Sächsische Berichte 82, Sitzung vom 8. 12. 1930. Dort finden sich u. a. alle das Potential einer einfachen Belegung sowie einer Volumladung betreffenden Sätze, auch der im Nachtrag zur vorliegenden Arbeit der Vollständigkeit halber behandelten Art (S. 34–37) in allen Einzelheiten bewiesen.

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned}&|\cos(X, n_{Q_1}) - \cos(X, n_{Q_2})|\\ &|\cos(Y, n_{Q_1}) - \cos(Y, n_{Q_2})|\\ &|\cos(Z, n_{Q_1}) - \cos(Z, n_{Q_2})|\end{aligned}\right\} \leqq A(\text{Entfernung } Q_1, Q_2)^\lambda,$$
$$0 < \lambda < 1$$

so sagen wir, die Fläche sei vom Hölderschen Typus Ah und nennen die positive Konstante A den Hölderschen Koeffizienten, die Zahl λ den Hölderschen Exponenten der Fläche. Wir setzen noch die Regularität der Fläche voraus; dies bedeutet, daß die Gleichungen der Fläche unter Zugrundelegung geeigneter Gaußscher Parameter im kleinen in der Form

$$(3)\qquad X = \varphi(u, v), \quad Y = \psi(u, v), \quad Z = \chi(u, v)$$

dargestellt werden können, und daß die Funktionaldeterminanten

$$(4)\qquad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)}$$

nicht gleichzeitig verschwinden. Es kann dann in der Umgebung eines jeden Punktes P der Fläche S eine Koordinate, z. B. Z als Funktion der beiden anderen ausgedrückt werden. Wir werden aber fast nie ein festes Koordinatensystem (X, Y, Z), vielmehr ein lokales mehr innerlich mit der Fläche verbundenes benützen und dieses als das (x, y, z)-System bezeichnen. Wir wählen nämlich die Normale im Punkte Q auf S zur z-Achse und zwei im Punkte Q zu der Fläche tangential aufeinander senkrechte Richtungen zu der x- und der y-Achse. Es läßt sich dann eine von der Wahl des Punktes Q unabhängige Zahl ϱ_0 bestimmen, so daß um jeden Punkt Q auf S die lokale Darstellung der Fläche in der Form $z = z(x, y)$ in dem ganzen zweidimensionalen Bereiche $\sqrt{x^2 + y^2} \leqq \varrho_0$ besteht. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ sind stetig und erfüllen eine H-Bedingung[6])

$$(5)\qquad \left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial}{\partial x} z(x_1, y_1) - \frac{\partial}{\partial x} z(x_2, y_2)\right|\\ &\left|\frac{\partial}{\partial y} z(x_1, y_1) - \frac{\partial}{\partial y} z(x_2, y_2)\right|\end{aligned}\right\} \leqq A\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}^{\frac{\lambda}{2}},$$
$$0 < \lambda < 1.$$

Für die Funktion $z(x, y)$ und ihre Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ folgt daraus

$$(6_1)\qquad |z| \leqq A(x^2 + y^2)^{\frac{1+\lambda}{2}},$$

$$(6_2)\qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqq A(x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}},$$

$$(6_3)\qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqq A(x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

[6]) D. h. die Höldersche Bedingung.

Wir beschreiben jetzt um einen beliebigen Punkt Q auf S die Kugel K_{ϱ_0} mit dem Radius ϱ_0, ziehen die Normale im Punkte Q und betrachten irgendeine Parallele zu dieser Normale, die noch K_{ϱ_0} trifft. Durch eventuelle gleichmäßige Verkleinerung von ϱ_0 können wir uns so einrichten, daß auf keiner dieser Parallelen innerhalb K_{ϱ_0} zwei Punkte der Fläche gelegen sind. In dieser Arbeit werden wir „lokale" Kugeln K_ϱ benutzen, deren Mittelpunkte sich auf der Fläche befinden und deren Radien $\varrho \leqq \varrho_0$ sind. Wir nehmen immer stillschweigend an, daß ϱ_0 alle vorhin genannten Bedingungen erfüllt.

Diese „lokalen" Kugeln K_ϱ sind zu unterscheiden von den Kugeln K_{12}, die von zwei Flächenpunkten abhängen [7]) und wie folgt gewonnen werden: Man verbindet die beiden Punkte Q_1 und Q_2 mit einer Strecke (die Entfernung der beiden Punkte bezeichnen wir mit r_{12}) und beschreibt um den Mittelpunkt dieser Strecke eine Kugel K_{12} mit dem Radius r_{12}. Für jeden außerhalb dieser Kugel gelegenen Punkt P ist das Verhältnis $\frac{r_{PQ_1}}{r_{PQ_2}}$ nach oben und nach unten beschränkt,

$$\frac{1}{4} < \frac{r_{PQ_1}}{r_{PQ_2}} < 4. \tag{7}$$

Ist auf der Fläche S eine stetige Funktion $f(P)$ definiert, welche für zwei beliebige Flächenpunkte Q_1 und Q_2 die Ungleichung

$$|f(Q_1) - f(Q_2)| \leqq C r_{12}^{\mu}$$

erfüllt, so sagen wir, daß $f(P)$ auf der Fläche einer H-Bedingung mit dem Koeffizienten C und dem Exponenten μ genügt. Ich bemerke ausdrücklich, daß der Exponent μ (wie auch der Koeffizient C) von dem Exponenten λ (bzw. dem Koeffizienten A) der Fläche unabhängig ist. Die Funktion $f(P)$ kann sogar auf der Fläche einer H-Bedingung genügen, wenn beispielsweise die Fläche S nur stetig ist. (Z. B. $f(P) \equiv$ konst., oder $f(P) = X$ usw.)

Sei jetzt Q ein Punkt der Fläche S und t eine im Punkte Q an die Fläche tangentiale Richtung. Betrachten wir irgendeine auf der Fläche in der t-Richtung gelegene Punktfolge $\{Q_i\}$, welche gegen Q konvergiert. Ist der Grenzwert

$$\lim_{i=\infty} \frac{f(Q_i) - f(Q)}{r_{Q_i Q}} = \lim_{i=\infty} \frac{f(Q_i) - f(Q)}{\text{Bogen } Q_i Q} = \frac{\partial f}{\partial t}(Q) \tag{8}$$

vorhanden, so bezeichnen wir ihn als die Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} f(Q)$ in der tangentialen Richtung t. Wir wollen jetzt erklären, was wir unter einer H-Bedingung für die Ableitungen in der tangentialen Richtung verstehen.

[7]) Die Kugel kann für beliebige Punkte M_1, M_2 konstruiert werden, die nicht notwendig der Fläche selbst angehören.

Die Schwierigkeit besteht darin, daß die Richtungen, nach denen abgeleitet wird, sich von Punkt zu Punkt ändern. Da die H-Bedingung eigentlich eine Eigenschaft im kleinen ist, so genügt es sich auf Flächenstücke zu beschränken, deren Gleichung in einer der Formen

$$Z = Z(X, Y), \quad X = X(Y, Z), \quad Y = Y(Z, X) \tag{9}$$

sich darstellen läßt. Wir benutzen hierbei eben das im Raume feste Koordinatensystem. Nehmen wir z. B. an, daß die erste Darstellung

$$Z = Z(X, Y)$$

vorliegt; $f(P) = f[X, Y, Z(X, Y)]$ sei eine auf der Fläche erklärte Funktion. Betrachten wir die beiden folgenden Kurvenscharen auf S. Die eine erhalten wir, indem wir die Fläche mit den zu der X-Z-Ebene parallelen Ebenen schneiden, die zweite, indem wir sie mit den Ebenen parallel zur Z-Y-Ebene zum Schnitt bringen. Erfüllen die tangentialen Ableitungen nach jeder der beiden Kurvenscharen je eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ und dem Koeffizienten C, so sagen wir, daß die tangentialen Ableitungen auf der Fläche einer H-Bedingung genügen.

Auch hier gilt die Bemerkung, daß der Exponent μ vom Flächenexponenten λ unabhängig ist.

Alle diese Überlegungen, wie auch die folgenden Sätze und Hilfssätze gelten für Flächenstücke bzw. geschlossene Flächen vom Typus Ah. Wir werden diese Hauptbedingung in jedem einzelnen Falle nicht mehr wiederholen.

§ 2.

Die geometrischen Hilfssätze.

Hilfssatz I. *Sei M irgendein auf der Normalen im Punkte Q auf S liegender Punkt. Die Entfernung MQ bezeichnen wir mit h und rechnen h positiv auf der einen, negativ auf der anderen Seite der Fläche. Sei $(x\text{-}y\text{-}z)$ das in Q lokale Koordinatensystem. Es gelten dann für Q, M und einen beliebigen anderen Punkt $P(x, y, z)$ der Fläche die folgenden Gleichungen und Ungleichheiten:*

1. $$\frac{1}{r_{PM}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[\frac{1}{x^2+y^2+h^2}\right]^{\frac{1-\lambda}{2}}; \quad [8]$$

2. $$\cos(r_{PM}, n_Q) = -\frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}},$$

$$\cos(r_{PM}, n_P) = +\frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}};$$

[8]) O ist das bekannte durch Landau eingebürgerte Symbol. Die Abschätzungen gelten gleichmäßig auf der Fläche S.

3. $$\cos(r_{PM}, x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}},$$

$$\cos(r_{PM}, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}};$$

4. $$\left.\begin{matrix}|\cos(n_P, x)| \\ |\cos(n_P, y)|\end{matrix}\right\} \leqq A\, r_{PQ}^{\lambda};$$

5. $$\cos(n_P, z) = \cos(n_P, n_Q) = -1 + O(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Beweis. Formel 1. Es ist

(11) $$r_{PM} = \sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}.$$

Wir betrachten die folgenden drei Punkte:

O mit den Koordinaten $0, 0, 0$,
T_1 „ „ „ x, y, h,
T_2 „ „ „ $0, 0, z$.

Dann ist offensichtlich

(12) $$r_{PM} = r_{T_1 T_2}.$$

Nun ist aber nach dem Dreiecksatz

(13) $$r_{T_1 O} - r_{T_2 O} \leqq r_{T_1 T_2} \leqq r_{T_1 O} + r_{T_2 O},$$

somit

(14) $$\sqrt{x^2+y^2+h^2} - |z| \leqq r_{PM} \leqq \sqrt{x^2+y^2+h^2} + |z|.$$

Wegen (6_1) ist weiter

(15) $$\sqrt{x^2+y^2+h^2} - A(x^2+y^2)^{\frac{1+\lambda}{2}} \leqq r_{PM} \leqq \sqrt{x^2+y^2+h^2} + A(x^2+y^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}.$$

Dividieren wir die beiden Seiten von (15) durch $r_{PM} \cdot \sqrt{x^2+y^2+h^2}$, so folgt

(16) $$\frac{1}{r_{PM}} - \frac{A(x^2+y^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}}{r_{PM}\cdot\sqrt{x^2+y^2+h^2}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} \leqq \frac{1}{r_{PM}} + A\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}}{r_{PM}\cdot\sqrt{x^2+y^2+h^2}},$$

d. h.

(17) $$\left|\frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}\right| \leqq A\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}}{r_{PM}\cdot\sqrt{x^2+y^2+h^2}}.$$

Da nun

(18) $$\frac{1}{r_{PM}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ist, so finden wir endlich

$$\left|\frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}\right| \leqq A\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}\,\sqrt{x^2+y^2}},$$ w. z. b. w.

Formel 2. Es ist

$$(19)\quad \cos(r_{PM}, n_Q) = \cos(r_{PM}, z) = \frac{z-h}{r_{PM}} = -\frac{h}{r_{PM}} + \frac{z}{r_{PM}}$$
$$= -\frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + hO\left(\frac{1}{x^2+y^2+h^2}\right)^{\frac{1-\lambda}{2}} + O(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}$$
$$= -\frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Eine ähnliche Abschätzung gilt für $\cos(r_{PM}, n_P)$.[9])

Formel 3. Es gilt

$$(20)\quad \cos(r_{PM}, x) = \frac{x}{r_{PM}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + xO\left(\frac{1}{x^2+y^2+h^2}\right)^{\frac{1-\lambda}{2}}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Formel 4. [vgl. (6_2) und (6_3)].

$$|\cos(n_P, x)| = \left|\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\right| \leqq A(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} \leqq A r_{PQ}^{\lambda}.$$

Formel 5. [vgl. (6_2) und (6_3)].

$$\cos(n_P, z) = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = -1 + O\left(\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\right) = -1 + O(x^2 +$$

Hilfssatz II. *Fällt M mit Q zusammen, so erhalten wir aus* 1. *bis* 5. *die nur auf der Fläche geltenden Ungleichheiten.*

1. $|\cos(r_{PQ}, n_P)| \leqq K A r_{PQ}^{\lambda}$,
   $|\cos(r_{PQ}, n_Q)| \leqq K A r_{PQ}^{\lambda}$;
2. $\cos(r_{PQ}, x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + O[x^2+y^2]^{\frac{\lambda}{2}}$;
3. $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \geqq \frac{1}{r_{PQ}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + O\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1-\lambda}{2}}$.

Bemerkung. Wir bezeichnen hier wie im folgenden mit K, A, C numerische Konstanten, die von der Fläche als ganzes, nicht aber von den einzelnen Flächenpunkten abhängen. Man sollte eigentlich je nach der Formel

$$K_1, K_2, \ldots, A_1, A_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots \text{ usw.}$$

schreiben. C hängt noch von den Belegungen $f(P)$ ab.

[9]) Es ist vorteilhafter, zuerst die Formeln 3., 4. und 5. aufzustellen und erst dann die Formel für $\cos(r_{PM}, n_P)$ zu beweisen.

Hilfssatz III. *Es bezeichne jetzt ν eine beliebige Richtung. Für willkürlich im Raume gewählte Punkte M_1, M_2, M gilt*

$$|\cos(r_{MM_1}, \nu) - \cos(r_{MM_2}, \nu)| \leqq \frac{2r_{M_1M_2}}{r_{MM_1}}. \tag{21}$$

Beweis. Nehmen wir im Raume ein festes Koordinatensystem, dessen X-Achse mit der ν-Richtung übereinstimmt, an, so haben wir die Differenz

$$\cos(r_{MM_1}, X) - \cos(r_{MM_2}, X)$$

abzuschätzen. Wir finden demnach, wenn wir

$$\begin{aligned} \cos(r_{MM_1}, X) &= \frac{X - X_1}{r_{MM_1}}\ ^{10}), \\ \cos(r_{MM_2}, X) &= \frac{X - X_2}{r_{MM_2}} \end{aligned} \tag{22}$$

beachten,

$$\cos(r_{MM_1}, X) - \cos(r_{MM_2}, X) = \frac{X_2 - X_1}{r_{MM_1}} + \frac{r_{MM_2} - r_{MM_1}}{r_{MM_1}} \frac{X - X_2}{r_{MM_2}} \tag{23}$$

und hieraus die Ungleichheit

$$|\cos(r_{MM_1}, X) - \cos(r_{MM_2}, X)| \leqq \frac{r_{M_1M_2}}{r_{MM_1}} + \frac{r_{M_1M_2}}{r_{MM_1}} = \frac{2r_{M_1M_2}}{r_{MM_1}}. \tag{24}$$

Hilfssatz IV. *Es seien Q_1 und Q_2 zwei Punkte der Fläche, deren Entfernung kleiner als $\frac{\varrho_0}{2}$ ist. Um den Mittelpunkt der Strecke Q_1Q_2 beschreiben wir die Kugel K_{12}* [11]) *mit dem Radius r_{12}. Dann gelten für jeden außerhalb K_{12} liegenden Flächenpunkt P die Ungleichheiten*

1. $$|\cos(r_{PQ_1}, n_P) - \cos(r_{PQ_2}, n_P)| \leqq KA \frac{r_{12}}{r_{PQ_1}^{1-\lambda}},$$

2. $$|\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1}) - \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})| \leqq KA\left(\frac{r_{12}}{r_{PQ_1}^{1-\lambda}} + r_{12}^{\lambda}\right).$$

Beweis. 1. Wir betrachten das dem Punkte Q_1 entsprechende lokale Koordinatensystem x-y-z und bezeichnen mit x, y, z die Koordinaten des Punktes P, mit x_2, y_2, z_2 diejenigen von Q_2 [12]). Die Koordinaten von Q_1 sind natürlich alle Null. Dann ist

$$\cos(r_{PQ_1}, n_P) - \cos(r_{PQ_2}, n_P) = [\cos(r_{PQ_1}, x) - \cos(r_{PQ_2}, x)]\cos(n_P, x) \tag{25}$$
$$+ [\cos(r_{PQ_1}, y) - \cos(r_{PQ_2}, y)]\cos(n_P, y) + [\cos(r_{PQ_1}, z) - \cos(r_{PQ_2}, z)]\cos(n_P, z).$$

---

[10]) Ohne Index bzw. mit dem Index 1 oder 2 bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte M, M_1 oder M_2 im festen Koordinatensystem.

[11]) Die Definition der Kugel K_{12} vgl. S. 605.

[12]) Diese Koordinaten beziehen sich auf das lokale Koordinatensystem in Q_1.

Aus den Hilfssätzen III und I_4 folgern wir

$$(26)\quad |\cos(r_{PQ_1}, x) - \cos(r_{PQ_2}, x)|\,|\cos(n_P, x)| \leqq K A \frac{r_{12}}{r_{PQ_1}} r_{PQ_1}^{\lambda} \leqq K A \frac{r_{12}}{r_{PQ_1}^{1-\lambda}}$$

Der sich auf die y-Koordinate beziehende Ausdruck auf der rechten Seite von (25) wird auf dieselbe Weise abgeschätzt. Es bleibt also nur noch der dritte Summand

$$(27)\quad |\cos(r_{PQ_1}, z) - \cos(r_{PQ_2}, z)|\,|\cos(n_P, z)| \leqq |\cos(r_{PQ_1}, z) - \cos(r_{PQ_2}, z)|$$
$$= \left|\frac{z}{r_{PQ_1}} - \frac{z-z_2}{r_{PQ_2}}\right| \leqq |z| \left|\frac{1}{r_{PQ_1}} - \frac{1}{r_{PQ_2}}\right| + \frac{|z_2|}{r_{PQ_2}}.$$

Nun ist nach (6)

$$(28)\qquad |z| \leqq A r_{PQ_1}^{1+\lambda}; \qquad |z_2| \leqq A r_{Q_1Q_2}^{1+\lambda} = A r_{12}^{1+\lambda} \leqq 2 A r_{PQ_2}^{\lambda} r_{12}.$$ [13])

Mit Rücksicht auf diese Ungleichheit sowie die Ungleichheit (27) ist

$$(29)\quad |\cos(r_{PQ_1}, z) - \cos(r_{PQ_2}, z)|\,|\cos(n_P, z)| \leqq |\cos(r_{PQ_1}, z) - \cos(r_{PQ_2}, z)|$$
$$\leqq A \frac{r_{12} r_{PQ_1}^{\lambda}}{r_{PQ_2}} + 2A \frac{r_{12}}{r_{PQ_2}^{1-\lambda}}.$$ [14])

Wir bringen jetzt die außerhalb K_{12} geltende Ungleichheit (7)

$$(7)\qquad \frac{1}{4} \leqq \frac{r_{PQ_1}}{r_{PQ_2}} < 4$$

in Erinnerung. Aus ihr und der zuletzt gewonnenen Beziehung (29) folgt

$$|\cos(r_{PQ_1}, z) - \cos(r_{PQ_2}, z)|\,|\cos(n_P, z)| \leqq |\cos(r_{PQ_1}, z) - \cos(r_{PQ_2}, z)| \leqq$$

Wir erhalten die Behauptung des Hilfssatzes, indem wir die Formeln (26) [15]) und (30) zusammenfassen.

2. Es ist

$$(31)\quad \cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1}) - \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2}) = [\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1}) - \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_1})]$$
$$+ [\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_1}) - \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})],$$

sowie

$$(32)\quad \cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1}) - \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_1}) = \cos(r_{PQ_1}, z) - \cos(r_{PQ_2}, z).$$

---

[13]) Man beachte, daß wir die Ungleichheit für Punkte P beweisen, die außerhalb K_{12} liegen.

[14]) $\left|\frac{1}{r_{PQ_1}} - \frac{1}{r_{PQ_2}}\right| \leqq \frac{r_{12}}{r_{PQ_1} \cdot r_{PQ_2}}$.

[15]) Eine zu (26) analoge Ungleichheit gilt auch für die y-Variable. Diese muß bei der Zusammenfassung in Betracht gezogen werden.

Aus (27) und (30) folgt aber

$$|\cos(r_{PQ_1}, z) - \cos(r_{PQ_2}, z)| \leqq 12A \frac{r_{12}}{r_{PQ_1}^{1-\lambda}}. \tag{33}$$

Aus (32), (33) finden wir darum

$$|\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1}) - \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_1})| \leqq 12A \frac{r_{12}}{r_{PQ_1}^{1-\lambda}}. \tag{34}$$

Nach (2) gilt weiter

$$|\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_1}) - \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})| \leqq 3Ar_{12}^{\lambda}. \tag{35}$$

Wegen (34) und (35) gelangen wir also endgültig zu

$$|\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1}) - \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})| \leqq KA\left(\frac{r_{12}}{r_{PQ_1}^{1-\lambda}} + r_{12}^{\lambda}\right). \tag{36}$$

Hilfssatz V. *Es bedeute t_1 eine im Punkte Q_1, t_2 eine im Punkte Q_2 tangentiale Richtung. Ihre Richtungskosinus mögen einer H-Bedingung*

$$\left.\begin{aligned} &|\cos(X, t_1) - \cos(X, t_2)| \\ &|\cos(Y, t_1) - \cos(Y, t_2)| \\ &|\cos(Z, t_1) - \cos(Z, t_2)| \end{aligned}\right\} \leqq Ar_{12}^{\lambda}. \tag{37}$$

genügen. Dann ist

$$\begin{aligned} &1.\quad |\cos(n_P, t_1) - \cos(n_P, t_2)| \leqq 3Ar_{12}^{\lambda}, \\ &2.\quad |\cos(r_{PQ_1}, t_1) - \cos(r_{PQ_2}, t_2)| \leqq \frac{6r_{12}}{r_{PQ_1}} + 3Ar_{12}^{\lambda}. \end{aligned} \tag{38}$$

Beweis. Da die Formel 1. sofort aus (37) und (2) folgt, beschäftigen wir uns nur mit 2.

$$|\cos(r_{PQ_1}, t_1) - \cos(r_{PQ_2}, t_2)|$$

$$|\cos(r_{PQ_1}, X)\cos(X, t_1) - \cos(r_{PQ_2}, X)\cos(X, t_2)| + \text{analoge Glieder in } Y, Z$$

$$|\{\cos(r_{PQ_1}, X) - \cos(r_{PQ_2}, X)\}\cos(X, t_1)| + |\{\cos(X, t_1) - \cos(X, t_2)\}\cos(r_{PQ_2}, X)| + \ldots$$

Nun ist dem Hilfssatze III gemäß

$$|\cos(r_{PQ_1}, X) - \cos(r_{PQ_2}, X)| \leqq \frac{2r_{12}}{r_{PQ_1}} \tag{40}$$

und nach (37)

$$|\cos(X, t_1) - \cos(X, t_2)| \leqq Ar_{12}^{\lambda}. \tag{41}$$

Es läßt sich also (39) wegen (40), (41) wie folgt abschätzen:

$$|\cos(r_{PQ_1}, t_1) - \cos(r_{PQ_2}, t_2)| \leqq \frac{6r_{12}}{r_{PQ_1}} + 3Ar_{12}^{\lambda}.$$

§ 3.

Integralhilfssätze.

Hilfssatz VI. *Für jede geschlossene Fläche gilt*[16])

$$\iint_S \frac{\cos(r_{PM_1}, n_P)}{r_{PM}^2}\, d\sigma = \begin{cases} 4\pi, \\ 2\pi, \\ 0, \end{cases}$$

je nachdem M im Innern, auf der Fläche oder außerhalb dieser liegt.

Dieser Satz folgt sofort aus dem Greenschen Satze, der für Flächen vom Typus Ah seine Gültigkeit behält.

Hilfssatz VII. Voraussetzung. *Auf S ist eine integrable und beschränkte Funktion $f(P)$ erklärt.*

Behauptung. *Das Potential der Doppelbelegung*

$$W(Q) = \iint_S f(P) \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2}\, d\sigma$$

erfüllt auf der Fläche selbst eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ (Flächenexponent). Genauer, es gilt für irgend zwei Flächenpunkte Q_1, Q_2 die Abschätzung

$$|W(Q_1) - W(Q_2)| \leqq K A \operatorname{Max} |f|\, r_{12}^{\lambda}.$$

Beweis. Offensichtlich genügt es vorauszusetzen, daß $r_{12} < \frac{\varrho_0}{2}$ ist. Um Q_1 und Q_2 beschreiben wir die in der Einleitung genannte Kugel K_{12}. Sie teilt die Fläche in zwei Teile, in einen in K_{12} gelegenen Teil s und in einen außerhalb K_{12} gelegenen $S - s = S'$. Es gilt

$$W(Q_1) - W(Q_2) = \iint_s f(P) \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r_{PQ_1}^2}\, d\sigma - \iint_s f(P) \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r_{PQ_2}^2}\, d\sigma$$

$$+ \iint_{S-s} f(P) \left[\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r_{PQ_1}^2} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r_{PQ_2}^2} \right] d\sigma,$$

Das Integral

$$\iint_s f(P) \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r_{PQ_1}^2}\, d\sigma \quad \text{sowie das Integral} \quad \iint_s f(P) \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r_{PQ_2}^2}\, d\sigma$$

schätzen wir mit Hilfe des Hilfssatzes II_1, II_3 ab. Benutzt man nämlich das in Q_1 lokale Koordinatensystem und berücksichtigt die Tatsache, daß

---

[16]) Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen: M ist ein beliebiger Punkt im Raume, Flächenpunkte werden mit den Buchstaben P und Q bezeichnet, wobei Q fest ist, während P die Integrationsvariable darstellt.

der Radius von K_{12} kleiner als $\frac{\varrho_0}{2}$ ist, so findet man durch Übergang zu den Polarkoordinaten

$$\left|\iint_s f(P)\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r^2_{PQ_1}}d\sigma\right| \leqq K\,\mathrm{Max}|f|\,A\iint_s \frac{r^\lambda_{PQ_1}}{r^2_{PQ_1}}d\sigma$$

$$\leqq K\,A\,\mathrm{Max}|f|\int_0^{2r_{12}}\frac{d\varrho}{\varrho^{1-\lambda}} = K\,A\,\mathrm{Max}|f|\,r^\lambda_{12}.$$

Da eine entsprechende Ungleichheit für das Integral mit dem Index 2 besteht, so ist

$$\left|\iint_s f(P)\left[\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r^2_{PQ_1}} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r^2_{PQ_2}}\right]d\sigma\right| \leqq K\,A\,\mathrm{Max}|f|\,r^\lambda_{12}.$$

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Flächenstücke $S - s$. Eine Abschätzung des Integrals folgt sofort aus den Hilfssätzen II_1, II_3, IV_1. Zunächst aber eine Bemerkung. Betrachten wir die feste lokale Kugel K_{ϱ_0} um den Punkt Q_1. Sie enthält natürlich die Kugel K_{12}. Außerhalb der festen Kugel K_{ϱ_0} gilt gewiß die für die Höldersche Bedingung nötige Abschätzung, so daß es genügt, sich mit demjenigen Flächenstücke S'' zu beschäftigen, das innerhalb K_{ϱ_0} und außerhalb K_{12} liegt[17]). Mit Benutzung der vorhin erwähnten Hilfssätze erhalten wir dann

$$\left|\iint_{S''} f(P)\left[\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r^2_{PQ_1}} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r^2_{PQ_2}}\right]d\sigma\right|$$

$$|f|\left\{\iint_{S''}\left|\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P) - \cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r^2_{PQ_1}}\right|d\sigma + \iint_{S''}|\cos(r_{PQ_2}, n_P)\left(\frac{1}{r^2_{PQ_1}} - \frac{1}{r^2_{PQ_2}}\right)^{18})\right|d\sigma\right\}$$

$$\mathrm{Max}|f|\left\{r_{12}\int_{\frac{1}{2}r_{12}}^{\varrho_0}\frac{d\varrho}{\varrho^{2-\lambda}} + r_{12}\int_{\frac{1}{2}r_{12}}^{\varrho_0}\frac{d\varrho}{\varrho^{2-\lambda}}\right\}^{18)} \leqq K\,A\,\mathrm{Max}|f|\,r^\lambda_{12}.$$

Aus der gewonnenen Abschätzung für $\iint_s$ und für $\iint_{S-s}$ folgt durch Addition die Behauptung des Hilfssatzes.

Hilfssatz VIII. Voraussetzung. *Es genüge jetzt $f(P)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ*

$$|f(Q_1) - f(Q_2)| \leqq C r^\mu_{12}. \tag{42}$$

---

[17]) In den folgenden Hilfssätzen beschäftigen wir uns darum statt mit $\iint_{S-s}$ stets mit dem Integral $\iint_{S''}$.

[18]) $\left|\frac{1}{r^2_{PQ_1}} - \frac{1}{r^2_{PQ_2}}\right| = \left|\frac{1}{r_{PQ_1}} - \frac{1}{r_{PQ_2}}\right|\left|\frac{1}{r_{PQ_1}} + \frac{1}{r_{PQ_2}}\right| \leqq \frac{r_{12}}{r_{PQ_1}\cdot r_{PQ_2}}\cdot\frac{r_{PQ_1}+r_{PQ_2}}{r_{PQ_1}\cdot r_{PQ_2}}$

$\leqq K\frac{r_{12}}{r^3_{PQ_2}}$.

Behauptung. *Für $W(Q)$ gilt eine der drei Ungleichheiten*

$$|W(Q_1)-W(Q_2)| \leqq \begin{cases} K A C r_{12}^{\lambda+\mu}, \\ K A C r_{12}, \\ K A C r_{12} |\log r_{12}|, \end{cases}$$

je nachdem $\mu+\lambda<1$; $\mu+\lambda>1$; $\mu+\lambda=1$ ist.

Beweis. Wir nehmen zuerst die Fläche S als geschlossen an. Da nach Hilfssatz VI

$$\iint_S f(Q_1)\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r_{PQ_1}^2}d\sigma = \iint_S f(Q_1)\frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r_{PQ_2}^2}d\sigma = 2\pi f(Q_1),$$

so ist

$$W(Q_1)-W(Q_2) = \iint_S [f(P)-f(Q_1)]\left[\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r_{PQ_1}^2} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r_{PQ_2}^2}\right]d\sigma.$$

Wir verfahren jetzt so, wie beim Hilfssatze VII, beschreiben die Kugel K_{12} und betrachten die Flächenstücke s, $S-s=S'$, S''.

Nach Hilfssatz II_1, II_3 und wegen (42) erhalten wir nach Einführung der Polarkoordinaten $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$

$$(43)\qquad \left|\iint_s [f(P)-f(Q_1)]\left[\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r_{PQ_1}^2} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r_{PQ_2}^2}\right]d\sigma\right|$$

$$\leqq \iint_s |f(P)-f(Q_1)|\left|\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r_{PQ_1}^2}\right|d\sigma + \iint_s |f(P)-f(Q_1)|\left|\frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r_{PQ_2}^2}\right|d\sigma$$

$$\leqq A C r_{12}^{\mu}\left\{\iint_s \frac{d\sigma}{r_{PQ_1}^{2-\lambda}} + \iint_s \frac{d\sigma}{r_{PQ_2}^{2-\lambda}}\right\} \leqq K A C r_{12}^{\mu+\lambda}.$$

Die Hilfssätze II_3, IV_1, II_1 und die Formel (7) liefern die Abschätzung

$$(44)\qquad \left|\iint_{S''} [f(P)-f(Q_1)]\left[\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r_{PQ_1}^2} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r_{PQ_2}^2}\right]d\sigma\right|$$

$$\leqq \iint_{S''} |f(P)-f(Q_1)|\left|\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)-\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r_{PQ_1}^2}\right|d\sigma$$

$$+ \iint_{S''} |f(P)-f(Q_1)|\,|\cos r_{PQ_2}, n_P)|\left|\frac{1}{r_{PQ_1}^2} - \frac{1}{r_{PQ_2}^2}\right|^{17),\,18)}d\sigma$$

$$\leqq K A C\left\{r_{12}\iint_{S''}\frac{d\sigma}{r_{PQ_1}^{3-(\lambda+\mu)}} + r_{12}\iint_{S''}\frac{d\sigma}{r_{PQ_1}^{3-(\lambda+\mu)}}\right\} \leqq K A C r_{12}\int_{\frac{1}{2}r_{12}}^{\varrho_0}\frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}}.$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden

a) $\lambda+\mu<1$. Dann ist

$$\left|\iint\limits_{S''}\right| \leqq KAC\left(\frac{1}{\varrho_0^{1-(\lambda+\mu)}}-\frac{1}{r_{12}^{1-(\lambda+\mu)}}\right)r_{12} \leqq KAC r_{12}^{\lambda+\mu},$$

(45) b) $\lambda+\mu>1$

$$\left|\iint\limits_{S''}\right| \leqq KAC r_{12}(\varrho_0^{\lambda+\mu-1}-r_{12}^{\lambda+\mu-1}) \leqq K\varrho_0^{\lambda+\mu-1}AC r_{12},$$

c) $\mu+\lambda=1$

$$\left|\iint\limits_{S''}\right| \leqq KAC r_{12}|\log\varrho_0-\log r_{12}| \leqq KAC r_{12}|\log r_{12}|.$$

Da auf $S'-S''$ offensichtlich die H-Bedingung erfüllt ist, so folgen aus (43), $(45)_1$, $(45)_2$, $(45)_3$ die drei in der Behauptung dieses Hilfssatzes ausgesprochene Möglichkeiten.

Bemerkung zum Hilfssatze VIII. Grenzen wir um den Punkt Q_1 irgendein Flächenstück σ ab, dessen Durchmesser $\varepsilon<\frac{\varrho_0}{2}$ ist, so folgt im Falle $\lambda+\mu>1$ für das über σ erstreckte Integral (wenn $r_{12}<\varepsilon$ ist)

$$\iint\limits_{\sigma}[f(P)-f(Q_1)]\left[\frac{\cos(r_{PQ_1},n_P)}{r_{PQ_1}^2}-\frac{\cos(r_{PQ_2},n_P)}{r_{PQ_2}^2}\right]d\sigma$$

die Abschätzung

(46) $$\left|\iint\limits_{\sigma}\right| \leqq KAC\varepsilon^{\lambda+\mu-1}r_{12}.$$

Beweis. Man beachte die Formeln (43) und $(45)_3$, in denen überall ε für ϱ_0 zu setzen ist[19]).

Hilfssatz IX. (Fortsetzung des Hilfssatzes VIII.) *Ist $\lambda+\mu>1$, so existieren auf der Fläche die Tangentialableitungen $\frac{\partial}{\partial t}W(Q)$ und lassen sich durch die Formel*

(47) $$\frac{\partial}{\partial t}W(Q)=\iint\limits_{S}[f(P)-f(Q)]\frac{1}{r_{PQ}^3}[\cos(n_P,t)-3\cos(r_{PQ},t)\cos(r_{PQ},n_P)]\,d\sigma$$

darstellen.

Beweis. Sei Q ein fester Flächenpunkt, t eine an die Fläche im Punkte Q tangentiale Richtung. Wir beschreiben um Q eine lokale Kugel K_ε vom Radius ε, bezeichnen den innerhalb K_ε liegenden Teil der Fläche mit σ und betrachten auf σ irgendeine in der Tangentialrichtung t liegende, gegen Q konvergierende Punktfolge $\{Q_i\}$. Es ist

$$\frac{1}{r_{Q_iQ}}[W(Q_i)-W(Q)]=\frac{1}{r_{Q_iQ}}\left(\iint\limits_{S-\sigma}+\iint\limits_{\sigma}\right).$$

[19]) Man beachte $r_{12}<\varepsilon$.

Das Integral

$$\frac{1}{r_{Q_1Q}}\iint\limits_{S-\sigma}[f(P)-f(Q)]\left[\frac{\cos(r_{PQ_1},n_P)}{r^2_{PQ_1}}-\frac{\cos(r_{PQ}n_P)}{r^2_{PQ}}\right]d\sigma$$

konvergiert beim festgehaltenen σ, d. h. bei festem ε, gegen

$$\iint\limits_{S-\sigma}[f(P)-f(Q)]\frac{1}{r^3_{PQ}}[\cos(n_P,t)-3\cos(r_{PQ},t)\cos(r_{PQ},n_P)]\,d\sigma.$$

Das Integral über σ läßt sich aber leicht abschätzen (vgl. die Bemerkung zum Hilfssatze VIII). Es ist

$$\frac{1}{r_{Q_1Q}}\left|\iint\limits_{\sigma}\left|[f(P)-f(Q)]\left[\frac{\cos(r_{PQ_1},n_P)}{r^2_{PQ_1}}-\frac{\cos(r_{PQ},n_P)}{r^2_{PQ}}\right]d\sigma\right|\right|\leqq KAC\varepsilon^{\lambda+\mu-1}.$$

Läßt man jetzt ε gegen Null konvergieren, so gewinnt man die Behauptung des Hilfssatzes (vgl. (47)).

Hilfssatz X. (Fortsetzung des Hilfssatzes IX.) *Ist* $0<\lambda<1$, $0<\mu<1$, $\mu+\lambda>1$, *so erfüllen die Tangentialableitungen* $\frac{\partial}{\partial t}W(Q)$ *eine H-Bedingung mit dem Exponenten* $\lambda+\mu-1$.

Beweis. An dieser Stelle angelangt, bitte ich den Leser, die Ausführungen auf S. 606, wo sich das Nähere über die H-Bedingung für die Tangentialableitungen findet, zu beachten. Wir betrachten eine der dort definierten Kurvenscharen. Sie ordnet jedem Flächenpunkte Q eine Tangentialrichtung t_Q zu. Handelt es sich um zwei Flächenpunkte Q_1 und Q_2, so bezeichnen wir die ihnen entsprechenden Richtungen mit t_1 und t_2. Es sind dann die Ungleichheiten

$$\left|\frac{\partial}{\partial t_1}W(Q_1)-\frac{\partial}{\partial t_2}W(Q_2)\right|\leqq KAC r_{12}^{\mu+\lambda-1}$$

zu beweisen.

Wir gehen zuerst von der folgenden Bemerkung aus. Die Richtungskosinus der t-Richtungen erfüllen eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Die in Betracht kommenden Beziehungen lauten genauer

$$\left.\begin{aligned}&|\cos(X,t_1)-\cos(X,t_2)|\\&|\cos(Y,t_1)-\cos(Y,t_2)|\\&|\cos(Z,t_1)-\cos(Z,t_2)|\end{aligned}\right\}\leqq A r_{12}^{\lambda}.$$

Dies folgt sofort aus (2), wenn man die Konstruktion der t-Richtungen berücksichtigt. Wir untersuchen zuerst den Beitrag, den das im Innern K_{12} gelegene Flächenstück s zu $\frac{\partial W}{\partial t_1}-\frac{\partial W}{\partial t_2}$ liefert.

$$\left|\iint\limits_{s}\right|\leqq\iint\limits_{s}|f(P)-f(Q_1)|\left|\frac{1}{r^3_{PQ_1}}[\cos(n_P,t_1)-3\cos(r_{PQ_1},t_1)\cos(r_{PQ_1},n_P)\right.$$

$$+\iint\limits_{s}|f(P)-f(Q_2)|\left|\frac{1}{r^3_{PQ_2}}[\cos(n_P,t_2)-3\cos(r_{PQ_2},t_2)\cos(r_{PQ_2},n_P)\right. \tag{48}$$

Da t_1 und t_2 Tangentialrichtungen sind, so gilt nach den Hilfssätzen II_1, I_4

$$(49)\qquad \begin{aligned} &|\cos(n_P, t_1)| \leqq A r_{PQ_1}^{\lambda}, \qquad |\cos(n_P, t_2)| \leqq A r_{PQ_2}^{\lambda}, \\ &|\cos r_{PQ_1}, n_P)| \leqq K A r_{PQ_1}^{\lambda}, \quad |\cos r_{PQ_2}, n_P)| \leqq K A r_{PQ_2}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Damit läßt sich das in (48) vorkommende, über s erstreckte Integral wie folgt abschätzen:

$$(50)\qquad \left|\iint_s\right| \leqq K A C \left\{\iint_s r_{PQ_1}^{\mu} \frac{r_{PQ_1}^{\lambda}}{r_{PQ_1}^{3}} d\sigma + \iint_s r_{PQ_2}^{\mu} \frac{r_{PQ_2}^{\lambda}}{r_{PQ_2}^{3}} d\sigma\right\}$$

$$\leqq K A C \int_0^{2r_{12}} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}} = K A C r_{12}^{\mu+\lambda-1}.$$

Jetzt gehen wir zum Integral $\iint_{S''}$ [20]) über.

$$(51)\qquad \iint_{S''} [f(P) - f(Q_1)] \frac{1}{r_{PQ_1}^{3}} [\cos(n_P, t_1) - 3\cos(r_{PQ_1}, t_1)\cos(r_{PQ_1}, n_P)]\, d\sigma$$

$$- \iint_{S''} [f(P) - f(Q_2)] \frac{1}{r_{PQ_2}^{3}} [\cos(n_P, t_2) - 3\cos(r_{PQ_2}, t_2)\cos(r_{PQ_2}, n_P)]\, d\sigma$$

$$= [f(Q_2) - f(Q_1)] \iint_{S''} \frac{1}{r_{PQ_1}^{3}} [\cos(n_P, t_1) - 3\cos(r_{PQ_1}, t_1)\cos(r_{PQ_1}, n_P)]\, d\sigma$$

$$+ \iint_{S''} [f(P) - f(Q_2)] \left\{\frac{1}{r_{PQ_1}^{3}} [\cos(n_P, t_1) - 3\cos(r_{PQ_1}, t_1)\cos(r_{PQ_1}, n_P)]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{r_{PQ_2}^{3}} [\cos(n_P, t_2) - 3\cos(r_{PQ_2}, t_2)\cos(r_{PQ_2}, n_P)]\right\} d\sigma = I + II.$$

Eine Abschätzung des mit I bezeichneten Integrals ergibt nach (42) und (49)

$$(52)\qquad |I| \leqq C r_{12}^{\mu} K A r_{12}^{\lambda-1} = K A C r_{12}^{\mu+\lambda-1}.$$

Bevor eine entsprechende Ungleichung für II aufgestellt wird, sei bemerkt, daß die in den Formeln (50) und (52) gegebenen Abschätzungen für $\iint_s$ und I auch im Grenzfalle $\mu = 1$ gelten. In diesem Falle besagen die Formeln, daß die in Betracht kommenden Beiträge eine Höldersche Bedingung genau mit dem Exponenten λ erfüllen. Wir werden sehen, daß eine solche Beziehung sich im Falle $\mu = 1$ für II nicht beweisen läßt. Infolge-

[20]) Vgl. loc. cit. [17]).

dessen haben wir dem Hilfssatze die Voraussetzung $\mu < 1$ zugrunde gelegt.

$$(53) \qquad II = \iint_{S''} [f(P) - f(Q_2)] \left[\frac{\cos(n_P, t_1)}{r^3_{PQ_1}} - \frac{\cos(n_P, t_2)}{r^3_{PQ_2}} \right] d\sigma$$

$$+ 3 \iint_{S''} [f(P) - f(Q_2)] \left[\frac{\cos(r_{PQ_2}, t_2)\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r^3_{PQ_2}} - \frac{\cos(r_{PQ_1}, t_1)\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r^3_{PQ_1}} \right]$$

Mit Hilfe der Hilfssätze II, III, IV, V bekommen wir, indem wir noch die außerhalb K_{12} gültige Ungleichheit

$$\left| \frac{1}{r^3_{PQ_1}} - \frac{1}{r^3_{PQ_2}} \right| \leqq 4 \frac{r_{12}}{r^4_{PQ_1}}$$

und die Formel (53) heranziehen,

$$(54) \quad |II| \leqq KAC \iint_{S''} \left(\frac{r^\mu_{PQ_1}}{r^3_{PQ_1}} r^\lambda_{12} + \frac{r^\mu_{PQ_1} \cdot r^\lambda_{PQ_1}}{r^4_{PQ_1}} r_{12} \right) d\sigma$$

$$+ KAC \iint_{S''} \left(r^\mu_{PQ_1} \frac{r_{12}}{r^{4-\lambda}_{PQ_1}} + r^\mu_{PQ_1} \frac{r^\lambda_{12}}{r^3_{PQ_1}} + r^\mu_{PQ_1} \frac{r_{12}}{r^{4-\lambda}_{PQ_1}} + \frac{r^\mu_{PQ_1} \cdot r^\lambda_{PQ_1} \cdot r_{12}}{r^4_{PQ_1}} \right) d\sigma$$

$$\leqq KAC r^\lambda_{12} \int_{\frac{r_{12}}{2}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\mu}} \overset{21)}{+} KAC r_{12} \int_{\frac{1}{2}r_{12}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(\lambda+\mu)}}$$

$$= KAC r^{\lambda+\mu-1}_{12} \qquad (\lambda + \mu > 1,\ \mu < 1).$$

Durch Zusammenfassung von (50), (52) und (54) erhalten wir den Hilfssatz X.

Wir müssen jetzt noch eine Beziehung ableiten, die uns erlauben würde, die früher für den Fall $\mu = 1$ erwähnte Schwierigkeit zu beheben. Dies leistet der

Hilfssatz XI. Voraussetzung. *Die Belegung $f(P)$ besitzt Tangentialableitungen, die ihrerseits einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\varepsilon > 0$ genügen:*

$$(55) \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial t_1}(Q_1) - \frac{\partial f}{\partial t_2}(Q_2) \right| \leqq C r^\varepsilon_{12}, \qquad \operatorname{Max} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leqq C.$$

Behauptung. *Die Tangentialableitungen $\frac{\partial}{\partial t} W(Q)$ erfüllen eine Höldersche Bedingung genau mit dem Exponenten λ.*

---

21) $\int_{\frac{r_{12}}{2}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\mu}} \leqq \frac{K}{r^{\mu-1}_{12}}$, falls $\mu < 1$ ist. Für $\mu = 1$ gilt eine Abschätzung dieser Art nicht.

Beweis. Da f stetige Ableitungen besitzt, so erfüllt $f(P)$ eine Lipschitzsche Bedingung, in Formeln

$$|f(Q_1)-f(Q_2)| \leqq K C r_{12},$$

mit anderen Worten, f erfüllt eine H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu = 1$. In diesem Falle lassen sich, wie ich schon früher bemerkt habe, die Integrale $\iint$ und I wie beim Hilfssatze X [22]) abschätzen,

$$\left|\iint_s\right| \leqq K A C r_{12}^{\lambda}, \qquad |I| \leqq K A C r_{12}^{\lambda}. \tag{56}$$

Wir beschränken uns also auf die Betrachtung des Integrals II, die einige Schwierigkeit bietet. Wir bedienen uns des im Punkte Q_2 lokalen Koordinatensystems x-y-z. Für $f(P)$ gilt dann die Entwicklung

$$\begin{aligned} f(P) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{000} \cdot x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{000} \cdot y + O(x^2+y^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \text{ [23])} \\ &= a_0 \cdot x + b_0 \cdot y + O(x^2+y^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in II (Formel 51) ein, so finden wir

$$\begin{aligned} II = a_0 \iint_{S''} x \Big\{ & \frac{1}{r_{PQ_1}^3}[\cos(n_P, t_1) - 3\cos(r_{PQ_1}, t_1)\cos(r_{PQ_1}, n_P)] \\ & - \frac{1}{r_{PQ_2}^3}[\cos(n_P, t_2) - 3\cos(r_{PQ_2}, t_2)\cos(r_{PQ_2}, n_P)]\Big\} d\sigma \\ + b_0 \iint_{S''} y \Big\{ & \frac{1}{r_{PQ_1}^3}[\cos(n_P, t_1) - 3\cos(r_{PQ_1}, t_1)\cos(r_{PQ_1}, n_P)] \\ & - \frac{1}{r_{PQ_2}^3}[\cos(n_P, t_2) - 3\cos(r_{PQ_2}, t_2)\cos(r_{PQ_2}, n_P)]\Big\} d\sigma \\ + \iint_{S''} & O(x^2+y^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \{\ \}\, d\sigma \\ = II^1 + II^2 + II^3. & \end{aligned} \tag{57}$$

Der Integralausdruck II^3 wird auf dieselbe Weise wie II beim Beweise des Hilfssatzes X abgeschätzt [24]). Es kommt heraus

$$|II^3| \leqq K A C r_{12}^{\lambda} \int_{\frac{r_{12}}{2}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+\varepsilon)}} + K A C r_{12} \int_{\frac{r_{12}}{2}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(1+\lambda+\varepsilon)}} \leqq K A C r_{12}^{\lambda}. \tag{58}$$

---

[22]) Vgl. die Ausführungen auf S. 617. Siehe die Formeln (50), (51) und (52).

[23]) Man beachte die Voraussetzungen des Hilfssatzes; $a_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{000}$ und $b_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{000}$.

[24]) S. die Formeln (53) und (54).

Um eine Abschätzung für II^1 und II^2 zu gewinnen, stützen wir uns auf den Hilfssatz II. Es ist

$$(59)\quad II^1 = a_0 \iint_{S''} x \frac{\cos(n_P, t_1) - \cos(n_P, t_2)}{r^3_{PQ_1}} d\sigma + a_0 \iint_{S''} x \cos(n_P, t_2) \left(\frac{1}{r^3_{PQ_1}} - \frac{1}{r^3_{PQ_2}}\right)$$
$$+ 3a_0 \iint_{S''} x \left[\frac{\cos(r_{PQ_2}, t_2)\cos(r_{PQ_2}, n_P)}{r^3_{PQ_2}} - \frac{\cos(r_{PQ_1}, t_1)\cos(r_{PQ_1}, n_P)}{r^3_{PQ_1}}\right] d\sigma$$
$$= II^{11} + II^{12} + II^{13}.$$

Dem Hilfssatze II zufolge ist

$$(60)\quad \frac{1}{r_{PQ_2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + O\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1-\lambda}{2}}, \qquad \frac{1}{r^3_{PQ_2}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}},$$

somit nach den Hilfssätzen I_4, V_1

$$II^{11} = a_0 \iint_{S''} x \frac{\cos(n_P, t_1) - \cos(n_P, t_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma + O(r_{12})^\lambda$$
$$= a_0 [\cos(x, t_1) - \cos(x, t_2)] \iint_{S''} \frac{x \cos(n_P, x)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma$$
$$(61)\qquad + a_0 [\cos(y, t_1) - \cos(y, t_2)] \iint_{S''} x \frac{\cos(n_P, y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma$$
$$+ a_0 [\cos(z, t_1) - \cos(z, t_2)] \iint_{S''} \frac{x \cos(n_P, z)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + O(r_{12})^\lambda,$$

$$|II^{11}| \leqq KAC r_{12}^\lambda + KAC r_{12}^\lambda \left| \iint_{S''} \frac{x \cos(n_P, z)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \right|.$$

Nun ist dem Hilfssatze I_5 gemäß

$$(62)\quad \left| \iint_{S''} \frac{x \cos(n_P, z)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \right| \leqq \left| \iint_{S''} \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \right| + \left| \iint_{S''} \frac{x(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \right|$$

und die Integrale rechts sind, wie man sich leicht durch Einführung der Polkoordinaten überzeugt, endlich und beschränkt. Es gilt also wegen (61) und (62)

$$(63)_1 \qquad |II^{11}| \leqq KAC r_{12}^\lambda.$$

Ebenso findet man

$$(63)_2 \qquad |II^{12}| \leqq KAC r_{12} \iint_{S''} \frac{|x| \cdot r^\lambda_{PQ_2}}{r^4_{PQ_2}} d\sigma \leqq KAC r_{12}^\lambda.$$

Endlich ist den Hilfssätzen IV_1, V_2 gemäß

$$(63)_3 \quad |II^{13}| \leqq KAC r_{12} \iint_{S'} \frac{|x|}{r_{PQ_1}^{4-\lambda}} d\sigma + KAC r_{12}^{\lambda} \iint_{S'} \frac{|x|}{r_{PQ_1}^{3-\lambda}} d\sigma \leqq KAC r_{12}^{\lambda}.$$

Durch Zusammenfassung von $(63)_1$, $(63)_2$, $(63)_3$ bekommt man[25])

$$(64) \qquad |II^1| \leqq KAC r_{12}^{\lambda}.$$

Da eine ähnliche Abschätzung,

$$(65) \qquad |II^2| \leqq KAC r_{12}^{\lambda},$$

auch für II^2 gilt, so ergibt sich aus (58), (64) und (65)

$$(66) \qquad |II| \leqq KAC r_{12}^{\lambda}.$$

Nun folgt aus (56) und (66) endgültig der Hilfssatz XI.

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem schwierigeren Problem der H-Bedingung für die Normalableitung.

Hilfssatz XII. *Besitzt die Belegung $f(P)$ Tangentialableitungen, die ihrerseits eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ erfüllen, so genügen auch die Normalableitungen $\frac{\partial}{\partial n} W(Q)$ (auf der Fläche selbst)*

$$\frac{\partial W}{\partial n_Q}(Q) = \iint_S [f(P) - f(Q)] \frac{1}{r_{PQ}^3} [\cos(n_P, n_Q) - 3\cos(r_{PQ}, n_P)\cos(r_{PQ}, n_Q)] d\sigma$$

einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Hier wird nur der Fall einer geschlossenen Fläche behandelt.

Beweis. Betrachten wir auf der Fläche irgend zwei zueinander orthogonale Kurvenscharen. Es sei t_P die Richtung der einen Kurvenschar im Punkte P, s_P diejenige der anderen. Gehen wir vom Punkte Q_1 zum Punkte Q_2 über, so gelten, wie wir wissen, die Ungleichheiten

$$(68) \qquad \left.\begin{aligned} &|\cos(X, t_1) - \cos(X, t_2)| \\ &|\cos(Y, t_1) - \cos(Y, t_2)| \\ &|\cos(Z, t_1) - \cos(Z, t_2)| \end{aligned}\right\} \leqq A r_{12}^{\lambda},$$

sowie entsprechende Beziehungen für die s-Kurven.

Die Koordinaten des Punktes P im lokalen Koordinatensystem in Q_1 nennen wir x_1, y_1, z_1, die Koordinaten von P in dem zu Q_2 gehörigen System bezeichnen wir mit x_2, y_2, z_2.[26]) Dann ist

---

[25]) Siehe Formel (57) und (59).

[26]) Man sollte eigentlich schreiben: $x_1(P)$, $y_1(P)$, $z_1(P)$ bzw. $x_2(P)$, $y_2(P)$, $z_2(P)$. Allgemeiner bezeichnen wir mit $x(P)$, $y(P)$, $z(P)$ die Koordinaten des Punktes P in bezug auf das im Aufpunkte Q lokale Koordinatensystem.

$$f(P)-f(Q_1)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000}x_1+\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{000}y_1+k_1(P),^{27})$$

$$f(P)-f(Q_2)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{000}x_2+\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)_{000}y_2+k_2(P),$$

(69)

$$k_1(P)=O\left[(x_1^2+y_1^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}\right],$$

$$k_2(P)=O\left[(x_2^2+y_2^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}\right].$$

Wir führen jetzt in (67) für $f(P)-f(Q)$ den Ausdruck (69) ein. Dann zerfällt (67) in drei Summanden *I*, *II*, *III*.

(70) $$I(Q_1)-I(Q_2)=\iint_S\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000}x_1\frac{1}{r_{PQ_1}^3}[\cos(n_P,n_{Q_1})-3\cos(r_{PQ_1},n_{Q_1})\cos(r_{PQ_1},n_P$$

$$-\iint_S\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{000}x_2\frac{1}{r_{PQ_2}^3}[\cos(n_P,n_{Q_2})-3\cos(r_{PQ_2},n_{Q_2})\cos(r_{PQ_2},n_P$$

Die Ableitungen $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000}$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{000}$ können vor die Integralzeichen gesetzt werden. Da sie eine *H*-Bedingung mit dem Exponenten λ erfüllen, so genügt es, im folgenden die *H*-Bedingung nur für das Integral

$$I^*(Q)=\iint_S x(P)\frac{1}{r_{PQ}^3}[\cos(n_P,n_Q)-3\cos(r_{PQ},n_P)\cdot\cos(r_{PQ},n_Q)]\,d\sigma$$

zu beweisen.

(71) $$I^*(Q)=I_1^*+3I_2^*=\iint_S x\frac{\cos(n_P,n_Q)}{r_{PQ}^3}\,d\sigma-3\iint_S x\frac{\cos(r_{PQ},n_P)\cos(r_{PQ},n_Q}{r_{PQ}^3}$$

Wir beginnen mit der Abschätzung von $I_1^*(Q_1)-I_1^*(Q_2)$ [Formeln (72) bis (80)]. Zu diesem Zwecke beschreiben wir um Q_1 die feste lokale Kugel K_{ϱ_0} (vgl. die Einleitung), betrachten den innerhalb K_{ϱ_0} gelegenen Teil S_1 der Fläche und bezeichnen mit C seinen Rand. Nunmehr erhalten wir durch eine einfache Anwendung des Greenschen Satzes[27a])

(72) $$\iint_{S_1}x\frac{\cos(n_P,z)}{r_{PQ}^3}\,d\sigma=\iint_{S_1}\frac{z}{r_{PQ}^3}\cos(x,n_P)\,d\sigma\pm\int_C\frac{dy}{r_{PQ}},$$

das Integral $\int_C\frac{dy}{r_{PQ}}$ erstreckt über den Rand C des Flächenstückes S_1. Offen-

---

[27]) In (69) bezeichnet $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000}$ die Ableitung von f in der x_1-Richtung im Punkte Q_1, usw.

[27a]) In (72) sind x, y, z die Koordinaten des Punktes P (P ist die Integrationsvariable) in bezug auf das lokale Koordinatensystem in einem beliebigen Flächenpunkte Q, der sich genügend nahe an Q_1 befindet.

sichtlich erfüllt $\int_C \frac{dy}{r_{PQ}}$ die geforderte H-Bedingung, da wir uns (bei der Ableitung der H-Bedingung) nur mit solchen Punkten Q_1, Q_2 beschäftigen, deren Entfernung von C eine positive untere Schranke hat[28]).

Bleibt also nur noch das Integral $\iint_{S_1} \frac{z}{r^3}\cos(x, n_P)\,d\sigma$. Es gilt

$$(73)\qquad \iint_{S_1}\left[\frac{z_1}{r^3_{PQ_1}}\cos(x_1, n_P) - \frac{z_2}{r^3_{PQ_2}}\cos(x_2, n_P)\right]d\sigma = \iint_{s} + \iint_{S''},$$

$$(74)\qquad \left|\iint_{s}\right| \leqq A\iint_{s}\frac{r^{1+\lambda}_{PQ_1}}{r^3_{PQ_1}}\,d\sigma + A\iint_{s}\frac{r^{1+\lambda}_{PQ_2}}{r^3_{PQ_2}}\,d\sigma \leqq A r_{12}^{\lambda}.$$

Nach (73) ist weiter

$$(75)\qquad \left|\iint_{S''}\right| \leqq \left|\iint_{S''}\frac{z_1 - z_2}{r^3_{PQ_1}}\cos(x_1, n_P)\,d\sigma\right| + \left|\iint_{S''}\frac{z_2}{r^3_{PQ_1}}[\cos(x_1, n_P) - \cos(x_2, n_P)]\,d\sigma\right| + \left|\iint_{S''} z_2\cos(x_2, n_P)\left(\frac{1}{r^3_{PQ_1}} - \frac{1}{r^3_{PQ_2}}\right)d\sigma\right|,$$

ferner

$$(76)\qquad z_1 - z_2 = z_1[1 - \cos(z_1, z_2)] - y_1\cos(y_1, z_2) - x_1\cos(x_1, z_2) + d_1\cos(x_1, z_2) + d_2\cos(y_1, z_2) + d_3\cos(z_1, z_2),$$

wo d_1, d_2, d_3 die Koordinaten des Punktes Q_2 in bezug auf das im Punkte Q_1 lokale Koordinatensystem bedeuten. Somit gilt nach (76), (68), (2) und den geometrischen Hilfssätzen

$$(77)\qquad \left|\iint_{S''}\frac{z_1 - z_2}{r^3_{PQ_1}}\cos(x_1, n_P)\,d\sigma\right| \leqq \left|[1 - \cos(z_1, z_2)]\iint_{S''}\frac{z_1}{r^3_{PQ_1}}\cos(x_1, n_P)\,d\sigma\right| + \left|\cos(y_1, z_2)\iint_{S''}\frac{y_1}{r^3_{PQ_1}}\cos(x_1, n_P)\,d\sigma\right| + \ldots + |d_1\cos(x_1, z_2)|\left|\iint_{S''}\frac{\cos(x_1, n_P)}{r^3_{PQ_1}}\,d\sigma\right| + |d_2\cos(y_1, z_2)|\left|\iint_{S''}\frac{\cos(x_1, n_P)}{r^3_{PQ_1}}\,d\sigma\right| + \ldots \leqq K A r_{12}^{\lambda}\ ^{29}).$$

---

[28]) Alle Abschätzungen gelten gleichmäßig auf der ganzen Fläche S, da diese geschlossen ist.

Es ist $S'' = S$. $K_{\varrho_0} - s = S_1 - s$.

[29]) Es ist

$$|1 - \cos(z_1, z_2)| \leqq A r_{12}^{\lambda};\quad |\cos(x_1, z_2)| \leqq A r_{12}^{\lambda};\quad |\cos(y_1, z_2)| \leqq A r_{12}^{\lambda},$$

$$\left|\iint_{S''}\frac{z_1}{r^3_{PQ_1}}\cos(x_1, n_P)\,d\sigma\right| \leqq \text{konst.};\quad \left|\iint_{S''}\frac{y_1}{r^3_{PQ_1}}\cos(x_1, n_P)\,d\sigma\right| \leqq \text{konst.},$$

$$\left|\iint_{S''}\frac{\cos(x_1, n_P)}{r^3_{PQ_1}}\,d\sigma\right| \leqq \frac{K}{r_{12}^{1-\lambda}};\quad d_1 \leqq r_{12};\ d_2 \leqq r_{12};\ d_3 \leqq r_{12};\ \text{usw.}$$

Jetzt schätzen wir das Integral $\iint\limits_{S''} \frac{z_2}{r^3_{PQ_1}} [\cos(x_1, n_P) - \cos(x_2, n_P)]\, d\sigma$ ab (vgl. (68), (7), (75) usw.). Wir finden

$$(78)\quad \left| \iint\limits_{S''} \frac{z_2}{r^3_{PQ_1}} [\cos(x_1, n_P) - \cos(x_2, n_P)]\, d\sigma \right| \leqq A \iint\limits_{S''} \frac{r^{\lambda+1}_{PQ_2}}{r^3_{PQ_1}} r^{\lambda}_{12}\, d\sigma \leqq K A r^{\lambda}_{12}$$

endlich

$$(79)\quad \left| \iint\limits_{S''} z_2 \cos(x_2, n_P) \left(\frac{1}{r^3_{PQ_1}} - \frac{1}{r^3_{PQ_2}} \right) d\sigma \right| \leqq 4 A r_{12} \iint\limits_{S''} \frac{r_{PQ_1} r^{\lambda}_{PQ_2}}{r^4_{PQ_1}}\, d\sigma \leqq K A r^{\lambda}_{12}$$

Die Formeln (72), (73), (74), (75), (77), (78) und (79) ergeben

$$(80)\quad \left| \iint\limits_{S} \frac{x_1 \cos(n_P, n_{Q_1})}{r^3_{PQ_1}} - \frac{x_2 \cos(n_P, n_{Q_2})}{r^3_{PQ_2}}\, d\sigma \right| \leqq K A r^{\lambda}_{12}.$$

Weiter ist

$$(81)\quad \iint\limits_{S} \left[x_1 \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P) \cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r^3_{PQ_1}} - x_2 \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P) \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r^3_{PQ_2}} \right] d\sigma = \iint\limits_{s} +$$

$$(82)\quad \left| \iint\limits_{s} \right| \leqq K A r^{\lambda}_{12},$$

$$(83)\quad \iint\limits_{S''} = \iint\limits_{S''} (x_1 - x_2) \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P) \cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r^3_{PQ_1}}\, d\sigma$$

$$+ \iint\limits_{S''} x_2 \left[\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P) \cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r^3_{PQ_1}} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P) \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r^3_{PQ_2}} \right] d\sigma = A +$$

Es ist nun

$$(84)\quad x_1 - x_2 = x_1 [1 - \cos(x_1, x_2)] - y_1 \cos(y_1, x_2) - z_1 \cos(z_1, x_2)$$
$$+ d_1 \cos(x_1, x_2) + d_2 \cos(y_1, x_2) + d_3 \cos(z_1, x_2)$$

Aus (83) und (84) folgt:

$$(85')\quad A = [1 - \cos(x_1, x_2)] \iint\limits_{S''} x_1 \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P) \cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r^3_{PQ_1}}\, d\sigma + \cos(y_1, x_2) \iint\limits_{S''} +$$

Wegen (85'), (68) [30]) ist den geometrischen Hilfssätzen zufolge

$$(85)\quad |A| \leqq K A r^{\lambda}_{12}.$$

Weiter ist (Hilfssatz IV_1, IV_2)

$$(86)\quad |B| \leqq K A \left\{ r_{12} \iint\limits_{S''} \frac{r_{PQ_1} r^{\lambda}_{PQ_1}}{r^{4-\lambda}_{PQ_1}}\, d\sigma + r^{\lambda}_{12} \iint\limits_{S''} \frac{r_{PQ_1} r^{\lambda}_{PQ_1}}{r^3_{PQ_1}}\, d\sigma \leqq K A r^{\lambda}_{12}. \right.$$

---

[30]) $|1 - \cos(x_1, x_2)| \leqq A r^{\lambda}_{12}$, usw.

Aus (82), (83), (85) und (86) folgt

$$(87)\quad \left|\iint_S \left[x_1 \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_P)\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r^3_{PQ_1}} - x_2 \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_P)\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r^3_{PQ_2}}\right] d\sigma\right| \leqq K A r_{12}^{\lambda}$$

und endlich wegen (80) und (87)

$$(88)\quad \left|\iint_S \left\{x_1 \frac{1}{r^3_{PQ_1}}[\cos(n_P, n_{Q_1}) - 3\cos(r_{PQ_1}, n_P)\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})]\right.\right.$$
$$\left.\left. - x_2 \frac{1}{r^3_{PQ_2}}[\cos(n_P, n_{Q_2}) - 3\cos(r_{PQ_2}, n_P)\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})]\right\} d\sigma\right| \leqq K A r_{12}^{\lambda}.$$

Es bleibt also noch das Integral (siehe Formel (69))

$$\iint_S k(P) \frac{1}{r^3_{PQ}}[\cos(n_P, n_Q) - 3\cos(r_{PQ}, n_P)\cos(r_{PQ}, n_Q)]\, d\sigma$$

übrig. Nun ist

$$(89)\quad \iint_S \left\{k_1(P) \frac{1}{r^3_{PQ_1}}[\cos(n_P, n_{Q_1}) - 3\cos(r_{PQ_1}, n_P)\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})]\right.$$
$$\left. - k_2(P) \frac{1}{r^3_{PQ_2}}[\cos(n_P, n_{Q_2}) - 3\cos(r_{PQ_2}, n_P)\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})]\right\} d\sigma = \iint_s + \iint_{S''}.$$

Wegen $(69)_{3,4}$ ist

$$(90)\quad \left|\iint_s\right| \leqq K A \left\{\iint_s \frac{r^{1+\lambda}_{PQ_1}}{r^3_{PQ_1}} d\sigma + \iint_s \frac{r^{1+\lambda}_{PQ_2}}{r^3_{PQ_2}} d\sigma\right\} \leqq K A r_{12}^{\lambda},$$

$$(91)\quad \iint_{S''} = \iint_{S''} [k_1(P) - k_2(P)] \frac{1}{r^3_{PQ_1}}[\cos(n_P, n_{Q_1}) - 3\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})\cos(r_{PQ_1}, n_P)]\, d\sigma$$
$$+ \iint_{S''} k_2(P)\left\{\frac{1}{r^3_{PQ_1}}[\cos(n_P, n_{Q_1}) - 3\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})\cos(r_{PQ_1}, n_P)]\right.$$
$$\left. - \frac{1}{r^3_{PQ_2}}[\cos(n_P, n_{Q_2}) - 3\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})\cos(r_{PQ_2}, n_P)]\right\} d\sigma = C + D.$$

Um eine Abschätzung für C zu bekommen, gehen wir von der Beziehung

$$k_1(P) - k_2(P) = f(Q_2) - f(Q_1) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} x_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{000} y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{000} x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)_{000} y_2$$

aus. Bezeichnen wir mit d_1, d_2, d_3 die Koordinaten von Q_2 in bezug auf das lokale Koordinatensystem in Q_1, so gilt weiter

$$k_1(P) - k_2(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} d_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{000} d_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} x_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{000} y_1$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{000} x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)_{000} y_2 + h_1 \quad [31])$$

[31]) h_1 ist eine Konstante, die vor das Integralzeichen gebracht werden kann; dieselbe Bemerkung bezieht sich auf die später zu definierenden Größen h_2, h_3. Dabei ist $|h_2| \leqq C r_{12}^{\lambda}$, $|h_3| \leqq C r_{12}^{\lambda}$.

mit

$$|h_1| \leqq K A r_{12}^{1+\lambda}.$$ [81])

Da nun

$$x_2 = (x_1 - d_1)\cos(x_1, x_2) + (y_1 - d_2)\cos(y_1, x_2) + (z_1 - d_3)\cos(z_1, x_2),$$
$$y_2 = (x_1 - d_1)\cos(x_1, y_2) + (y_1 - d_2)\cos(y_1, y_2) + (z_1 - d_3)\cos(z_1, y_2)$$

ist, so schließen wir weiter, indem wir

$$h_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{000} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000}, \qquad h_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)_{000} - \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{000}$$

setzen [81])

$$(92) \quad k_1 - k_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} d_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{000} d_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} x_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{000} y_1$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{000} y_2 + h_2 x_2 + h_3 y_2 + h_1$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} d_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{000} d_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} x_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)_{000} y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} x_1 \cos(x_1, x_2)$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} y_1 \cos(y_1, x_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} z_1 \cos(z_1, x_2) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} d_1 \cos(x_1, x_2)$$
$$- \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} d_2 \cos(y_1, x_2) \quad - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} d_3 \cos(z_1, x_2) + \ldots$$
$$+ h_1 + h_2 x_1 \cos(x_1, x_2) - h_2 d_1 \cos(x_1, x_2) + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} d_1 [1 - \cos(x_1, x_2)] - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} d_2 \cos(y_1, x_2) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} d_3 \cos(z_1, x_2)$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} x_1 [\cos(x_1, x_2) - 1] + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} y_1 \cos(y_1, x_2)$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} z_1 \cos(x_1, x_3) + \ldots + h_2 x_2 + h_3 y_2 + \ldots .$$

Jetzt können wir C [82]) abschätzen.

$$(93) \quad C = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} d_1 [1 - \cos(x_1, x_2)] \iint_{S''} \frac{1}{r_{PQ_1}^3} [\cos(n_P, n_{Q_1}) - 3\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})\cos(r_{PQ_1}, n$$
$$- \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} d_2 \cos(y_1, x_2) \iint_{S''} \frac{1}{r_{PQ_1}^3} [\cos(n_P, n_{Q_1}) - 3\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})\cos(r_{PQ_1}, n_P)]\, d\sigma -$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{000} [\cos(x_1, x_2) - 1] \iint_{S''} \frac{x_1}{r_{PQ_1}^3} [\cos(n_P, n_{Q_1}) - 3\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})\cos(r_{PQ_1}, n_P)]\, d\sigma +$$

Wie man sich leicht überzeugt, kommen in dieser Formel Integrale von der Form

[82]) Vgl. die Formel (91).

$$(94)\qquad \iint_{S''} \varphi \frac{1}{r_{PQ_1}^3}\left[\cos(n_P, n_{Q_1}) - 3\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_1})\cos(r_{PQ_1}, n_P)\right] d\sigma$$

$$(\varphi = x_1,\ y_1 \text{ oder } z_1),$$

oder der Form

$$(95)\qquad \iint_{S''} \frac{1}{r_{PQ_1}^3}\left[\cos(n_{P_1}, n_{Q_1}) - 3\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})\cos(r_{PQ_1}, n_P)\right] d\sigma$$

vor. Die Integrale der Form (94) sind beschränkt, das Integral (95) ist

$$(95)^*\qquad \leqq KA\frac{1}{r_{12}}.$$

Vor den Integralen der Form (94) stehen als Faktoren Ausdrücke, welche absolut kleiner als KAr_{12}^{λ} sind, vor dem Integral (95) steht ein Ausdruck, der sich absolut kleiner als $KAr_{12}^{\lambda+1}$ erweist. Berücksichtigt man dies alles, so gelangt man wegen (93), (94), (95) und (95)* zu der Abschätzung

$$(96)\qquad |C| \leqq KAr_{12}^{\lambda}.$$

Ziehen wir die Formel $(69)_{3,4}$, sowie die Hilfssätze IV_1, IV_2 heran, so finden wir[32])

$$(97)\qquad |D| \leqq KAr_{12}^{\lambda}.$$

Somit nach (91), (96) und (97)

$$(98)\qquad \left|\iint_{S''}\left\{k_1(P)\frac{1}{r_{PQ_1}^3}\left[\cos(n_P, n_{Q_1}) - 3\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})\cos(r_{PQ_1}, n_P)\right]\right.\right.$$

$$\left.\left. - k_2(P)\frac{1}{r_{PQ_2}^3}\left[\cos(n_P, n_{Q_2}) - 3\cos(r_{PQ_2}, n_P)\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})\right]\right\} d\sigma\right| \leqq KAr_{12}^{\lambda},$$

und endlich nach (67), (88), (98) und (69)

$$(99)\qquad \left|\iint_S [f(P) - f(Q_1)]\left\{\frac{1}{r_{PQ_1}^3}\left[\cos(n_P, n_{Q_1}) - 3\cos(r_{PQ_1}, n_P)\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})\right]\right.\right.$$

$$\left.\left. - \iint_S [f(P) - f(Q_2)]\frac{1}{r_{PQ_2}^3}\left[\cos(n_P, n_{Q_2}) - 3\cos(\ _{PQ_2}, n_P)\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})\right]\right\} d\sigma\right|$$

$$\leqq KAr_{12}^{\lambda}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

§ 4.

Das Verhalten des Potentials der Doppelbelegung bei der Annäherung an den Rand.

Hilfssatz XIII. *Sei M ein beliebiger Punkt. Dann ist*

$$\iint_S \left|\frac{\cos(r_{PM}, n_P)}{r_{PM}^2}\right| d\sigma \leqq K \qquad (K \text{ konstant}).$$

Beweis. Es genügt, M auf der Normale zu S in P anzunehmen. Nach Hilfssatz I ist

$$\frac{1}{r_{PM}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left(\frac{1}{x^2+y^2+h^2}\right)^{\frac{1-\lambda}{2}},$$

$$\frac{1}{r_{PM}^2} = \frac{1}{x^2+y^2+h^2} + O\left(\frac{1}{x^2+y^2+h^2}\right)^{\frac{2-\lambda}{2}},$$

$$\cos(r_{PM}, n_P) = \frac{-h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}},$$

also

$$\left|\frac{\cos(r_{PM}, n_P)}{r_{PM}^2}\right| = \frac{h}{(\sqrt{x^2+y^2+h^2})^3} + O\left(\frac{h}{x^2+y^2+h^2}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} + O\left(\frac{1}{x^2+y^2+h^2}\right)^{\frac{2-\lambda}{2}},$$

$$(100)\quad \iint_S \left|\frac{\cos(r_{PM}, n_P)}{r_{PM}^2}\right| d\sigma \leqq h\iint_S \frac{d\sigma}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + O\left[\iint_S \frac{d\sigma}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{2-\lambda}{2}}}\right]$$

$$\leqq Ah\iint_S \frac{\varrho\, d\varrho}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + O\left[\iint_S \frac{\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+h^2)^{\frac{2-\lambda}{2}}}\right]$$

und der Ausdruck rechts ist beschränkt. Bei der Abschätzung des Integrals (100) genügt es natürlich, sich auf ein lokales Flächenstück von festen Durchmesser ϱ_0 zu beschränken, w. z. b. w.

Durch Anwendung der Hilfssätze XIII und VI erhalten wir für das Potential der Doppelbelegung die bekannten Formeln:

$$W_{\text{inn}} - W_{\text{äuß}} = 4\pi f(Q)\ ^{33}),$$

$$W_{\text{inn}} + W_{\text{äuß}} = 2\iint_S f(P)\frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2}\, d\sigma.$$

Daraus folgen, wie man weiß, die Fredholmschen Integralgleichungen für das erste Randwertproblem.

Hilfssatz XIV. *Besitzt die Belegung $f(P)$ partielle Ableitungen, die ihrerseits einer Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ genüge und strebt M längs der Normalen gegen Q, so gilt für das im Punkte lokale Koordinatensystem*

$$\lim_{M\to Q}\frac{\partial W}{\partial x}(M) = \iint_S [f(P)-f(Q)]\frac{1}{r_{PQ}^3}[\cos(n_P, x) - 3\cos(r_{PQ}, x)\cos(r_{PQ}, n_P$$

$$+ 2\pi\frac{\partial}{\partial x}f(Q).$$

---

[33]) W_{inn} bzw. $W_{\text{äuß}}$ sind die Grenzwerte des Potentials $W(M)$, wenn der Punkt sich der Fläche von innen bzw. von außen nähert.

Beweis. Wieder genügt es, sich auf ein Flächenstück S vom Durchmesser ϱ_0 zu beschränken. Wir teilen nun S in ein kleines Flächenstück s um Q mit dem Durchmesser ε und in den Rest $S-s$ ein.

$$\lim_{M\to Q}\iint_{S-s}[f(P)-f(Q)]\frac{1}{r_{PM}^3}[\cos(n_P,x)-3\cos(r_{PM},x)\cos(r_{PM},n_P)]\,d\sigma$$

$$=\iint_{S-s}[f(P)-f(Q)]\frac{1}{r_{PQ}^3}[\cos(n_P,x)-3\cos(r_{PQ},x)\cos(r_{PQ},n_P)]\,d\sigma,$$

102) $$\iint_{s}[f(P)-f(Q)]\frac{1}{r_{PM}^3}[\cos(n_P,x)-3\cos(r_{PM},x)\cos(r_{PM},n_P)]\,d\sigma$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{000}\iint_s x\frac{1}{r_{PM}^3}[\cos(n_P,x)-3\cos(r_{PM},x)\cos(r_{PM},n_P)]\,d\sigma$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{000}\iint_s y\frac{1}{r_{PM}^3}[\cos(n_P,x)-3\cos(r_{PM},x)\cos(r_{PM},n_P)]\,d\sigma$$

$$+\iint_s O(x^2+y^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}\frac{1}{r_{PM}^3}[\cos(n_P,x)-3\cos(r_{PM},x)\cos(r_{PM},n_P)]\,d\sigma$$

$$=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}.$$

Dem Hilfssatz I zufolge ist[84])

103) $$\boldsymbol{A}=3h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{000}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\varepsilon}\frac{\varrho^3}{(\varrho^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}d\varrho+O\left[\iint_s\frac{x}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}d\sigma\right]$$

$$=3h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{000}\pi\left(\frac{1}{3}\frac{h^2}{(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+h^2}}+\frac{2}{3}\frac{1}{h}\right)+O(\varepsilon^\lambda).$$

Wir halten jetzt ε fest, lassen h gegen Null konvergieren und erhalten

104) $$\lim_{M\to Q}\boldsymbol{A}=2\pi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{000}+O(\varepsilon^\lambda),$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{000}\iint_s\frac{yx}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}d\sigma+O\left[\iint_s\frac{y\,d\sigma}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]=O\left[\iint_s\frac{y\,d\sigma}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right],$$

---

[84]) $$\boldsymbol{A}=3\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{000}\iint_s x\frac{h}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{x}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma+O\left[\iint_s\frac{x}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}d\sigma\right].$$

d. h.

$$\lim_{M \to Q} \boldsymbol{B} = O(\varepsilon^{\lambda}), \tag{106}$$

$$|\boldsymbol{C}| \leqq \iint_{\varepsilon} O\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{\frac{2-\lambda}{2}} d\sigma, \tag{107}$$

$$\lim_{M \to Q} \boldsymbol{C} = O(\varepsilon^{\lambda}). \tag{108}$$

Durch Zusammenfassung der Formeln (104), (106), (108), (101 und den darauf folgenden Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhalten wir die gesuchte Formel.

Hilfssatz XV. *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes* XIV *konvergiert die Normalableitung stetig gegen ihren Grenzwert*

$$\lim_{M \to Q} \iint_{S} [f(P) - f(Q)] \frac{1}{r_{PM}^3} [\cos(n_P, n_Q) - 3\cos(r_{PM}, n_P)\cos(r_{PM}, n_Q)]\, d\sigma$$

$$= \iint_{S} [f(P) - f(Q)] \frac{1}{r_{PQ}^3} [\cos(n_P, n_Q) - 3\cos(r_{PQ}, n_Q)\cos(r_{PQ}, n_P)]\, d\sigma$$

Beweis. Wir setzen wie früher $S = s + (S - s)$,

$$\lim_{M \to Q} \iint_{S-s} = \iint_{S-s} [f(P) - f(Q)] \frac{1}{r_{PQ}^3} [\cos(n_P, n_Q) - 3\cos(r_{PQ}, n_P)\cos(r_{PQ}, n \tag{109}$$

$$\iint_{s} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{000} \iint_{s} \frac{x}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{000} h^2 \iint_{s} \frac{3x}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} d\sigma + \ldots \tag{110}$$

$$+ O\left[\iint_{s} \frac{1}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{2-\lambda}{2}}} d\sigma\right].$$

Nun verschwinden die Integrale

$$\iint_{s} \frac{x}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma, \qquad h^2 \iint_{s} \frac{x}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} d\sigma \text{ usw.}^{35}),$$

wie man sich durch Einführung von Polarkoordinaten leicht überzeugt Also ist

$$\lim_{M \to Q} \iint_{s} = O(\varepsilon^{\lambda}). \tag{111}$$

---

35) Genauer: Sie sind der Form $O(\varepsilon^{\lambda})$. Es ist z. B.

$$\iint_{s} \frac{x}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma = \iint_{s} \frac{x}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} dx\, dy + O(\varepsilon^{\lambda}) \text{ und } \iint_{s} \frac{x}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} dx\, dy$$

Durch Zusammenfassung der Formeln (109) und (111) erhält man

$$\lim_{M\to Q}\iint_S [f(P)-f(Q)]\frac{1}{r_{PM}^3}[\cos(n_P,n_Q)-3\cos(r_{PM},n_P)\cos(r_{PM},n_Q)]\,d\sigma$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S-\varepsilon}[f(P)-f(Q)]\frac{1}{r_{PQ}^3}[\cos(n_P,n_Q)-3\cos(r_{PQ},n_P)\cos(r_{PQ},n_Q)]\,d\sigma$$

$$=\iint_S [f(P)-f(Q)]\frac{1}{r_{PQ}^3}[\cos(n_P,n_Q)-3\cos(r_{PQ},n_P)\cos(r_{PQ},n_Q)]\,d\sigma.$$

Bemerkung zu den Hilfssätzen XIV und XV. *Der Grenzübergang ist gleichmäßig. Natürlich sind auch die Grenzwerte* $\frac{\partial W}{\partial X}, \frac{\partial W}{\partial Z}, \frac{\partial W}{\partial Y}$ [36]) *vorhanden. Die entsprechenden Formeln können ohne weiteres aufgeschrieben werden.*

§ 5.

Hauptsätze.

Satz I. *Genügt die Belegung* $f(P)$ *einer H-Bedingung mit dem Exponenten* μ, *so genügt das Potential der Doppelschicht* $W(M)$ *im Innern des von* S *begrenzten Gebietes* T *und auf seinem Rande, kürzer in* $T+S$ [37]), *einer H-Bedingung mit dem gleichen Exponenten* μ.

Beweis. Es seien M_1, M_2 zwei beliebige im Gebiete T liegende Punkte, deren Enfernung r_{12} die Zahl $\frac{\varrho_0}{2}$ nicht übersteigt und die von der Fläche um weniger als $\frac{\varrho_0}{4}$ entfernt sind. Wir bezeichnen wieder mit

a) s den innerhalb K_{12} gelegenen Teil der Fläche, der sich auch auf eine Nullmenge reduzieren kann,

b) $S'=S-s$ den außerhalb der Kugel K_{12} gelegenen Teil der Fläche.

Es sei weiter Q_0 derjenige Punkt der Fläche, der M_1 am nächsten gelegen ist. Dann gilt

$$W(M_1)-W(M_2)=\iint_S [f(P)-f(Q_0)]\left[\frac{\cos(r_{PM_1},n_P)}{r_{PM_1}^3}-\frac{\cos(r_{PM_2},n_P)}{r_{PM_2}^3}\right]d\sigma=\iint_s+\iint_{S-s}.$$

---

[36]) $\frac{\partial W}{\partial X}, \frac{\partial W}{\partial Y}, \frac{\partial W}{\partial Z}$ sind Ableitungen in dem festen Koordinatensystem.

[37]) Die Bezeichnung stammt von Herrn Lichtenstein. Es ist wohl zu beachten, daß der Wert, den $W(M)$ jetzt annimmt, wenn M gegen einen Punkt Q auf S konvergiert, von dem Werte $W(Q)$, von dem in dem Hilfssatz VIII die Rede war, *verschieden* ist.

Es ist nun für P auf s

$$(114)_1 \qquad r_{PQ_0} < 3r_{12},$$

also

$$(114)_2 \qquad |f(P)-f(Q_0)| \leqq 3Cr_{12}^{\mu},$$

somit nach Hilfssatz XIII

$$(115) \qquad \left| \iint\limits_s [f(P)-f(Q_0)] \left[\frac{\cos(r_{PM_1}, n_P)}{r_{PM_1}^2} - \frac{\cos(r_{PM_2}, n_P)}{r_{PM_2}^2} \right] d\sigma \right| \leqq KCr_{12}^{\lambda}.$$

Außerhalb K_{12} ist weiter (Hilfssatz III)

$$(116) \qquad \left| \frac{\cos(r_{PM_1}, n_P)}{r_{PM_1}^2} - \frac{\cos(r_{PM_2}, n_P)}{r_{PM_2}^2} \right| \leqq 4 \frac{r_{12}}{r_{PM_1}^3}.$$

Wir beschreiben jetzt um Q_0 eine feste Kugel vom Radius ϱ_0 und bezeichnen sie mit K_{ϱ_0}. Da wir uns auf solche Punkte M beschränkt haben, die voneinander um weniger als $\frac{\varrho_0}{2}$, von der Fläche um weniger als $\frac{\varrho_0}{4}$ entfernt sind, so gilt außerhalb K_{ϱ_0}

$$(117) \qquad r_{PM_1} \geqq r_{PQ_0} - r_{Q_0M_1} \geqq \frac{\varrho_0}{2} - \frac{\varrho_0}{4} = \frac{\varrho_0}{4},$$ [38])

woraus wegen (116) die H-Bedingung für den über $S - S \cdot K_{\varrho_0}$ erstreckten Teils des Integrals folgt. Wir beschreiben weiter um Q_0 eine kleine lokale Kugel R_{12} vom Radius r_{12}. $M_1 Q^0$ ist augenscheinlich die Normale zu der Fläche im Punkte Q_0. Benutzen wir also das im Punkte Q_0 lokale Koordinatensystem, so gelten nach den Hilfssätzen I, II die Abschätzungen

$$(118) \qquad r_{PQ_0} \leqq KA(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}, \qquad r_{PM_1} \geqq (x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Sei σ der innerhalb der kleinen lokalen Kugel R_{12} liegende Teil der Fläche. Es ist (Hilfssatz XIII)

$$(119) \qquad \left| \iint\limits_{\sigma} [f(P)-f(Q_0)] \left[\frac{\cos(r_{PM_1}, n_P)}{r_{PM_1}^2} - \frac{\cos(r_{PM_2}, n_P)}{r_{PM_2}^2} \right] d\sigma \right|$$

$$\leqq KCr_{12}^{\mu} \left\{ \iint\limits_{\sigma} \left| \frac{\cos(r_{PM_1}, n_P)}{r_{PM_1}^2} \right| d\sigma + \iint\limits_{\sigma} \left| \frac{\cos(r_{PM_2}, n_P)}{r_{PM_2}^2} \right| \right\} d\sigma \leqq KCr_{12}^{\mu}.$$

Es bleibt nur noch das Integral $\iint\limits_{S \cdot K_{\varrho_0} - \sigma}$ abzuschätzen.

---

[38]) Wir erinnern an die Bedeutung des Punktes Q_0.

Wegen (118), (116) ist

$$(120)\qquad \left|\iint\limits_{S\cdot K_{Q_0}-\sigma}\right| \leqq KCr_{12}\iint\limits_{S\cdot K_{Q_0}-\sigma}\frac{r_{PQ_0}^{\mu}}{r_{PM_1}^{2}}d\sigma$$

$$\leqq KCr_{12}\iint\limits_{S\cdot K_{Q_0}-\sigma}\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{2-\mu}{2}}}d\sigma \leqq KCr_{12}^{\mu}.$$

Aus (115), (119), (120) folgt

$$|W(M_1)-W(M_2)| \leqq KCr_{12}^{\mu}.$$

Wir sind jetzt in der Lage, einige Sätze über die Lösung des ersten Randwertproblems der Potentialtheorie in $T+S$ zu beweisen. Bekanntlich läßt sich diese in $T+S$ als das Potential einer auf S ausgebreiteten Doppelschicht darstellen. Zwischen dem vorgegebenen Randwert $z(Q)$ und der Dichte $f(Q)$ der Doppelschicht besteht die Integralgleichung

$$(121)\qquad z(Q)=2\pi f(Q)+\iint\limits_S f(P)\frac{\cos(r_{PQ},n_P)}{r_{PQ}^2}d\sigma.$$

Hilfssatz XVI. *Wenn die Randwerte $z(Q)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen, so erfüllt auch die nach Gleichung* (121) *entsprechende Belegung $f(Q)$ einer H-Bedingung mit demselben Exponenten.*

Beweis. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir annehmen, daß kein Vielfaches des Flächenexponentes λ gleich 1 ist. Die Gleichung (121) besitzt eine stetige Lösung, wenn $z(P)$ stetig ist[39]). Nach Hilfssatz VII genügt also das Integral

$$(122)\qquad \iint\limits_S f(P)\frac{\cos(r_{PQ},n_P)}{r_{PQ}^2}d\sigma$$

einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Aus (121) folgt also, daß $f(Q)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mathrm{Min}(\lambda,\mu)$ genügt. Ist $\mu \leqq \lambda$, so ist der Hilfssatz bewiesen. Ist aber $\mu > \lambda$, so folgt nur, daß $f(P)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügt. Dann genügt aber nach Hilfssatz VIII

$$(122)\qquad \iint\limits_S f(P)\frac{\cos(r_{PQ},n_P)}{r_{PQ}^2}d\sigma$$

---

[39]) Die Integralgleichung (121) mit dem Kerne $K(P,Q)=\frac{\cos(r_{PQ},n_P)}{r_{PQ}^2}$, der für $P=Q$ wie $\frac{1}{r_{PQ}^{2-\lambda}}$ unendlich wird, ist immer eindeutig lösbar. Von dieser Tatsache überzeugt man sich leicht durch Übergang zu den iterierten Kernen.

In einer demnächst erscheinenden Arbeit werde ich zeigen, wie solche Integralgleichungen direkt ohne Übergang zu den iterierten Kernen gelöst werden können. Diese Arbeit wird unter dem Titel „Über vollstetige Funktionaloperationen" in den Studia Mathematica (Lwów) Band II erscheinen.

einer H-Bedingung mit dem Exponenten

α) 2λ, falls $2\lambda < 1$,

β) einer Lipschitzschen Bedingung, falls $2\lambda > 1$,

γ) einer Bedingung von der Form $r_{12}|\log r_{12}|$, falls $2\lambda = 1$.

Fall γ) wurde ausgeschlossen[40]). In den Fällen α) und β) folgt aus (121) für $f(Q)$ eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ, wenn $\mu \leqq 2\lambda$, im Falle $\mu > 2\lambda$ nur eine solche mit dem Exponenten 2λ. Wir müssen dann einen Schritt weiter gehen und es ist klar, wie man die Induktion anzuwenden hat. Nach einer Anzahl n von Schritten muß sie uns zum Ziele führen, spätestens dann, wenn $n\lambda > 1$ wird.

Satz II. *Genügen die Randwerte $z(P)$ einer Potentialfunktion $z(M$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ, so gilt die gleiche H-Bedingung auch in $T+S$* [41]).

Beweis. Jede Potentialfunktion $z(M)$ läßt sich als Potential einer Doppelschicht darstellen. Nach Hilfssatz XVI erfüllt die entsprechende Belegung $f(P)$ eine H-Bedingung mit demselben Exponenten μ. Nach Satz I erfüllt das Potential der Doppelschicht — d. h. unsere Potentialfunktion — auch im Innern die verlangte H-Bedingung.

Satz III. *Besitzt die Belegung $f(P)$ Tangentialableitungen, die ihrerseits einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu \leqq \lambda$ genügen, so erfüllen die Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial X}, \frac{\partial W}{\partial Y}, \frac{\partial W}{\partial Z}$ des Potentials der Doppelschicht in $T+S$ einer H-Bedingung mit demselben Exponenten μ.*[42])

Beweis. Aus den Hilfssätzen XIV, XV folgt, daß $\frac{\partial W}{\partial X}, \frac{\partial W}{\partial Y}, \frac{\partial W}{\partial Z}$[43]) in $T+S$ stetig sind. Aus den Hilfssätzen XI, XII schließen wir weiter, daß ihre Randwerte einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen, falls $\mu \leqq \lambda$. Jede der Funktionen $\frac{\partial W}{\partial X}, \frac{\partial W}{\partial Y}, \frac{\partial W}{\partial Z}$ ist also eine Potentialfunktion, deren Randwerte einer H-Bedingung mit demselben Exponenten $\mu \leqq \lambda$ genügen. Nach Satz II ist also diese H-Bedingung in $T+S$ erfüllt[44]).

Hilfssatz XVII. *Wenn die Randwerte $z(P)$ einer Potentialfunktion $z(M$ Tangentialableitungen besitzen, die ihrerseits einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu \leqq \lambda$ genügen, so besitzt die nach* (121) *entsprechende Belegung $f(P)$ Tangentialableitungen, die der gleichen H-Bedingung genügen*

---

[40]) Wegen $n\lambda \neq 1$.

[41]) Die Punkte M_1 und M_2 dürfen aus dem *abgeschlossenen* Gebiete (dem Bereiche $T+S$ ganz willkürlich herausgegriffen werden. Es kann also M_1 auf der Fläche und M_2 im Innern der Fläche liegen.

[42]) Vgl. [37]).

[43]) Vgl. die Bemerkung zu diesen Hilfssätzen, S. 631.

[44]) Während Satz I für Funktionenexponente μ gilt, die vom Flächenexponenten unabhängig sind, gilt Satz III nur für $\mu \leqq \lambda$; auf jeden Fall also für $\mu = \lambda$.

Beweis[45]). Da $z(P)$ Tangentialableitungen besitzt, so genügt $z(P)$ einer Hölderschen Bedingung mit beliebigen $\mu_0 < 1$. Nach Hilfssatz XVI genügt dann auch die Belegung $f(P)$ einer H-Bedingung mit ganz willkürlichen μ_0. Wir können speziell μ_0 so wählen, daß $\mu_0 + \lambda > 1$. Nach Hilfssatz IX sind also die Tangentialableitungen des Integrals

$$\iint_S f(P) \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2} d\sigma$$

vorhanden. Aus (121) folgern wir, daß auch $f(P)$ selbst Tangentialableitungen besitzt. Da $\mu_0 + \lambda > 1$, so besitzt nach Hilfssatz X das Integral

$$\iint_S f(P) \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2} d\sigma$$

Tangentialableitungen, die selbst einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\lambda + \mu_0 - 1$ genügen. Wegen (121) genügen also die Tangentialableitungen von $f(P)$ selbst einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\varepsilon = \text{Min}(\mu, \lambda + \mu_0 - 1)$. Nach Hilfssatz XI genügen also die Tangentialableitungen des Integrals (122) der H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Indem wir wieder einmal (121) zur Hilfe nehmen, überzeugen wir uns, daß die Tangentialableitungen von $f(P)$ selbst einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu = \text{Min}(\mu, \lambda)$ genügen.

Satz IV. *Wenn die Randwerte $z(P)$ der Potentialfunktion $z(M)$ Tangentialableitungen besitzen, die ihrerseits den H-Bedingungen mit dem Exponenten $\mu \leqq \lambda$ genügen, so ist dieselbe H-Bedingung (mit dem Exponenten $\mu \leqq \lambda$) in $T + S$*[41]) *auch für die Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial Y}, \frac{\partial z}{\partial Z}$ erfüllt.*

Dies folgt unmittelbar aus dem vorangehenden Hilfssatze XVII und dem Satz III.

(Eingegangen am 18. Juni 1930.)

Nachtrag bei der Korrektur.

Der Vollständigkeit halber bringe ich in diesem Nachtrag (obwohl dies ursprünglich nicht in meiner Absicht lag) die Behandlung der ersten Ableitungen für das Potential der einfachen Schicht

$$V(M) = \iint_S \frac{\varphi(P)}{r_{MP}} d\sigma$$

mit vorgegebener Belegung $\varphi(P)$.[46])

[45]) Es ist vielleicht vorteilhafter, den Beweis für $\mu = \lambda$ zu führen. Denn der Fall $\mu < \lambda$ läßt sich auf den vorerwähnten zurückführen. Genügt nämlich die Fläche der H-Bedingung mit dem Exponenten λ, so genügt sie jeder Bedingung mit einem kleineren Exponenten. Man darf also immer $\mu = \lambda$ voraussetzen.

[46]) Man vergleiche hierzu die in der Fußnote [5]) genannte neue Arbeit von Herrn Lichtenstein.

Hilfssatz XVIII. *Ist $\varphi(P)$ stetig, so gilt*

$$\lim_{M\to Q}\frac{\partial V(M)}{\partial n_Q}=-2\pi f(Q)+\iint_S\varphi(P)\frac{\cos(r_{PQ},n_Q)}{r_{PQ}^2}d\sigma.$$

Hier bedeutet Q einen beliebigen Flächenpunkt; M strebt längst der Normalen n_Q gegen Q.[47])

Hilfssatz XIX. *Gilt*

$$|\varphi(Q_1)-\varphi(Q_2)|\leqq Cr_{12}^{\lambda};\quad \operatorname{Max}|\varphi|\leqq C, \tag{123}$$

so ist auch für das im Flächenpunkte Q lokale Koordinatensystem

$$\lim_{M\to Q}\frac{\partial}{\partial x}V(M)=\iint_S\varphi(P)\frac{\cos(r_{PQ},x)}{r_{PQ}^2}d\sigma=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S-s}\varphi(P)\frac{\cos(r_{PQ},x)}{r_{PQ}^2}d\sigma;$$

ε ist der Durchmesser des Flächenstückes s.

Beweis.

$$\lim_{M\to Q}\iint_{S-s}=\iint_{S-s}\varphi(P)\frac{\cos(r_{PQ},x)}{r_{PQ}^2}d\sigma, \tag{124}$$

$$\iint_s\varphi(P)\frac{\cos(r_{PM},x)}{r_{PM}^2}d\sigma=O(\varepsilon^{\lambda})+\varphi(Q)\iint_s\frac{\cos(r_{PM},x)}{r_{PM}^2}d\sigma. \tag{125}$$

Nun ist

$$\iint_s\frac{\cos(r_{PM},x)}{r_{PM}^2}d\sigma=\iint_s\frac{x}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}dx\,dy+O(\varepsilon^{\lambda})=O(\varepsilon^{\lambda}). \tag{126}$$

Aus (124), (125), (126) folgt durch Zusammenfassung die Behauptung des Textes.

Bemerkung zu den Hilfssätzen XVIII und XIX. Es sind also die gleichmäßigen Grenzwerte $\frac{\partial V}{\partial X}$, $\frac{\partial V}{\partial Y}$, $\frac{\partial V}{\partial Z}$ vorhanden.

Hilfssatz XX. *Die auf der Fläche S erklärte Funktion*

$$l(Q)=\iint_S\varphi(P)\frac{\cos(r_{PQ},n_Q)}{r_{PQ}^2}d\sigma$$ [48])

erfüllt eine H-Bedingung, d. h.

$$|l(Q_1)-l(Q_2)|\leqq KA\cdot\operatorname{Max}|\varphi|\,r_{12}^{\lambda}.$$

---

[47]) Vgl. beispielsweise W. Sternberg, Potentialtheorie 1, Leipzig 1925, S. 110—114. Für den Beweis genügt es vorauszusetzen, daß in der Umgebung des Punktes Q für die Fläche S die Ungleichheiten (6) unserer Arbeit bestehen. Übrigens erlaubt der Hilfssatz I den Beweis zu vereinfachen.

[48]) Es wird in diesem Hilfssatz nur die Beschränktheit der Funktion $\varphi(P)$ vorausgesetzt.

Beweis. Es seien Q_1 und Q_2 einander genügend nahe gelegene Flächenpunkte. Für den innerhalb K_{12} gelegenen Teil s der Fläche gilt (Hilfssatz II)

$$\left| \iint_s \varphi(P) \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r_{PQ_1}^2} d\sigma - \iint_s \varphi(P) \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r_{PQ_2}^2} d\sigma \right| \leqq \text{Max}\,|\varphi| \cdot A \cdot r_{12}^{\lambda}.$$

Auf S'' ist (Hilfssätze II, IV)

$$\left| \iint_{S''} \varphi(P) \left[\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r_{PQ_1}^2} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r_{PQ}^2} \right] d\sigma \right|$$

$$\leqq KA \cdot \text{Max}\,|\varphi| \left\{ r_{12} \iint_S \frac{d\sigma}{r_{PQ_1}^{3-\lambda}} + r_{12}^{\lambda} \text{ beschränktes Integral} \right\}$$

$$\leqq KA \cdot \text{Max}\,|\varphi|\, r_{12}^{\lambda}.$$

Hilfssatz XXI. *Die Funktion*

$$m(Q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S-s} \varphi(P) \frac{\cos(r_{PQ}, x_Q)}{r_{PQ}^2} d\sigma$$

genügt einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Dabei wird (123) *vorausgesetzt; x_Q bezeichnet die x-Achse im lokalen Koordinatensystem für Q.*

Beweis.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S-s} \varphi(P) \frac{\cos(r_{PQ}, x_Q)}{r_{PQ}^2} d\sigma$$

$$= \iint_S [\varphi(P) - \varphi(Q)] \frac{\cos(r_{PQ}, x_Q)}{r_{PQ}^2} d\sigma + \varphi(Q) \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_S \frac{\cos(r_{PQ}, x_Q)}{r_{PQ}^2} d\sigma.$$

Es ist nun (wegen des Hilfssatzes II)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S-s} \frac{\cos(r_{PQ}, x_Q)}{r_{PQ}^2} d\sigma$$

$$= \iint_S \frac{\cos(r_{PQ}, x_Q)}{r_{PQ}^2} [1 + \cos(n_P, n_Q)]\, d\sigma - \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S-s} \frac{x}{r_{PQ}^3} \cos(n_P, n_Q)\, d\sigma.$$

Es wurde bereits in den Formeln (72) bis (80) bewiesen, daß

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S-s} = \iint_S \frac{x}{r_{PQ}^3} \cos(n_P, n_Q)\, d\sigma$$

einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügt. Wir beschränken uns also auf die Behandlung der Integrale

$$E = \iint_S [\varphi(P) - \varphi(Q)] \frac{\cos(r_{PQ}, x_Q)}{r_{PQ}^2} d\sigma$$

und

$$F = \iint_S \frac{\cos(r_{PQ}, x)}{r_{PQ}^2}[1 + \cos(n_P, n_Q)]\, d\sigma = \iint_S \frac{x}{r_{PQ}^3}[1 + \cos(n_P, n_Q)]\, d\sigma.$$

Man spalte zu diesem Zwecke $F(Q_1) - F(Q_2)$ bzw. $E(Q_1) - E(Q_2)$ in endlich viele Differenzen, die dadurch gewonnen werden, daß man alle Faktoren des Integranden von F bzw. E bis auf einen konstant hält. Die Hilfssätze I bis V liefern ohne Schwierigkeit für jeden einzelnen Summanden die verlangte Abschätzung.

So ist z. B. ein Glied der Differenz $F(Q_1) - F(Q_2)$

$$\left| \iint_{S''} \frac{\cos(r_{PQ_1}, x_{Q_1})}{r_{PQ_1}^2}[\cos(n_P, n_{Q_1}) - \cos(n_P, n_{Q_2})]\, d\sigma \right|$$
$$\leqq |1 - \cos(n_{Q_1}, n_{Q_2})| \cdot \left| \iint_S \{\ \} \cos(n_P, n_{Q_1})\, d\sigma \right| + \ldots \leqq A \cdot K \cdot r_{12}^{\lambda}.$$

Als ein Glied der Differenz $E(Q_1) - E(Q_2)$ erscheint

$$\left| \iint_{S''} \frac{\varphi(P) - \varphi(Q_2)}{r_{PQ_2}^2}[\cos(r_{PQ_2}, x_{Q_2}) - \cos(r_{PQ_2}, x_{Q_1})]\, d\sigma \right|$$
$$\leqq |1 - \cos(x_{Q_1}, x_{Q_2})| \cdot \left| \iint_{S''} \{\ \} \cos(r_{PQ_2}, x_{Q_1})\, d\sigma \right| + \ldots \leqq AC \cdot r_{12}^{\lambda}.$$

Aus den Hilfssätzen XX, XXI folgt, daß die Randwerte der Potentialfunktionen $\frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y}, \frac{\partial V}{\partial Z}$ H-Bedingungen mit dem Exponenten λ erfüllen und somit gilt nach Satz II

Satz V. *Genügt die Belegung $\varphi(Q)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ, so trifft dies auch für die ersten Ableitungen des Potentials der einfachen Schicht*

$$V(M) = \iint_S \frac{\varphi(P)}{r_{MP}}\, d\sigma \tag{127}$$

zu.

Beachtet man den Zusammenhang zwischen der zweiten Randwertaufgabe und dem Potential der einfachen Schicht, so gelangt man endlich, indem noch der Hilfssatz XX[49]) und der vorangehende Satz V benutzt wird, zum folgenden Satze:

Satz VI. *Besitzt die Potentialfunktion z am Rande S Normalableitungen $\frac{\partial z}{\partial n}$, die einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen, so sind die Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial Y}, \frac{\partial z}{\partial Z}$ vorhanden und erfüllen H-Bedingungen mit demselben Exponenten λ.*

---

[49]) Vgl. die Fußnote [45]).

Zwischen den im Satze V für das Potential der einfachen Belegung bewiesenen Ungleichheiten und dem Verhalten der *zweiten* Ableitungen eines Volumpotentials

$$U(M) = \iiint_G \frac{\varrho}{r}\, d\tau, \tag{128}$$

dessen Dichte ϱ eine Höldersche Bedingung erfüllt, besteht ein innerer Zusammenhang. Die Ungleichheiten für die ersten Ableitungen des Potentials (127) können nämlich ziemlich leicht aus analogen Beziehungen für die zweiten Ableitungen des Potentials (128) erschlossen werden und umgekehrt[50]). Die in Betracht kommenden Beziehungen für (128) hat Herr Günther aufgestellt[51]).

Ich möchte noch zuletzt zeigen, wie die Ungleichheitsbeziehungen für die ersten Ableitungen des Potentials der Doppelschicht aus dem oben erwähnten Resultate des Herrn Günther gefolgert werden können. Dies wäre also ein anderer Weg, um zum Satze III dieser Arbeit zu gelangen.

Es genügt natürlich, die verlangten H-Bedingungen nur für solche Punktepaare M_1, M_2 zu beweisen, die sich in der Nähe eines festen Flächenpunktes Q befinden, die z. B. (alle beide) von ihm um weniger als $\frac{\varrho_0}{2}$ entfernt sind. Für den Beweis kommt nur derjenige Teil S_1 der Fläche in Betracht, der innerhalb der Kugel K_{ϱ_0} um den Punkt Q_0 liegt. Es sei C der Rand von S_1. Wir ergänzen S_1 zu einer geschlossenen Fläche, indem wir zu S_1 denjenigen Teil γ von K_{ϱ_0} hinzufügen, der *innerhalb* der Fläche S liegt. Ist T_1 der durch $S_1 + \gamma$ begrenzte Raum, so kann man bekanntlich die auf S_1 definierte Belegung φ zu einer im ganzen T_1 definierten Funktion $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ ergänzen, so daß $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ partielle, den H-Bedingungen genügende Ableitungen erster Ordnung besitzt. Betrachten wir dann das Potential

$$W'(M) = \iint_{S_1+\gamma} \varphi(P) \frac{\cos(n_P, r_{PM})}{r_{PM}^2}\, d\sigma,$$

so genügt es natürlich, die entsprechenden Ungleichungen für dieses Potential zu beweisen, da sich $\iint_\gamma \varphi(P) \frac{\cos(n_P, r_{PM})}{r_{PM}^2}\, d\sigma$ in der Umgebung des Punktes Q_0 analytisch und regulär verhält. Nun gilt nach E. Schmidt[52]) die Identität

---

[50]) Vgl. A. Korn, Sur les équations de l'élasticité, Annales de l'École Norm. 1907, S. 9—75; insbes. S. 29—30.

[51]) N. M. Günther, Über ein Hauptproblem der Hydromechanik, Math. Zeitschr. 24 (1926), S. 448—499; Anhang S. 480 und S. 489.

[52]) E. Schmidt, Bemerkung zur Potentialtheorie, Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, Formel (13).

$$(129)\quad W'(\xi,\eta,\zeta)=\iiint_{T_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau+\begin{cases}4\pi\cdot\varphi(\xi,\eta,\zeta)\\2\pi\cdot\varphi(\xi,\eta,\zeta)\\0\end{cases}$$

je nachdem $M(\xi,\eta,\zeta)$ sich innerhalb, auf der Fläche selbst oder außer halb der Fläche befindet. Nun sind die in (129) vorkommenden Integral partiefle Ableitungen erster Ordnung der Volumpotentiale mit den Belegunge $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, und da diese Funktionen nach der Voraussetzung eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen, so sind auch die zweite Ableitungen[51]) (d. h. die ersten von W') vorhanden und erfüllen H-Bedin gungen mit demselben Exponenten λ.

Dabei muß aber noch ein Umstand in Betracht gezogen werden. Di Begrenzung von T_1, d. i. $S_1+\gamma$, ist keine Fläche vom Typus Ah, näm lich nicht längs der Kurve C. Man kann aber die Fläche $S_1+\gamma$ so abändern daß sie vom Typus Ah wird, und daß dabei nur solche Punkte ihre Lag ändern, die sich in unmittelbarer Nähe von C befinden.

(Eingegangen am 16. Dezember 1930.)

Über die Funktion $\chi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-s}$.

Von

P. Lichtenbaum †.

Nach einem nachgelassenen Manuskript herausgegeben von O. Perron*).

Im Band 129 des Crelleschen Journals untersucht Wirtinger[1]) die Riemannsche $\zeta(s)$-Funktion, von der Tatsache ausgehend, daß eine symmetrische Funktion aller Zweige einer mehrwertigen Funktion, die sie bei einem Umlauf um einen singulären Punkt annimmt, eine eindeutige Funktion ist. Zu diesem Zwecke wird die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [lx + 2k\pi i]^{-s},$$

unter lx den Hauptwert des $\log x$ verstehend, betrachtet. Wir wollen zeigen, daß man dasselbe Verfahren zur Untersuchung einer der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ analogen Funktion

$$\chi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-s}\ ^2)$$

anwenden kann.

Wir gehen aus von der Funktion

$$x^{-\frac{1}{2}} (\log x)^{-s}. \tag{1}$$

Diese Funktion ist eine mehrwertige Funktion mit drei Verzweigungspunkten: 0, 1, ∞. Wir ziehen einen Schnitt von 0 bis 1 und definieren einen eindeutigen Zweig der Funktion (1) durch die Annahme:

$$[lx]^{-s} = e^{-s\,llx}, \tag{2}$$

---

*) Paul Lichtenbaum, geboren den 9. 2. 1880 in Warschau, studierte in Warschau, Zürich, Wien und Halle und starb nach einer fast zehnjährigen schweren Krankheit den 29. 3. 1919. Die vorliegende Abhandlung ist in den Jahren 1909–1919 entstanden.

Die Schriftleitung.

[1]) „Über eine besondere Dirichletsche Reihe."

[2]) Vgl. über diese Funktion: M. E. Cahen, Thèse, Paris 1899, S. 3 ff.

unter llx denjenigen Zweig dieser Funktion verstehend, der für Werte auf der reellen Achse von $1 \ldots \infty$ reelle Werte annimmt, und durch die zweite Annahme

$$x^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}lx}, \tag{3}$$

unter lx den Hauptwert des $\log x$ verstehend, d. h. denjenigen Zweig, der für reelle positive x selbst reell ist. Macht man mit x Umläufe um den Punkt ∞, ohne den Schnitt zu überschreiten, so entstehen aus dem durch (2) und (3) definierten Zweig der Funktion (1) unendlich viele andere Zweige. Z. B. bei k negativen Umläufen um den Punkt ∞ entsteht ein Zweig

$$(-1)^k x^{-\frac{1}{2}} [lx + 2k\pi i]^{-s},$$

wobei unter lx und $x^{-\frac{1}{2}}$ die Hauptwerte dieser Funktionen zu verstehen sind; dasselbe gilt auch für die $(-s)$-te Potenz, d. h. es ist

$$[lx + 2k\pi i]^{-s} = e^{-sl[lx+2k\pi i]},$$

wobei der erste log auch den Hauptwert annimmt[3]). Betrachtet man die Summe aller dieser Zweige, d. h. die Reihe

$$\Phi(x, s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k x^{-\frac{1}{2}} [lx + 2k\pi i]^{-s}, \tag{4}$$

so konvergiert diese Reihe absolut für alle s, deren reeller Teil > 1 ist, und zwar gleichmäßig für $|x| \geqq \varepsilon > 0$, und ist eindeutig mit Ausnahme der Strecke $0 \ldots 1$, bei deren Überschreitung andere Zweige eintreten. Da die Funktion $\Phi(x, s)$ außerhalb des Einheitskreises regulär und für $x = \infty$ gleich 0 ist, so läßt sie sich in eine Reihe nach abnehmenden Potenzen von x ohne konstantes Glied entwickeln. Setzen wir also

$$\Phi(x, s) = \sum_{1}^{\infty} a_\nu x^{-\nu}, \tag{5}$$

so ist

$$2\pi i a_\nu = \int_{(R)} \Phi(x, s)\, x^{\nu-1}\, dx, \tag{6}$$

wobei die Integration über einen beliebigen Kreis, dessen $R > 1$ ist, zu erstrecken ist.

Setzt man in (6) für $\Phi(x, s)$ die Reihe (4), so kann man die Integration gliedweise ausführen. Nimmt man dann

$$x = R e^{i\varphi},$$

so ist

$$2\pi a_\nu = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} (-1)^k [lR + i(\varphi + 2k\pi)]^{-s} e^{(\nu - \frac{1}{2})[lR + i\varphi]}\, d\varphi.$$

---

[3]) Dies ist ausführlich in den Bemerkungen zu dem Wirtingerschen Artikel gezeigt

Setzt man jetzt: $\varphi = \varphi' - 2k\pi$, $\varphi' = \varphi + 2k\pi$, so erhält man:

$$2\pi a_\nu = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} (-1)^k [lR + i\varphi']^{-s} e^{(\nu-\frac{1}{2})[lR+i(\varphi'-2k\pi)]} d\varphi',$$

da aber $e^{(\nu-\frac{1}{2})(-2k\pi i)} = e^{k\pi i} = (-1)^k$ ist, so kann man auch schreiben:

$$2\pi a_\nu = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} [lR + i\varphi]^{-s} e^{(\nu-\frac{1}{2})[lR+i\varphi]} d\varphi$$

oder, was dasselbe ist:

$$(7) \qquad 2\pi a_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} [lR + i\varphi]^{-s} e^{(\nu-\frac{1}{2})[lR+i\varphi]} d\varphi.$$

Setzt man in diesem Integrale

$$lR + i\varphi = t,$$

so erhält man:

$$2\pi i a_\nu = \int_{lR-i\infty}^{lR+i\infty} t^{-s} e^{(\nu-\frac{1}{2})t} dt.$$

R ist > 1, $lR > 0$, die Integration geht also auf einer beliebigen Parallelen zur Ordinatenachse, die rechts von dieser liegt, vor sich.

Da aber $t = 0$ der einzige singuläre Punkt der zu integrierenden Funktion im Endlichen ist und das Integral noch einen Sinn hat, wenn man die Integration bis ∞ auf der Seite der abnehmenden Abszissen erstreckt, so können wir auch schreiben:

$$2\pi i a_\nu = \int_{L'} t^{-s} e^{(\nu-\frac{1}{2})t} dt.$$

Dieses Integral, wobei der Weg L' von $-\infty$ der negativen Achse folgt, dann den Nullpunkt in positivem Sinne umläuft und nach $-\infty$ zurückkehrt, hat einen Sinn bei *jedem* s.

Setzen wir noch

$$t = e^{-i\pi} t'$$

$$(\operatorname{Arg} t \ldots -\pi \ldots +\pi;\ \operatorname{Arg} t' \ldots 0 \ldots 2\pi),$$

so geht der Weg L' in den Weg L über, der von $+\infty$ zunächst der positiven Achse folgt, dann den Nullpunkt in positivem Sinne umläuft und nach ∞ zurückkehrt. Man hat dann:

$$2\pi i a_\nu = e^{\pi i(s-1)} \int_L t^{-s} e^{-(\nu-\frac{1}{2})t} dt,$$

wobei t^{-s} auf der ersten Weghälfte den Hauptwert bedeutet.

Wir setzen weiter:

$$\left(\nu - \frac{1}{2}\right) t = z, \qquad t = \frac{z}{\nu - \frac{1}{2}}, \qquad dt = \frac{dz}{\nu - \frac{1}{2}},$$

und erhalten:

$$2\pi i a_\nu = e^{\pi i(s-1)} \int_L z^{-s} \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1} e^{-z} dz$$
$$= e^{\pi i(s-1)} \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1} [e^{2\pi i(1-s)} - 1] \Gamma(1-s)^4)$$

oder

$$2\pi i a_\nu = [e^{\pi i(1-s)} - e^{-\pi i(1-s)}] \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1} \Gamma(1-s)$$
$$= 2i \sin \pi s \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1} \Gamma(1-s) = 2i \frac{\pi}{\Gamma(s)} \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1};$$

also schließlich:

$$a_\nu = \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1}}{\Gamma(s)}. \tag{8}$$

Substituiert man diesen Wert in (5), so entsteht:

$$\Phi(x, s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1}}{\Gamma(s)} x^{-\nu}. \tag{9}$$

Diese Gleichung gilt zunächst für $|x| > 1$ und s, deren reeller Teil > 1 ist. Die rechte Seite aber ist für jedes endliche s eine analytische Funktion von x, wenn nur $|x| > 1$ ist, und zwar ist sie eine ganze eindeutige Funktion von s. Auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung können wir behaupten, daß auch der betrachtete Zweig von $\Phi(x, s)$ für alle endlichen s eine ganze eindeutige Funktion von s ist, bei $|x| > 1$.

Um aber zu einer analytischen Fortsetzung von $\Phi(x, s)$, welche für jedes x gilt, auch bei s, deren reeller Teil $\leqq 1$ ist, zu gelangen, bemerken wir, daß sowohl (4) wie (9) der Funktionalgleichung

$$\frac{\partial \Phi(x, s)}{\partial x} + \frac{1}{2x} \Phi(x, s) = -\frac{s}{x} \Phi(x, s+1) \tag{10}$$

genügen.

Es folgt nämlich aus (9):

$$\Phi(x, s+1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s}}{\Gamma(s+1)} x^{-\nu}, \qquad \frac{\partial \Phi(x, s)}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1}}{\Gamma(s)} x^{-\nu-1}(-\nu),$$

und es gilt die Identität:

$$\frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1}}{\Gamma(s)} (-\nu) x^{-\nu-1} + \frac{1}{2} \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1}}{\Gamma(s)} x^{-\nu-1} = \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1} x^{-\nu-1} \left[-\nu + \frac{1}{2}\right]}{\Gamma(s)}$$
$$= -\frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s} x^{-\nu-1}}{\Gamma(s)} = -\frac{s}{x} \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s} x^{-\nu}}{\Gamma(s+1)},$$

---

4) Jordan, Cours d'analyse 3, p. 257.

welche zeigt, daß die Beziehung (10) für die einzelnen Glieder der entsprechenden Reihen gilt.

Dasselbe kann man aus (4) finden, wenn man die einzelnen Glieder der entsprechenden Reihen bestimmt und die Beziehung (10) für diese Glieder verifiziert. Das sind nämlich die Ausdrücke:

$$(-1)^k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{s}{2}} [lx + 2k\pi i]^{-s} + (-1)^k x^{-\frac{s}{2}} (-s) [lx + 2k\pi i]^{-s-1},$$

$$(-1)^k \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{s}{2}} [lx + 2k\pi i]^{-s},$$

$$-s \cdot (-1)^k x^{-\frac{s}{2}} [lx + 2k\pi i]^{-s-1}.$$

Betrachtet man die Funktion $\Phi(x, s+1)$ als gegeben, so kann man die Gleichung (10) als eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung ansehen. Durch ihre Integration ergibt sich:

$$\Phi(x, s) = x^{-\frac{1}{2}} \left[\int_a^x (-s\, \Phi(x, s+1)\, x^{-\frac{1}{2}})\, dx + C \right]. \tag{11}$$

Die Konstante C bestimmen wir durch die Bedingung, daß für $x = a$ $\Phi(x, s)$ seinen durch (4) oder (9) bestimmten Wert annimmt. Nehmen wir jetzt an, es sei der reelle Teil von s positiv, der reelle Teil von $s+1$ also größer als 1. Dann können wir für $\Phi(x, s+1)$ seine Darstellung durch (4) benutzen und gliedweise integrieren. Das einzelne Glied hat dann die Form:

$$-s(-1)^k x^{-1} [lx + 2k\pi i]^{-s-1} dx = (-1)^k d[lx + 2k\pi i]^{-s},$$

und nach Durchführung der Integration findet man:

$$x^{-\frac{1}{2}} \int_a^x [-s\Phi(x, s+1) x^{-\frac{1}{2}}] dx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k x^{-\frac{1}{2}} [(lx + 2k\pi i)^{-s} - (la + 2k\pi i)^{-s}].$$

Hier darf die Klammer nicht aufgerissen werden, wenn der reelle Teil von s positiv, aber $\leqq 1$ ist, wohl aber bei reellem Teil von $s > 1$. Setzt man jetzt in (11) für x den Wert a, und nimmt an, daß $|a| > 1$ ist, so hat man:

$$C = \Phi(a, s) \cdot \sqrt{a}.$$

Für $\Phi(a, s)$ können wir infolge der letzten Annahme über a seinen Wert aus (9) setzen und erhalten schließlich:

$$\Phi(x, s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k x^{-\frac{1}{2}} [(lx + 2k\pi i)^{-s} - (la + 2k\pi i)^{-s}] \tag{12}$$

$$+ x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1}}{\Gamma(s)} a^{-\nu}.$$

Die letzte Formel gilt für jedes x und s mit positivem reellen Teile. Insbesondere, wenn der reelle Teil von s größer als 1 ist, kann man die Klammer aufreißen, und man findet dann für $\Phi(x, s)$ die ursprüngliche Darstellung (4).

Will man aber den Schnitt $0 \ldots 1$ überschreiten und zu analytischen Fortsetzungen des Zweiges $\Phi(x, s)$ gelangen, so kann man *auch* (12) benutzen. Dabei müssen den einzelnen Potenzen in der ersten Summe ihre richtigen Werte beigelegt werden; nämlich für $(la + 2k\pi i)^{-s}$ müssen die durch (2) definierten Werte genommen werden, für $(lx + 2k\pi i)^{-s}$ aber diejenigen, welche man aus $(la + 2k\pi i)^{-s}$ bekommt, wenn man zunächst von a bis x in der zerschnittenen Ebene geht, dann aber den Schnitt in der verlangten Art überschreitet und zu x zurückkehrt.

Um die Fortsetzungen für beliebiges s zu erhalten, kann man die Gleichung (12) in derselben Weise wie früher (4) benutzen. Man findet so, daß bei beliebigen analytischen Fortsetzungen in bezug auf x und s die Funktion $\Phi(x, s)$ immer eine ganze Funktion von s bleibt. Die bei analytischer Fortsetzung in bezug auf x erhaltenen Zweige haben außer 0, 1 auch ∞ als singuläre Stelle, ausgenommen den Zweig (4) selbst[5]).

Die Funktion $\Phi(x, s)$ verhält sich bei $x = -1$ regulär. Sie kann also nach positiven ganzen Potenzen von $x + 1$ in der Umgebung dieser Stelle entwickelt werden. Gehen wir aus von dem oben definierten Zweige dieser Funktion und nehmen zunächst $R(s) > 1$, so können wir unmittelbar die Entwicklung (4) verwenden. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}
\Phi(-1, s) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{\pi i}{2}} [\pi i + 2k\pi i]^{-s} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{\pi i}{2}} (\pi i)^{-s} (1 + 2k)^{-s} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{\pi i}{2}} (\pi i)^{-s} (1 - 2k)^{-s} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{\pi i}{2}} (\pi i)^{-s} (1 + 2k)^{-s} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-\frac{\pi i}{2}} (-\pi i)^{-s} (2k + 1)^{-s} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{\pi i}{2}} (\pi i)^{-s} (2k + 1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{\pi i}{2}} [(\pi i)^{-s} - (-\pi i)^{-s}] (2k + 1)^{-s},
\end{aligned}$$

$$\Phi(-1, s) = -2 \sin \frac{\pi s}{2} \pi^{-s} \chi(s), \tag{13}$$

wobei

$$\chi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k + 1)^{-s}$$

ist.

Da aber die linke Seite der Gleichung (13) für jedes s fortsetzbar ist, so gilt dasselbe für die rechte Seite (13). Somit haben wir auch den Be-

[5]) Vgl. Bemerkungen zu dem Wirtingerschen Artikel.

weis für die Fortsetzbarkeit der Funktion $\chi(s)$ gewonnen, und zwar so, daß nur die singulären Stellen 0, -2, -4 usw. möglich sind.

Nimmt man aber an, der reelle Teil von s sei negativ, so konvergiert die Reihe (9) auch bei $x = -1$, und man erhält:

$$\Phi(-1, s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{s-1}}{\Gamma(s)} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{s-1}}{2^{s-1}\Gamma(s)};$$

also

$$\Phi(-1, s) = -\frac{\chi(1-s)}{2^{s-1}\Gamma(s)}. \tag{14}$$

Auch diese Gleichung gilt für jedes s wegen der unbeschränkten Fortsetzbarkeit der linken Seite. Es ergibt sich hieraus, daß $\chi(1-s)$ nur die singulären Stellen $s = 0, -1, -2, \ldots$ usw. haben kann, also $\chi(s)$ nur die Stellen $1, 2, 3, \ldots$ usw. Zusammen mit dem obigen Resultat bedeutet das, daß $\chi(s)$ überhaupt keine singulären Stellen im Endlichen besitzt, m. a. W., daß $\chi(s)$ eine ganze transzendente Funktion ist.

Vergleicht man (13) und (14), so erhält man

$$\frac{\chi(1-s)}{\Gamma(s)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-s} \sin\frac{\pi s}{2}\, \chi(s) \tag{15}$$

oder anders geschrieben:

$$\chi(s) = \frac{\pi^{s-1} \cos\frac{\pi s}{2}\, \Gamma(1-s)}{2^{s-1}}\, \chi(1-s), \tag{15'}$$

eine Gleichung, die ein Spezialfall der bekannten Funktionalgleichung für die Dirichletschen L-Funktionen ist.

Extended Minimum-Number Theorems of Cyclic and Sextactic Points on a Plane Convex Oval.

Von

S. Mukhopadhaya in Calcutta.

1. Convex Arc and Convex Oval.

The points of a convex arc S can be arranged in a certain orde which we will call the *positive* order, with a first point A and a las point B, which are the *lower* and *upper* extremities of S. No point of is repeated in the order and A is distinct from B.

The arc S is a *continuous* line and possesses the following properties

If $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ be any n distinct points in order on S they form the vertices in order of a convex n-gon.

If $P(r)$ and $P(s)$ be any two distinct points of S, $P(s)$ being highe than $P(r)$, then all the points of S which lie between $P(r)$ and $P(s$ will lie on a given side (left side) of the directed line $P(r)P(s)$, and a other points of S, excluding $P(r)$ and $P(s)$, will fall on the opposit side (right side) of the same directed straight line.

All points of the plane which lie on the left of AB or on AB, wi constitute the *half-plane* of S.

A tangent exists at each point P of S and the positive direction o the tangent is such that each point of S, except P, lies on the right sid of the tangent.

The positive direction of the tangent turns continuously on the righ as P moves from A to B. The arc S is *rectifiable*.

The figure consisting of the convex arc S and its base AB will b called a *convex segment*.

A combination of two convex arcs, such that the lower and uppe extremities of one are respectively the upper and lower extremities of th other, will be called a *double-convex*.

An *oval* is a double-convex having common tangents at the commo extremities.

2. Admissible Curves.

A class X of curves C will be called *admissible* to S, if it possesses the following properties:

(i) Each of the curves C is uniquely determined by a fixed number n of arbitrary points on S. The number n will be called the *index* of X.

(ii) Each of the curves C, in the portion considered, is a convex arc in the half-plane of S, or such an arc, looked at from a projective point of view.

(iii) The curves C are *analytic*.

(iv) Two curves C and C' of class X with index n, do not intersect, in the portions considered in the half-plane of S, at more than $n-1$ points.

(v) The curves C of class X with index n vary in a continuous manner with the n determining points on S. A class X with index n may be denoted by X_n.

The variations of the n points on S determining a curve C will be always supposed to have been made in an *orderly* way, *i. e.*, with maintenance of their order on S. It may be observed that the points common to C and S will have the same order, including sense, on C and S. This is evident if the number of points common to C and S be not less than three, as C and S are both convex. More generally the condition of sameness of order including sense, on C and S, of the points common between them, will follow if we hypothetize that C and S between any two common points P and Q will fall on the same side of PQ.

It follows from condition of admissibility (v) that if by orderly variations of the n distinct points on S arbitrarily chosen, determining a curve C of class X with index n, a group of r ($\leqq n$) points approached as their limit any fixed point P on S, *in any manner whatsoever*, the remaining $n-r$ points approaching at the same time other fixed limits, then C will approach a definite limiting form C_r. We will say that in this case C_r passes through r consecutive points of S at P.

Condition of admissibility (v) is equivalent to the supposition that S possesses *continuity of order n*.

3. Orders of Incidence.

Suppose C is an admissible curve of class X with index n, and suppose that r of the determining points on S have become consecutive at P. We will say, in this case that C has *incidence of order r* at P on S.

When C passes through a *single* point P on S we will say that C has incidence of order *one* at P on S. When C does *not* pass through a point P of S, we will say that C has incidence of order *zero* at P on S.

At certain special points K of S it may happen that in every arbitrary double neighbourhood of K their exist $n+1$ intersections of a curve C of class X_n with S. Out of these $n+1$ points, only n can be arbitrarily chosen. The $n+1$-th point comes in *adventitiously* and will be called an *adventitious point.*

The curve C at such a point K will be said to have *adventitious incidence* on S at K of order $n+1$ and *strength* unity. Adventitious incidences of higher strength it will not be necessary to deal with. They will not affect the minimum-number theorems discussed in this paper and therefore may be ignored.

Where S has continuity of order n but *not higher*, an incidence of order $n+1$ can be distinguished from that of an order n by the fact that if in one case the curve C crosses S, in the other case it will not cross S, but an incidence of order higher than $n+1$ will not be distinguishable from one or other of the two above mentioned cases.

4. Interstitial Incidence.

We may make the following assumption:

If two curves C and C' have incidence on S at P of orders r and r' respectively, and if C' fall between C and S, either in the immediate neighbourhood on the right of P or in that on the left of P, then $r' \gtrless r$.

This may be more succinctly stated that if C' has an incidence on S at P *interstitial* to C and S either on the left or on the right, then the order of incidence of C' on S at P cannot be less than that of C with S at P.

This assumption is based on geometrical considerations connected with the supposition of continuity of variations of C and C' along S and the *interlockability* of C and C' on S.

Two curves C and C' may be called *interlocked* on S if all the points common to C and C' in the half-plane of S are points of S.

Suppose C is determined by r arbitrary points $P(1), P(2), \ldots, P(r)$ and C' by r' arbitrary points $P'(1), P'(2), \ldots, P'(r')$, on an arbitrary arc σ of S, of which P is the mid-point and which contains no further points of C or C'.

Suppose $P'(1)$ is the same as $P(1)$ and that C' is interstitial to C and S at $P(1)$. Suppose, if possible, $r' < r$. Then we can take $P'(2)$, $P'(3), \ldots, P'(r')$ identical with $P(2), P(3), \ldots, P(r')$, respectively. Evidently C' will also be interstitial to C and S at each of the points

$P(2), P(3), \ldots, P(r')$, if we suppose C and C' are interlocked on σ. Consequently C' must either pass through $P(r'+1)$ or intersect S between $P(r')$ and $P(r'+1)$, which is against the hypothesis that C' has no further points on σ. Thus $r' \gtrless r$. By making σ vanish we arrive at our fundamental assumption.

The cases where either one of the points $P(1), P(2), \ldots, P(r)$ or one of the points $P'(1), P'(2), \ldots, P'(r')$ or one of the points of the former set as well as one of the points of the latter set happens to be adventitious, require separate consideration.

Suppose as before that the mid-point of σ is the point P where both sets of points become ultimately consecutive.

If an adventitious point occur only in the set $P(1), P(2), \ldots, P(r)$, the argument already given applies.

If an adventitious point occur only in the set $P'(1), P'(2), \ldots, P'(r')$, then if the supposition $r' < r$ where possible, we could identify $P(1), P(2), \ldots, P(r')$ with $P'(1), P'(2), \ldots, P'(r')$ and the remaining $r - r'$ points $P(r'+1), \ldots, P(r)$ could be taken anywhere on σ above $P(r')$ in an arbitrary fashion. The argument already given then apply.

If a point of the set $P(1), P(2), \ldots, P(r)$ be adventitious we can choose $P(1), P(2), \ldots, P(r-1)$ arbitrarily on σ *below* P. The point $P(r)$ will then be adventitious and fall on S *above* P. Similarly if a point of the set $P'(1), P'(2), \ldots, P'(r')$ be adventitious we can choose $P'(1), P'(2), \ldots, P'(r'-1)$ arbitrarily on σ *below* P. The adventitious point $P'(r')$ will then fall on S *above* P. If we confine ourselves to the lower half of σ we can prove, by arguments already given, that $r'-1$ cannot be less than $r-1$. Whence it follows that $r' \gtrless r$.

5. C-Ranges on S.

If an admissible curve C of class X with index n pass through $m (\gtrless n)$ points $P(1), P(2), \ldots, P(m)$, in order on S, and if there be no further intersections of C with S between $P(1)$ and $P(m)$ we have a *regular C-Range* on S of order m. The *strength* of the C-Range will be measured by $m - n$.

A regular C-Range of strength unity will be called a *prime* C-Range. A regular C-Range of strength greater than unity will be called a *composite* C-Range.

If C has incidence of order r with S at a point P of a regular C-Range, the point P will be considered as an r-ple point of the C-Range and as equivalent to r consecutive orderly intersections of C with S. A regular C-Range on S may, be more briefly, indicated by $C|S$.

At each *single* point P of C/S the curve C (measured in the positive sense) crosses S either from outside to inside of S or from inside to outside of S. In the former case the point P will be called an *in-point* and in the latter case an *out-point* of C/S. An in-point may also be called a *positive element* and an out-point a *negative element* of C/S. It should be borne in mind that the order of the points C/S, as well as the *sense* of the order, is the same on C and S.

The successive elements of C/S, when they are all distinct, are alternately of contrary signs.

An r-ple point P^r of C/S is to be looked upon as the juxta-position of r consecutive points of alternately contrary signs. If r be odd the first and last points of P^r are of *similar* signs and when r is *even* they are of *contrary* signs.

If at a multiple point P^r, the curve C approaches S from *above* S the first point of P^r is positive and if C approaches S from *below* S, it is negative. If at P^r the curve C when leaving S goes *below* S the last point of P^r is positive, and if it goes *above* S the last point of P^r is negative.

Two C-Ranges on S will be called *similar* if the first and last elements of one are similar in sign to the first and last elements, respectively of the other. Two C-Ranges on S will be called *contrary* if the first and last elements of one are contrary in sign to the first and last elements respectively, of the other.

Two C-Ranges will be called *infra-similar* or *infra-contrary* according as the first elements of the two are similar or contrary. Two C-Ranges on S will be called *supra-similar* or *supra-contrary* according as the last elements of the two are similar or contrary. A C-Range will be called positive or negative according as its first element is positive or negative.

If P and Q be any two points on C or S, Q being above P, the part of C or S which lies between P and Q, both inclusive, will be denoted by $C(PQ)$ or $S(PQ)$. If P and Q be denoted by $P(r)$ and $P(s)$, $C(PQ)$ and $S(PQ)$ may be denoted more briefly by $C(r,s)$ and $S(r,s)$. Any particular point on $S(r,s)$ may be denoted by $P(r,s)$ or $P(rs)$, omitting the punctuation. Any particular point on S between $P(rs)$ and $P(st)$ may be denoted by $P(rst)$. Similarly any particular point on S between $P(rst)$ an $P(stu)$ may be denoted by $P(rstu)$ and so on.

A convex segment consisting of $C(PQ)$ and PQ will be denoted by $C(\overline{PQ})$ and one cosisting of $C(r,s)$ and $P(r)P(s)$ will be denoted by $C(\overline{r,s})$.

A prime range on S pertaining to C will be denoted by $\{C/S\}$.

6. Intersections of two Convex Segments.

Suppose $C(PQ)$ is a convex arc and $C(\overline{PQ})$ the corresponding onvex segment, where by our conventions $C(PQ)$ lies on the left side f PQ. Suppose $C'(\overline{P'Q'})$ is another convex segment in the halfplane f $C(PQ)$.

It follows from the elementary properties of a convex arc that if ne of the points P', Q' lie inside $C(PQ)$ and the other outside in its alf-plane, the line $P'Q'$ will cut $C(PQ)$ at a single point R and conersely.

It also follows that $C(\overline{PQ})$ and $C'(\overline{P'Q'})$ being closed figures interect one another at an even number of points, supposing that they have nly a finite number of points common. Hence since $P'Q'$ and $C(PQ)$ ntersect at only one point and $C'(P'Q')$ does not meet PQ at all, the onvex arcs $C(PQ)$ and $C'(P'Q')$ intersect at an odd-number of points.

If O be a common point of $C(PQ)$ and $C'(P'Q')$ and P' lie inside $'(PQ)$ and Q' out-side, then O will lie on $C(PQ)$ below R, as O is n the left of $P'Q'$. If P' be outside and Q' inside then O will lie on $'(PQ)$ above R.

Conversely, if $C'(P'Q')$ lie in the half-plane of $C(PQ)$ and intersect $'(PQ)$ at a single point, or at an odd number of points, then P' and Q' e on opposite sides of $C(PQ)$.

Theorem I. *If* $P(1), P(2), \ldots, P(n+1)$ *be the elements of a prime ange* $C/S(1, n+1)$ *where* C *is an admissible curve of class* X_n, *and* C' *s another curve of the same class* X_n, *determined by any* n *arbitrary points* $P(1,2), P(2,3), \ldots, P(n,n+1)$ *on* S, *then the regular range* $C'/S(1,n+1)$ *s similar to* $C/S(1,n+1)$,

First suppose all the elements of $C/S(1, n+1)$ are distinct. Also suppose hat none of the n arbitrary points, which interpolate $C/S(1, n+1)$ overap any of the elements of $C/S(1, n+1)$.

As $P(1, 2), \ldots, P(n, n+1)$ are in order on S, they are also in rder on C'.

$P(r, r+1)$ and $P(r+1, r+2)$ $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ are on opposite ides of C, in the half-plane of $C(r, r+2)$, as S crosses C only once etween these points. Therefore the part of C' which passes between $P(r, r+1)$ and $P(r+1, r+2)$ will intersect $C(r, r+2)$, in at least ne point O_r.

The $n-1$ points $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$ thus obtained on the $n-1$ uccessive parts of C' between $P(1, 2)$ and $P(n, n+1)$ are necessarily n order on C'. They are therefore also in order on C, between $P(1)$ nd $P(n+1)$.

But C and C' cannot intersect at more than $n-1$ points in th half-plane of $S(1, n+1)$.

Therefore $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$ are all the intersections of C and C' i the half-plane of $S(1, n+1)$, in other words, C and C' cannot agai intersect in the half-plane of $S(1, n+1)$.

Suppose all the elements of $C'/S(1, n+1)$ are $P'(1), P'(2), \ldots, P'(m)$ These include the n points $P(1, 2), P(2, 3), \ldots, P(n, n+1)$. Conse quently m is not less than n. $P'(1)$ cannot coincide with $P(1)$ fo then C' would intersect C again at $P(1)$, which is below $P(1, 2)$ o C' and therefore much more below the lowest intersection O_1 of C with C.

Again $P(1)$ and $P'(1)$ are similar elements, for if $P(1)$ and $P'(1$ were contrary, then C' would intersect C again in the half-plane o $S(1, n+1)$ at some point O which is below $P(1, 2)$ on C' and therefor much more below O_1 the lowest intersection of C' with C.

In the same way it is shewn that $P(n+1)$ and $P'(m)$ cannot coin cide and are similar.

Thus it is completely proved that $C/S(1, n+1)$ and $C'/S(1, n+1$ are similar. The order of $C/S(1, n+1)$ is $n+1$ and the order o $C'/S(1, n+1)$ is not less than n. But two similar ranges have eithe the same order or differ in order by an even number. Hence the orde of $C'/S(1, n+1)$ is either $n+1$ or $n+1+2p$, where p is an intege Thus either $C'/S(1, n+1)$ is either a prime range or a composite rang of strength $1+2p$.

The cases where some of the elements of $C/S(1, n+1)$ are multipl or where some of the arbitrarily chosen points $P(1, 2), \ldots, P(n, n+1$ coincide with some of these elements can be individually treated on simi lar lines and present no inherent difficulties. These cases may also be con sidered as orderly limits of the case treated above and deduced directl from it.

7. Line of Mean Succession of Prime Ranges.

If in Theorem I we take $P(1, 2), P(2, 3), \ldots, P(n, n+1)$ to be th mid-points of $S(1, 2), S(2, 3), \ldots, S(n, n+1)$, respectively, the curve C of the same class and index as C determined by these mid-points will b called the *mean associate* of $C/S(1, n+1)$.

The range $C'/S(1, n+1)$ which will be similar to $C/S(1, n+1)$, wil be called the *mean derived* of the latter.

The mean derived of a given prime range $\{P\}$ may be itself prime In which case it may be denoted by $\{P'\}$ and called the *mean successo* of $\{P\}$.

If the mean derived of $\{P\}$ be composite and of strength $1+2p$ it will consist of $n+1+2p$ elements $P'(1), P'(2), \ldots, P'(n+1+2p)$. These can be grouped into $2p+1$ successive prime ranges.

$$\begin{aligned} &P'(1), && \ldots, P'(n+1),\\ &P'(2), && \ldots, P'(n+2),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &P'(1+2p), && \ldots, P'(n+1+2p), \end{aligned}$$

which will be alternately *similar* and *contrary* to $\{P\}$. The first and last of the group which may be called the *header* and *tailer*, will be always similar to $\{P\}$. Any one of these $1+2p$ prime ranges, will be called a *mean successor* of $\{P\}$.

If $\{P\}, \{P'\}, \{P''\}, \ldots, \{P^{(n)}\}, \ldots$ be a sequence of prime ranges such that $\{P'\}$ is a mean successor of $\{P\}$ and $\{P^{(r+1)}\}$ of $\{P^{(r)}\}$ $(r=1,2,3,\ldots)$ then this sequence will be called a *line of mean succession* of prime ranges.

If $\{P\}, \{P'\}, \{P''\}, \ldots$ be all similar, the line of mean succession which they form will be called *pure*. Otherwise the line will be called *mixed*, specially if the successors of no successor are all similar.

8. X-points, positive and negative.

A point K of S will be called an X-point of given sign and index n, if in every arbitrary neighbourhood σ, extending to both sides of K, there exists a prime range C/σ of the given sign pertaining to a curve C of class X with index n.

An X-point is either positive or negative. An X-point which is both positive and negative will be supposed not to exist. The existence of such an X-point would imply the existence of an infinity of X-points of either signs in the immediate vicinityand no minimum theorem would require proof.

Theorem II. *Every pure line of mean succession of prime ranges on S, derived from a given prime range $\{P\}$ of given sign, pertaining to an admissible curve C of class X with index n, leads to a definite X-point of the given sign and index n.*

Let $\{P\}, \{P'\}, \{P''\}, \ldots$ denote a pure line of mean succession of prime ranges derived from $\{P\}$ and $s, s', s'', \ldots$ their respective *laps* on S, that is, the arcual distances along S from lowest to highest element of the respective ranges.

It follows from (7) that s' falls within s, s'' within s', and so on. It can be shewn that $s, s', s'', \ldots$ form a sequence of zero limit. A proof

of this for the case $n = 5$ has been given elsewhere[1]). The method o proof given there is general and can be extended to any value of n.

There is only one point of S common to $s, s', s'', \ldots$ by *Bolzano' Principle*. This unique point is an X-point of index n and given sign.

Cor. *To every prime range of a given sign pertaining to a curve (of class X_n, corresponds at least one X_n-point of the given sign lyin in the lap of the range.*

9. Bi-incidence on S.

Let C^r_{n-r} $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ denote an admissible curve of class X_n having incidence on S at A and B of orders $n - r$ and r, respectively Such a curve will be called a curve *bi-incident* on S, the order of th bi-incidence being n. The sum of the orders of the incidences of each o these curves at A and B is n, the order of the bi-incidence.

The curves of class X_n which have bi-incidence on $S(AB)$ of order n can be serially written as:

$$C^0_n, C^1_{n-1}, \ldots, C^r_{n-r}, \ldots, C^n_0.$$

Two consecutive curves C^r_{n-r}, C^{r+1}_{n-r-1} have $n - r - 1$ consecutive point common at A and r consecutive points common at B. They have thu altogether $n - 1$ points common, and consequently cannot have any poin common *between* A and B.

A curve C^r_{n-r} will be said to be *clearly* bi-incident on $S(AB)$ if i has no point common with S *between* A and B.

A curve C^r_{n-r} will be called *adventitiously* bi-incident on $S(AB)$, i it has one or more points common with S *between* A and B.

Two consecutive curves C^r_{n-r} and C^{r+1}_{n-r-1} can be looked upon as inter locked on S as all the points common between them are points of S.

Theorem III. *Two consecutive curves C^r_{n-r} and C^{r+1}_{n-r-1} which hav clear bi-incidence on $S(AB)$ will fall on different sides of S betwee A and B.*

Suppose C^r_{n-r} falls *above* S between A and B. Then C^{r+1}_{n-r-1} will fa *below* S.

C^{r+1}_{n-r-1} cannot fall above C^r_{n-r} at B as then C^r_{n-r} would be *interstitia* to C^{r+1}_{n-r-1} and S at B and have at the same time a lower order of in cidence, namely, r, on S at B than C^{r+1}_{n-r-1} has. C^{r+1}_{n-r-1} cannot be inter stitial to C^r_{n-r} and S at B as then it would be also interstitial to C^r_{n-} and S at A and have at the same time an order of incidence on S at less than the order of incidence C^r_{n-r} on S at A.

---

[1]) Math. Zeitschr. 30, pp. 568–569.

Consequently C_{n-r-1}^{n+1} will fall below S at B, and therefore also below S at A as the bi-incidence is clear.

Cor. (i). *If every one of the series* $C_n^0, \ldots, C_{n-r}^r, \ldots, C_0^n$ *have clear bi-incidence on* $S(AB)$, *they will fall alternately on different sides of* S.

Cor. (ii). *The curves* C_n^0 *and* C_0^n *in the above corollary will fall on the same side or different sides of* S *according as* n *is even or odd.*

Cor. (iii). *The ranges* C_{n-r}^r/S $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ *are all similar, if the bi-incidences be all clear.*

This is evident, since if C_{n-r}^r fall above S at A, C_{n-r-1}^{r+1} will fall below S at A, that is, if the $n-r$-th element of C_{n-r}^r/S be *negative* the $n-r-1$-th element of C_{n-r-1}^{r+1}/S will be *positive* and the two ranges have the same order.

Cor. (iv). *Theorem* III *also evidently holds for two curves* C_{n-r+x}^r *and* C_{n-r-1}^{r+1+y} *of class* X_n, *the former possessing adventitious incidence of strength* x *at* A *and the latter possessing adventitious incidence of strength* y *at* B.

If C_{n-r}^r possess adventitious incidence at B or if C_{n-r-1}^{r+1} possess adventitious incidence at A, the two curves will be identical as they will possess altogether more than $n-1$ points common. Such possibilities will not affect the minimum-number theorems.

Theorem IV. *If* C_n^0 *and* C_0^n *be two admissible curves of class* X_n, *which have no point common with* S *between* A *and* B, *and if they fall on different sides of* S *when* n *is even or if they fall on the same side of* S *when* n *is odd, the ranges* C_n^0/S *and* C_0^n/S *are contrary and conversely.*

This theorem follows directly from definitions of positive and negative elements and those of similar and contrary ranges and does not stand in need of a formal proof.

Theorem V. *If* $C_n^0/S(AB)$ *and* $C_0^n/S(AB)$ *be two contrary ranges of order* n, *pertaining to two admissible curves* C_n^0 *and* C_0^n *of class* X_n, *then there exists a first curve of the series* C_{n-r}^r $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ *which is adventitiously bi-incident on* $S(AB)$.

Since $C_n^0/S(AB)$ and $C_0^n/S(AB)$ are, by hypothesis, each of order n, they are *clearly* bi-incident on $S(AB)$.

If all the curves of the series C_{n-r}^n $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ were *clearly* bi-incident on $S(AB)$, the ranges C_{n-r}^r/S would be all similar.

But the ranges C_n^0/S and C_0^n/S are by hypothesis, contrary. Hence there exists a first curve of the series C_{n-r}^r $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ which is adventitiously bi-incident on $S(AB)$.

Cor. *If the first curve of the series* C^r_{n-r} $(r=1, 2, \ldots, n-1)$ *which is adventitiously bi-incident on* S *be* C^k_{n-k}, *then the range* C^k_{n-k}/S *is infra-similar to* C^0_n/S.

The ranges C^r_{n-r}/S $(r=0, 1, 2, \ldots, k-1)$ are all similar, as they are a succession of clear ranges.

Let the first point of C^k_{n-k} which falls between A and B on S be L. Let s denote $S(AL)$.

The two curves C^{k-1}_{n-k+1} and C^k_{n-k} have $k-1$ consecutive points common with S at B.

Consider the series of curves of class X_{n-k+1} which have bi-incidence on s of order $n-k+1$ and pass through $k-1$ consecutive points at B which are out-side the half-plane of s.

Let C^{k-1}_{n-k+1} and C^k_{n-k} as members of this series be denoted by c^0_{n-k+1} and c^1_{n-k}. They are two consecutive curves of the series which are both *clearly* bi-incident on s.

Consequently c^0_{n-k+1}/s and c^1_{n-k}/s are similar ranges of order $n-k+1$. In other words C^{k-1}_{n-k+1}/S and C^k_{n-k}/S are infra-similar. But C^{k-1}_{n-k+1}/S is similar to C^0_n/S. Therefore C^k_{n-k}/S and C^0_n/S are infra-similar.

Theorem VI. *If* C^0_n/S *and* C^n_0/S *be two contrary ranges of order* n, *where* n *is the index of the class to which* C^0_n *and* C^n_0 *belong, then there exists on* S *a prime range belonging to a curve of the series* C^r_{n-r} $(r=1, 2, \ldots, n-1)$ *which is infra-similar to* C^0_n/S *and supra-similar to* C^n_0/S.

If C^k_{n-k} be the first curve of the series to have adventitious bi-incidence on S, then we have shown that C^k_{n-k}/S in infra-similar to C^0_n/S (*Cor. Theorem* V.)

But C^k_{n-k}/S is either a prime range or a composite range, as it has more than n elements.

In the first case we have a prime range on S infra-similar to C^0_n/S and therefore supra-similar to C^n_0/S, as C^0_n/S and C^n_0/S are contrary ranges of the same order n.

In the second case the header of the composite range will be a prime range infra-similar to C^0_n/S and therefore supra-similar to C^n_0/S.

Cor. *If* $C^0_n/S(PQ)$ *and* $C^n_0/S(PQ)$ *be two contrary ranges of order* n *pertaining to two curves* C^0_n *and* C^n_0 *of class* X_n, *clearly bi-incident on* $S(PQ)$, *then there exists on* S *between* P *and* Q *an* X_n*-point, infra-similar to* $C^0_n/S(PQ)$ *and supra-similar to* $C^n_0/S(PQ)$.

Theorem VII. *If* $C/S \equiv P(1), P(2), \ldots, P(n)$ $(n>3)$, *be a regular range on* S *of order* n, *pertaining to a circle* C, *then there exists on* S

between $P(1)$ and $P(n)$, at least $n-3$ cyclic points, of alternately contrary signs.

We will suppose that the circle determined by any three points on S varies in a continuous manner with the three determining points, in other words, that S has continuity of order 3.

The class X_3 of circles determined by any three arbitrary points on S is obviously an admissible one.

If we fix two points O_1 and O_2 on C, not in the half-plane of $S(1,n)$, then the class X_1 of circles which pass through the two fixed points O_1 and O_2 and any arbitrary point of S is obviously also an admissible one.

Again if we fix one point O_1 on C, not in the half-plane of $S(1,n)$, then the class X_2 of circles which pass through the fixed point O_1 and any two arbitrary points of S is obviously also an admissible one.

Consider first the class X_1 of circles. The range $C/S(1,2)$ which pertains to C of class X_1 is a prime one. Suppose C cuts S positively at $P(1)$ and therefore negatively at $P(2)$. Hence there exists a positive X_1-point $P(1,2)$ on S between $P(1)$ and $P(2)$. Similarly there exists a negative X_1-point $P(2,3)$ between $P(2)$ and $P(3)$. Thus there exist $n-1$ X_1-points alternately positive and negative between $P(1)$ and $P(n)$.

Next consider the class X_2 of circles. The circles C_2^0 and C_0^2 of this class have bi-incidence on $S(12,23)$, and the ranges pertaining to C_2^0 and C_0^2 on this arc are of contrary signs, that belonging to the former being positive. Hence there exists a positive X_2-point $P(1,2,3)$ on S between $P(1,2)$ and $P(2,3)$. Similarly there exists a negative X_2-point $P(2,3,4)$ on S between $P(2,3)$ and $P(3,4)$.

Consider lastly the class X_3 of circles. The circles C_3^0 and C_0^3 of this class have bi-incidence on $S(123,234)$ and the ranges pertaining to C_3^0 and C_0^3 on this arc have contrary signs, that belonging to the former being positive. Hence there exists a positive X_3-point $P(1,2,3,4)$ on S between $P(1,2,3)$ and $P(2,3,4)$. Similarly there exists a negative X_3-point $P(2,3,4,5)$ on S between $P(2,3,4)$ and $P(3,4,5)$. In this way there exist on S, between $P(1)$ and $P(n)$, $(n-3)$ X_3-points alternately positive and negative, which proves the theorem.

Theorem VIII. *If $C/S \equiv P(1), P(2), \ldots, P(n)$ $(n>5)$, be a regular range on S of order n, pertaining to a conic C, then there exists on S, between $P(1)$ and $P(n)$, at least $n-5$ sextactic points, of alternately contrary signs.*

We will suppose that the conic determined by any five points on S varies in a continuous manner with the five determining points; in other words, that S has continuity of order 5.

If we fix r points $O_1, O_2, \ldots, O_r$ $(r = 0, 1, 2, 3, 4)$ on C not in the half-plane of $S(1, n)$, then the class X_{5-r} of conics which pass through the r fixed points on C and $5 - r$ arbitrary points on S is obviously an admissible one. We can prove successively on lines similar to that adopted in Theorem VII, that if C cut S positively at $P(1)$, then there exist on S at least $n - 1$ X_1-points, $n-2$ X_2-points, $n-3$ X_3-points, $n-4$ X_4-points and finally $n - 5$ X_5-points, alternately positive and negative. Thus the theorem is proved.

Theorem IX. *If a circle C intersect an oval V at $2n$ points $(n \geqslant 2)$, then there exist at least $2n$ cyclic points, in order on V, of alternately contrary signs, provided the oval has continuity of order* 3.

To fix ideas suppose $n = 3$ and that the intersections taken in order are $P(1), P(2), \ldots, P(6)$, the point $P(1)$ being a positive intersection.

Let X_3 denote the class of circles through any three arbitrary points of V. Let $X_1(4, 5)$ denote the class of circles through the two fixed points $P(4)$, $P(5)$, and an arbitrary point on the arc $V(1, 2)$ opposite to $V(4, 5)$. Let $X_1(5, 6)$, $X_1(6, 1)$, $X_1(1, 2)$, $X_1(2, 3)$, $X_1(3, 4)$ denote corresponding classes of circles.

Again let $X_2(5)$ denote the class of circles through the fixed point $P(5)$ and any two arbitrary points on $V(1, 3)$, composed of $V(1, 2)$ and $V(2, 3)$. Let $X_2(6)$, $X_2(1)$, $X_2(2)$, $X_2(3)$, $X_2(4)$ denote corresponding classes of circles.

There exists a positive $X_1(4, 5)$-point $P(1, 2)$ on V between $P(1)$ and $P(2)$, as $P(1)$ is positive and therefore $P(2)$ is negative. Similarly there exists a negative $X_1(5, 6)$-point $P(2, 3)$ on V between $P(2)$ and $P(3)$. In this way there will exist six points $P(1, 2)$, $P(2, 3)$, $P(3, 4)$, $P(4, 5)$, $P(5, 6)$, $P(6, 1)$ in order on V, alternately positive and negative, which are, respectively, an $X_1(4, 5)$-point, an $X_1(5, 6)$-point, an $X_1(6, 1)$-point, an $X_1(1, 2)$-point, an $X_1(2, 3)$-point and an $X_1(3, 4)$-point. Since $P(1, 2)$ is a positive $X_1(4, 5)$-point and $P(2, 3)$ is a negative $X_1(5, 6)$-point they determine two circles C_2^0 and C_0^2 of the class $X_2(5)$, such that the ranges pertaining to them on $V(12, 23)$ are of contrary signs. Hence there exists a positive $X_2(5)$-point $P(123)$ on V between $P(1, 2)$ and $P(2, 3)$. Similarly there will exist a negative $X_2(6)$-point $P(234)$ on V between $P(2, 3)$ and $P(3, 4)$.

Thus there will exist six points $P(123)$, $P(234)$, $P(345)$, $P(456)$, $P(561)$ and $P(612)$ in order on V, alternately positive and negative, which are, respectively, an $X_2(5)$, an $X_2(6)$, an $X_2(1)$, an $X_2(2)$, an $X_2(3)$ and an $X_2(4)$-point.

Since $P(123)$ is a positive $X_2(5)$-point and $P(234)$ is a negative $X_2(6)$-point they determine two circles C_3^0 and C_0^3 of class X_3, such that the ranges pertaining to them on $V(123, 234)$ are of contrary signs. Hence there exists a positive X_3-point $P(1234)$ on V between $P(123)$ and $P(234)$. Similarly there exists a negative X_3-point $P(2345)$ on V between $P(234)$ and $P(345)$.

Thus there exists six X_3-points $P(1234)$, $P(2345)$, $P(3456)$, $P(4561)$, $P(5612)$ and $P(6123)$ in order on V which are alternately positive and negative. The theorem is therefore proved for $n = 3$.

The above proof is quite general in method and can be applied to any value of n [2]).

Cor. *The minimum number of cyclic points on an oval is four.*

This theorem was first published by me in 1909 in the Bulletin of the Calcutta Mathematical Society for the year.

Theorem X. *If a conic C intersects an oval V in $2n$ points $(n > 2)$ then there exists at least $2n$ sextactic points, in order on V, which are alternately positive and negative, provided V has continuity of order* 5.

To fix ideas suppose $n = 4$, and that the intersections taken in order are $P(1), P(2), \ldots, P(8)$, the point $P(1)$ being a positive intersection.

Let X_5 denote the class of conics through any five arbitrary points of V. Let $X_1(4567)$ denote the class of conics through the four fixed points $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$ and any arbitrary point on $V(1, 2)$. Let $X_2(567)$ denote the class of conics through the three fixed points $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$ and any two arbitrary points on $V(1, 3)$. Let $X_3(6, 7)$ denote the class of conics through the two fixed points $P(6), P(7)$ and any three arbitrary points on $V(1, 4)$ and finally let $X_4(7)$ denote the class of conics through the fixed point $P(7)$ and any four arbitrary points on $V(1, 5)$.

In general X_{5-r} $(p+1, p+2, \ldots, p+r)$, where $r = 1, 2, 3, 4$ and $p = 0, 1, 2, 3, \ldots, 7$ and $P(q) \equiv P(q-8)$ when q exceeds 8, denotes a class of conics through r fixed points $P(p+1), P(p+2), \ldots, P(p+r)$ and $5-r$ arbitrary points on $V(p+r+2, p+7)$.

Proceeding as in Theorem IX we have first 8 points $P(1, 2)$, $P(2, 3), \ldots, P(8, 1)$, alternatively positive and negative, which are, respectively, an $X_1(4567)$-point, an $X_1(5678)$-point, ..., an $X_1(3456)$-point.

Next we have 8 points $P(123), P(234), \ldots, P(812)$, alternately positive and negative, which are, respectively, an $X_2(567)$-point, an $X_2(678)$-point, ..., an $X_2(456)$-point.

---

[2]) W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig, 1916, p. 161.

Next we have 8 points $P(1234)$, $P(2345)$, ..., $P(8124)$, alternately positive and negative, which, are respectively, an $X_3(67)$-point, an $X_3(78)$-point, ..., an $X_3(56)$-point.

Next we have 8 points $P(12345)$, $P(23456)$, ..., $P(81234)$, alternately positive and negative, which are respectively, an $X_4(7)$-point, an $X_4(8)$-point, ..., an $X_4(6)$-point.

Lastly we have 8 points $P(123456)$, $P(234567)$, ..., $P(812345)$, alternately positive and negative, which are all X_5-points.

Thus the theorem is proved when $n = 4$. The method is general and applicable to all values of n greater than 2.

Cor. *The minimum number of sextactic points on an oval is six.*

This theorem was first published by me in the Bulletin of the Calcutta Mathematical Society for the year 1909.

(Eingegangen am 8. Oktober 1929.)

Über vollständig reduzible Ringe und Unterringe.

Von

Jakob Levitzki in New Haven (Conn., U.S.A.).

Einleitung.

In ihrer Vorlesung vom Wintersemester 1927/28 über hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie[1]) zeigte E. Noether, wie sich die Frobeniussche Theorie der Gruppendarstellung rein arithmetisch, durch Auffassung der Ideale als Gruppen mit Operatoren, begründen läßt. Diese Theorie erscheint da als Spezialfall einer allgemeinen Theorie der nichtkommutativen Ringe, in welchen der Doppelkettensatz gilt und die ohne Radikal sind. Bildet man nämlich das hyperkomplexe System einer Gruppe über einen (kommutativen) Körper (Gruppenring), so erhält man einen Ring mit obigen Eigenschaften. Die Betrachtung der Gruppencharaktere wird dabei zurückgeführt auf die Betrachtung des Zentrums, dessen Zerfällung in eine direkte Summe von (kommutativen) Körpern die verschiedenen Darstellungsklassen (zweiseitig-einfache Ideale) charakterisiert.

Gehen wir jetzt zu der Frobeniusschen Abhandlung „Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen" über[2])! Jede Darstellung einer Gruppe induziert eine solche einer Untergruppe, und umgekehrt läßt sich jede irreduzible Darstellung der Untergruppe zu einer Darstellung der ganzen Gruppe erweitern. Man erhält so eine durch die irreduzible Darstellung der Untergruppe erzeugte imprimitive Darstellung der gesamten Gruppe. Geht man zu den Charakteren über, so lassen sich die Charaktere der Elemente der Untergruppe in den irreduziblen Darstellungen der Obergruppe, durch die Charaktere dieser Elemente in den irreduziblen Darstellungen der Untergruppe linear, mit ganzzahligen Koeffizienten ausdrücken. Umgekehrt lassen sich die Charaktere jeder,

[1]) Inzwischen erschienen: Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 641—692.

[2]) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1898, S. 501—515.

durch eine irreduzible Darstellung der Untergruppe erzeugten imprimitiven Darstellung der gesamten Gruppe, linear, mit ganzzahligen Koeffizienten, durch die Charaktere der irreduziblen Darstellungen der gesamten Gruppe ausdrücken, und zwar sind diese Koeffizienten in beiden Fällen die gleichen[3]).

Diese Beziehungen lassen sich auch ringtheoretisch deuten und ableiten. Bei ihrer Herleitung zeigt es sich aber, daß der Gruppenring keine ausgezeichnete Rolle spielt (siehe § 12, wo analoge Relationen allgemein für Charaktere hyperkomplexer Systeme ohne Radikal abgeleitet werden). Es handelt sich, allgemein gesprochen, um die *Beziehungen eines vollständig reduziblen Ringes zu seinen vollständig reduziblen Unterringen*, und diese Beziehungen zu untersuchen ist der Hauptzweck dieser Arbeit.

In Kapitel I werden allgemeine vollständig reduzible Ringe und ihre allgemeinen vollständig reduziblen Unterringe betrachtet. Einem jeden solchen Unterring wird ein System von „charakteristischen" Zahlen zugeordnet (Längen, Indizes), die für alle äquivalenten Unterringe dieselben, also Klasseninvarianten sind. Diese Zahlen sind durch Relation I miteinander verknüpft. Und zwar handelt es sich um die erste der Formeln (6) von § 1 der oben zitierten Arbeit von Frobenius, welche also noch in dieser allgemeinsten Form gilt. In Kapitel II beschränken wir uns auf vollständig reduzible Ringe mit „gemeinsamem Automorphismenkörper" (§ 1, Vorbemerkung 7) und auf ebensolche Unterringe (Beispiele dafür sind die hyperkomplexen Systeme über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und ihre Untersysteme über demselben Körper, speziell die Gruppenringe über algebraisch abgeschlossenen Körpern). In diesem Fall läßt sich jede Unterringklasse vollkommen durch ihr charakteristisches Zahlensystem charakterisieren (§ 3, Eindeutigkeitssatz). In § 4 wird gezeigt, daß jedes Lösungssystem von I eine Unterringklasse (nach § 3 eindeutig) definiert, deren Repräsentant durch Konstruktion angegeben wird. Also Existenzsatz. In diesem Sinne ist also die oben erwähnte Formel von Frobenius nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. In § 5 werden aus der Gesamtheit der Unterringklassen speziellere ausgezeichnet, nämlich die Darstellungsunterringklassen: Wenn $\mathfrak{o}$ ein direkter, endlicher Modul über dem Unterring $\bar{\mathfrak{o}}$ ist, so heißt $\bar{\mathfrak{o}}$ ein Darstellungsunterring von $\mathfrak{o}$; die Basiszahl von $\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{o}}$ ist auch Klasseninvariante und heißt der Darstellungsindex. Die charakteristischen Zahlen und der Darstellungsindex sind durch das Gleichungssystem II verknüpft. Es handelt sich dabei um dieselben Relationen, die in der zweiten der Formeln (6) bei Frobenius auftreten, und da in § 6 auch für diese Klasseneinteilung ein Eindeutigkeits- und

[3]) Siehe auch E. Artin, Über eine neue Art von L-Reihen, § 1, Abh. des math. Sem. Hamburg 1923. (Vgl. Kap. III, § 12 der vorliegenden Arbeit.)

Existenzsatz gebracht werden, ist auch diese Formel bei Frobenius im gleichen Sinn wie I nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend.

Der Name Darstellungsunterring rührt daher, weil jedes zweiseitig einfache Ideal eines solchen Unterringes eine gewisse Darstellung des Oberringes im Automorphismenkörper vermittelt. Im Gruppenfall wird durch diese Darstellung, „die durch eine irreduzible Darstellung der Untergruppe erzeugte imprimitive Darstellung" der gesamten Gruppe abgeleitet. In § 7 werden weitere Klassen ausgezeichnet: es werden normale Unterringe untersucht, d. h. solche Darstellungsunterringe, bei denen es möglich ist, eine Basis von $\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{o}}$ aus lauter regulären Elementen zu wählen, die den Unterring $\bar{\mathfrak{o}}$ in sich transformieren. Die charakteristischen Zahlen und der Darstellungsindex eines normalen Unterringes erfüllen außer I und II auch noch III. In §§ 8 und 9 werden auch für diese Klasseneinteilung Eindeutigkeits- und Existenzsätze abgeleitet.

Speziell hat man bei Gruppen: Das hyperkomplexe System einer Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ über K liefert einen Darstellungsunterring des Ringes der Obergruppe $\mathfrak{G}$ über K, wo K algebraisch abgeschlossen ist. Ist ferner $\overline{\mathfrak{G}}$ eine normale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist der entsprechende Unterring $\bar{\mathfrak{o}}$ normal in $\mathfrak{o}$.

Schließlich werden im Kapitel III die Beziehungen zwischen den Darstellungen eines vollständig reduziblen Ringes und denen seines Unterringes untersucht. Auch hier werden sukzessive allgemeine vollständig reduzible Ringe, dann solche mit gemeinsamem Automorphismenkörper betrachtet. In § 10 werden schon für allgemeine vollständig reduzible Ringe die durch die Unterringe definierten induzierten und imprimitiven Darstellungen erklärt und behandelt, in § 11 wird die Betrachtung dieser Darstellungen für Ringe mit gemeinsamem Automorphismenkörper weiter geführt, und hier auch speziell für Darstellungsunterringe. Die Ergebnisse dieser beiden Paragraphen werden dann in § 12 auf Charaktere hyperkomplexer Systeme ohne Radikal angewandt, und die Relationen zwischen den Charakteren des Systems und denen des Untersystems abgeleitet. In § 13 werden schließlich durch weitere Spezialisierung, die der Gruppenring mit sich bringt, die etwas ausführlicheren Formeln von Frobenius gewonnen. In Kap. III werden nur die §§ 1, 2, 4 und 5 der vorigen Kapitel benutzt.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, Fräulein E. Noether meinen Dank für die mannigfachen Ratschläge bei der Abfassung dieser Arbeit und für das Interesse mit dem sie deren Entstehung verfolgte, auszudrücken.

Zitiert werden: E. Artin, Hamb. Abh. 1927: Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen. — G. Frobenius, die oben erwähnte Arbeit. — E. Noether, die oben erwähnte Arbeit (zitiert mit „Darstellungstheorie").

Kapitel I.

Allgemeine vollständig reduzible Ringe[4]).

§ 1.

Vorbemerkungen.

Alle Beweise dieses Paragraphen ergeben sich aus dem letzten Satz in § 14 der Darstellungstheorie — Satz von Artin.

Definition der Länge eines Ideals. Unter der Länge eines Rechts- bzw. Linksideals in einem vollständig reduziblen und zweiseitig einfachen Ring $\mathfrak{o}$ (diese Voraussetzung über $\mathfrak{o}$ soll für den ganzen § 1 gelten) versteht man die Anzahl der einseitig einfachen Komponenten, in deren direkte Summe das betreffende Links- bzw. Rechtsideal zerfällt.

1. Ist $\mathfrak{o}$ vollständig reduzibel und zweiseitig einfach, so sind alle einfachen Rechtsideale untereinander äquivalent; dasselbe gilt für die Linksideale. (Zwei Rechtsideale $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ heißen zueinander äquivalent, wenn es ein reguläres Element s gibt, so daß $\mathfrak{v} = s^{-1}\mathfrak{v}'s$ ist.) Sind nämlich $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ die einfachen Rechtsideale, so ergänze man $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ zu einer vollen Zerlegung von $\mathfrak{o}$ und wende den Artinschen Satz an. Entsprechend für Linksideale.

2. Allgemeiner: Haben $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ gleiche Länge, so sind sie zueinander äquivalent. Dies beweist man wie 1. Außerdem sind sie operatorisomorph, weil bei direkter Summenbildung die Operatorisomorphie (wie auch die Äquivalenz) erhalten bleibt. Aus $\mathfrak{v}_1' \simeq \mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2' \simeq \mathfrak{v}_2$ folgt $\mathfrak{v}_1' + \mathfrak{v}_2' \simeq \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$.

3. Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 + \ldots + \mathfrak{s}_s$ eine direkte Summe von Rechtsidealen, die sämtlich die gleiche Länge haben, so ergibt ihr Operatorisomorphismus (2.) ein System von Matrizeneinheiten C_{ik} $(i, k = 1, \ldots, s)$. Der Beweis verläuft genau so wie für den Fall, daß die $\mathfrak{s}_i$ einfach sind (Darstellungstheorie, § 14), oder indem man die $\mathfrak{s}_i$ in einfache Komponenten zerlegt, für diese die entsprechenden Matrizeneinheiten c_{ik} konstruiert und daraus durch Addition entsprechender c_{ik} die C_{ik} erhält.

4. Sind d und $\bar{d}$ idempotente Elemente, derart daß $d\,\mathfrak{o}$ und $\bar{d}\,\mathfrak{o}$ von gleicher Länge sind, so enthalten die Ringe $d\,\mathfrak{o}\,\bar{d}$ und $\bar{d}\,\mathfrak{o}\,d$ zueinander reziproke Elemente bezüglich d und $\bar{d}$. Dabei definieren wir: Zwei Elemente x und y heißen zueinander reziprok bezüglich d und $\bar{d}$, falls x ein Element aus $d\,\mathfrak{o}\,\bar{d}$, y ein Element aus $\bar{d}\,\mathfrak{o}\,d$ ist, und falls folgende Relationen erfüllt sind: $xy = d$; $yx = \bar{d}$.

---

[4]) Unter vollständig reduziblen Ringen werden immer solche mit Einheitselement verstanden.

Der Beweis von 4. verläuft wiederum wie der Beweis des Artinschen Satzes (Darstellungstheorie, § 14): Man ergänze $d\,\mathfrak{o}$ und $\bar{d}\,\mathfrak{o}$ je zu einer vollen Zerlegung; es sei $d\,\mathfrak{o} = \mathfrak{v}_1 + \ldots + \mathfrak{v}_t$; $\bar{d}\,\mathfrak{o} = \bar{\mathfrak{v}}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{v}}_t$. Es seien c_{ik}, $\bar{c}_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, t)$ irgendein System entsprechender Matrizeneinheiten. Ist dann $\mathfrak{v}_1 = a\,\bar{\mathfrak{v}}_1$; $\bar{\mathfrak{v}}_1 = b\,\mathfrak{v}_1$ und $a\,b = c_{11}$, $b\,a = \bar{c}_{11}$; so setze man $x = \sum_{i=1}^{t} c_{i1}\,a\,\bar{c}_{1i}$; $y = \sum \bar{c}_{i1}\,b\,\bar{c}_{1i}$ dann wird $x\,y = d$; $y\,x = \bar{d}$ oder auch $x\,\bar{d}\,y = d$, $y\,d\,x = \bar{d}$.

5. Ist d idempotent, so ist der Ring $d\,\mathfrak{o}\,d$ vollständig reduzibel und zweiseitig einfach. Es sei nämlich wie unter 4. $d\,\mathfrak{o} = \mathfrak{v}_1 + \ldots + \mathfrak{v}_t$ und c_{ik} ein zu der ergänzten Zerlegung gehöriges Matrizensystem. Dann wird $d\,\mathfrak{o}\,d = \sum_{1}^{t} \mathfrak{v}_i\,\mathfrak{l}_k = \sum_{1}^{t} \mathsf{K}\,c_{ik}$. Dieser Ring ist aber vollständig reduzibel und zweiseitig einfach, und zwar ist d seine Einheit und K sein Automorphismenkörper. Dies folgt nämlich aus dem Umkehrsatz von Darstellungstheorie, § 14.

6. Es sei $\mathfrak{Z}$ das Zentrum von $\mathfrak{o}$. Ist K irgendein Automorphismenkörper von $\mathfrak{o}$, und c_{ik} irgendein Matrizensystem von $\mathfrak{o}$ über K, so bildet die Gesamtheit der Elemente der Form $\sum \mathfrak{Z}_{ik}\,c_{ik}$, wo $\mathfrak{Z}_{ik}$ Elemente des Zentrums sind, ein hyperkomplexes System über $\mathfrak{Z}$, welches (nach dem Umkehrsatz von § 14, Darstellungstheorie) vollständig reduzibel und zweiseitig einfach ist. Wir nennen dieses hyperkomplexe System „das zu K gehörige System“ und bezeichnen es mit $\mathfrak{S}_{\mathsf{K}}$. Es gilt der

Satz. *Das zu* K *gehörige System ist eindeutig bestimmt als die Gesamtheit der mit* K *vertauschbaren Elemente* $\mathfrak{o}$.

Beweis. Ist das Element $a = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\,k_{\alpha\beta}$ mit jedem Element k aus K vertauschbar: $k\,a = a\,k$, so muß $k_{\alpha\beta}\cdot k = k\,k_{\alpha\beta}$ für jedes k aus K sein, d. h. alle $k_{\alpha\beta}$ liegen im Zentrum von K (oder, was nach § 14, Darstellungstheorie dasselbe ist, im Zentrum von $\mathfrak{o}$), d. h. a ist ein Element aus $\mathfrak{S}_{\mathsf{K}}$. Ist, umgekehrt, a ein Element aus $\mathfrak{S}_{\mathsf{K}}$, also von der Form $a = \sum c_{\alpha\beta}\,\mathfrak{Z}_{\alpha\beta}$ mit $\mathfrak{Z}_{\alpha\beta}$ aus $\mathfrak{Z}$, so ist a mit jedem Element aus K vertauschbar, da sowohl die $\mathfrak{Z}_{\alpha\beta}$ als auch die $c_{\alpha\beta}$ es sind. Damit ist der Satz bewiesen.

7. Definition. Ein vollständig reduzibler, nicht notwendig zweiseitig einfacher Ring $\mathfrak{o}$ heißt von gemeinsamem Automorphismenkörper, wenn die Automorphismenkörper K_i seiner zweiseitigen Komponenten ringisomorph sind.

Satz. *Ein solcher Ring* $\mathfrak{o}$ *besitzt einen zu allen* K_i *isomorphen Unterkörper* K, *derart daß* $\mathsf{K}_i = \mathsf{K}\,E_i$, *wo* E_i *die Einheit des zweiseitig einfachen Ideals* $\mathfrak{o}_i$ *von* $\mathfrak{o}$ *bedeutet. Es wird* $\mathfrak{o}$ *von endlichem Rang in bezug auf* K.

Denn sind vermöge eines festen Isomorphismus die einander entsprechen den Elemente $k_1 E_1, \ldots, k_i E_i, \ldots, k_s E_s$ gegeben, so setze man $k = \sum_1^s k_i E_i$ dann wird K gleich der Menge aller k; somit auch $\mathfrak{o}_\alpha = \sum_{i,k} c_{ik}^{(\alpha)} \mathrm{K} E_\lambda = \sum_{i,k} c_{ik}^{(\alpha)} \mathrm{K}$ und da K zu allen K_i isomorph wird, ist damit alles bewiesen.

Bemerkung. Die hyperkomplexen Systeme ohne Radikal über algebraisch abgeschlossenen Körpern sind Beispiele für 7.

§ 2.

Beziehungen zwischen den Längen und Indizes bei vollständig reduziblen Unterringen.

Es sei $\mathfrak{o}$ ein vollständig reduzibler Ring. Ist $\bar{\mathfrak{v}}$ ein Rechtsideal aus $\bar{\mathfrak{o}}$ wo $\bar{\mathfrak{o}}$ ein Unterring von $\mathfrak{o}$ ist, so wird das abgeleitete Ideal $\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{o}$ als das *Erweiterungsideal* bezeichnet.

Hilfssatz 1. Ist $\bar{\mathfrak{o}}$ vollständig reduzibel, so entspricht einer direkten Summe von Idealen aus $\bar{\mathfrak{o}}$ eine solche der Erweiterungsideale; d. h. aus der Direktheit von $\sum \bar{\mathfrak{v}}_i$ folgt die Direktheit von $\sum \bar{\mathfrak{v}}_i \mathfrak{o}$.

Beweis. Es ist $\sum \bar{\mathfrak{v}}_i = \sum \bar{e}_i \bar{\mathfrak{o}}$ mit orthogonalen $\bar{e}_i$, also ist auch die Summe $\sum \bar{e}_i \mathfrak{o}$ direkt; nun ist $\bar{e}_i \mathfrak{o} = \bar{\mathfrak{v}}_i \mathfrak{o}$. Denn sei $\bar{d}$ die Einheit von $\bar{\mathfrak{v}}$ dann ist $\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{o} = \bar{d}\mathfrak{o}$; also $\bar{e}_i \bar{\mathfrak{v}} \mathfrak{o} = \bar{e}_i \bar{d} \mathfrak{o} = \bar{e}_i \mathfrak{o}$, w. z. b. w.

Definition des Index. Sei $\mathfrak{o}$ ein vollständig reduzibler und zweiseitig einfacher Ring; es sei $\bar{\mathfrak{o}}$ ein vollständig reduzibler und zweiseitig einfacher Unterring. Der Index eines einfachen Rechtsideals $\bar{\mathfrak{v}}$ aus $\bar{\mathfrak{o}}$ in bezug auf $\mathfrak{o}$ ist die Länge des Erweiterungsideals $\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{o}$, also die Anzahl der einfachen Komponenten von $\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{o}$; entsprechend ist der Index eines einfachen Linksideals definiert.

Satz 1. *Der Index aller einfachen Rechtsideale und Linksideale aus $\bar{\mathfrak{o}}$ ist derselbe; der Index ist also eine Invariante von $\bar{\mathfrak{o}}$ als Unterring von $\mathfrak{o}$. Bezeichnung: Index j von $\bar{\mathfrak{o}}$ in bezug auf $\mathfrak{o}$.*

Beweis. Seien $\bar{\mathfrak{v}}_1$ und $\bar{\mathfrak{v}}_2$ zwei verschiedene einfache Rechtsideale aus $\bar{\mathfrak{o}}$. Dann sind sie operatorisomorph; also

$$\bar{\mathfrak{v}}_1 = \bar{c}_{12} \bar{\mathfrak{v}}_2 \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{v}}_2 = \bar{c}_{21} \bar{\mathfrak{v}}_1 .$$

Folglich gilt auch für die Erweiterungsideale

$$\bar{\mathfrak{v}}_1 \mathfrak{o} = \bar{c}_{12} \bar{\mathfrak{v}}_2 \mathfrak{o} \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{v}}_2 \mathfrak{o} = \bar{c}_{21} \bar{\mathfrak{v}}_1 \mathfrak{o},$$

also ist das Ideal $\bar{\mathfrak{v}}_1 \mathfrak{o}$ das homomorphe Bild von $\bar{\mathfrak{v}}_2 \mathfrak{o}$ und umgekehrt daraus folgt, daß der Index von $\bar{\mathfrak{v}}_1 \leqq$ ist als der Index von $\bar{\mathfrak{v}}_2$ und umgekehrt. Also sind die Längen von $\bar{\mathfrak{v}}_1 \mathfrak{o}$, $\bar{\mathfrak{v}}_2 \mathfrak{o}$ einander gleich. Da allgemein die Längen von $d\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}d$ übereinstimmen, so ist auch *der Rechtsindex gleich dem Linksindex.*

Folgerungen: 1. Ist ein Rechtsideal $\bar{s}$ aus $\bar{\mathfrak{o}}$ von Länge $\bar{s}$, so ist $\bar{s}\,\mathfrak{o}$ von Länge $\bar{s}j$. (Folgt aus Satz 1 und Hilfssatz 1.)

2. Haben insbesondere $\mathfrak{o}$ und $\bar{\mathfrak{o}}$ gleiches Einheitselement, so ist $n = j\bar{n}$.

3. Der Ring $d\,\mathfrak{o}\,d$, wo d ein beliebiges idempotentes Element ist, hat den Index 1.

4. Ist $\bar{\mathfrak{o}} \subset \bar{\bar{\mathfrak{o}}} \subset \mathfrak{o}$ mit gem. Einheit, wobei $\bar{\mathfrak{o}}$, $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$, $\mathfrak{o}$ vollständig reduzibel und zweiseitig einfach sind, so ist Index $(\mathfrak{o}:\bar{\mathfrak{o}})$ = Index $(\mathfrak{o}:\bar{\bar{\mathfrak{o}}})\cdot$Index $(\bar{\bar{\mathfrak{o}}}:\bar{\mathfrak{o}})$.

Satz 2. (Spezielle Beziehung zwischen Länge und Index.) *Es sei $\mathfrak{o}$ vollständig reduzibel und zweiseitig einfach von der Länge n. Ein vollständig reduzibler Unterring $\bar{\mathfrak{o}}$ habe mit $\mathfrak{o}$ die Einheit gemein. Ist $\bar{\mathfrak{o}} = \sum_1^{\bar{r}} \bar{\mathfrak{o}}_i$ die Zerlegung von $\bar{\mathfrak{o}}$ in zweiseitig einfache Ringe, $\bar{n}_\lambda$ die Länge von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ und j_λ der Index von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ in $\mathfrak{o}$, so gilt die Relation* (1): $n = \sum_1^{\bar{r}} \bar{n}_\lambda j_\lambda$.

Beweis. Es ist $\bar{\mathfrak{o}}\,\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ wegen der Voraussetzung über das Einheitselement. Also (nach Hilfssatz 1):

$$\mathfrak{o} = \bar{\mathfrak{o}}\,\mathfrak{o} = \bar{\mathfrak{o}}_1\,\mathfrak{o} + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}_{\bar{r}}\,\mathfrak{o}.$$

Nun ist $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ als Rechtsideal in $\bar{\mathfrak{o}}$ von Länge $\bar{n}_\lambda$; und $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ vom Index j_λ in $\mathfrak{o}$. Nach der Folgerung 1 wird also $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda\,\mathfrak{o}$ von Länge $\bar{n}_\lambda j_\lambda$, woraus durch Addition $n = \sum_1^{\bar{r}} \bar{n}_\lambda j_\lambda$ folgt.

Als Vorbereitung zur allgemeinen Beziehung dient

Hilfssatz 2. Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^{(1)} + \ldots + \mathfrak{o}^{(n)}$ eine zweiseitige Zerlegung des Ringes $\mathfrak{o}$ (mit Einheitselement); ist $\bar{\mathfrak{o}}$ zweiseitig einfach und $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)}$ die Komponente von $\bar{\mathfrak{o}}$ in $\mathfrak{o}^{(\nu)}$, so ist $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)}$ ringisomorph zu $\bar{\mathfrak{o}}$ oder gleich der Nullmenge.

Beweis. $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)}$ ist nämlich ein ringhomomorphes Bild von $\bar{\mathfrak{o}}$, und da $\bar{\mathfrak{o}}$ zweiseitig einfach ist, so muß $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)}$ isomorph zu $\bar{\mathfrak{o}}$ oder gleich der Nullmenge sein.

Hilfssatz 3. Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^{(1)} + \ldots + \mathfrak{o}^{(r)}$; $E = E^{(1)} + \ldots + E^{(r)}$, also $\mathfrak{o}^{(\nu)} = E^{(\nu)}\,\mathfrak{o}$, so wird $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)} = E^{(\nu)}\,\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}\,E^{(\nu)}$.

Beweis. Folgt aus der Definition der Komponente.

Hilfssatz 4. Sind $\mathfrak{o}$ und $\bar{\mathfrak{o}}$ Ringe mit Einheit, ist $\mathfrak{o} = \sum_1^{r} \mathfrak{o}^{(i)}$; $\bar{\mathfrak{o}} = \sum_1^{\bar{r}} \bar{\mathfrak{o}}_i$ und ferner $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ die Komponente von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ in $\mathfrak{o}^{(\nu)}$, so ist die Summe über die von Null verschiedenen Komponenten $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ $(\lambda = 1, \ldots, \bar{r})$ direkt und gleich der Komponente $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)}$ von $\bar{\mathfrak{o}}$ in $\mathfrak{o}^{(\nu)}$.

Beweis. Ist nämlich $\bar{e}_\lambda^{(\nu)}$ die Komponente von $\bar{e}_\lambda$, so bestehen zwischen den von Null verschiedenen wegen der Ringhomomorphie $\bar{\mathfrak{o}} \sim \bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)}$ die Ortho-

gonalitätsbedingungen, und $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)} = \bar{e}_\lambda^{(\nu)} \bar{\mathfrak{o}}$. Die Summe $\sum_\lambda \bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ soll mit $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)}$ bezeichnet werden. Sie ist die Komponente von $\bar{\mathfrak{o}}$ in $\mathfrak{o}^{(\nu)}$. Denn es ist $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)} = e^{(\nu)} \bar{\mathfrak{o}} = \sum_\lambda e^{(\nu)} \bar{\mathfrak{o}}_\lambda = \sum_\lambda e^{(\nu)} \bar{e}_\lambda^{(\nu)} \bar{\mathfrak{o}} = \sum_\lambda \bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$.

Satz 3. (Allgemeine Beziehung zwischen Länge und Index.)

Voraussetzung. *Sei* $\mathfrak{o}$ *vollständig reduzibel;* $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^{(1)} + \ldots + \mathfrak{o}^{(r)}$ *seine Zerlegung in zweiseitig einfache Ringe. Sei weiter* $\bar{\mathfrak{o}}$ *ein vollständig reduzibler Unterring, der mit* $\mathfrak{o}$ *die Einheit gemein hat, und* $\bar{\mathfrak{o}} = \sum_{i=1}^{\bar{r}} \bar{\mathfrak{o}}_i$ *seine zweiseitig einfache Zerlegung. Sei* $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)} = \sum_\lambda \bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$, *wo* $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ *die Komponente von* $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ *in* $\mathfrak{o}^{(\nu)}$. *Die Länge von* $\mathfrak{o}^{(\nu)}$ *sei mit* $n^{(\nu)}$, *die von* $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ *mit* $\bar{n}_\lambda$ *bezeichnet und der Index von* $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ *in bezug auf* $\mathfrak{o}^{(\nu)}$ *mit* $j_\lambda^{(\nu)}$; *ist* $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ *gleich der Nullmenge, so wird* $j_\lambda^{(\nu)}$ *gleich Null gesetzt.*

Behauptung. *Unter diesen Voraussetzungen gelten die Relationen*

I. $$\boxed{n^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{\bar{r}} \bar{n}_\lambda j_\lambda^{(\nu)}, \quad \nu = 1, \ldots, r.}$$

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß der Ring $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)} = \sum_\lambda \bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ in bezug auf den zweiseitig einfachen Ring $\mathfrak{o}^{(\nu)}$ die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt. Nach Hilfssatz 4 ist er nun vollständig reduzibel und $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)}$ die Komponente von $\bar{\mathfrak{o}}$ in $\mathfrak{o}^{(\nu)}$; also stimmt seine Einheit mit der von $\mathfrak{o}^{(\nu)}$ überein, da dies für $\mathfrak{o}$ und $\bar{\mathfrak{o}}$ vorausgesetzt ist.

Definition. Die Zahlen n_λ, $j_\lambda^{(\nu)}$, $\bar{r}$, die also der Relation I genügen müssen, sollen die *charakteristischen Zahlen* von $\bar{\mathfrak{o}}$ in bezug auf $\mathfrak{o}$ heißen. Die charakteristischen Zahlen gehen offenbar bei jedem inneren Automorphismus in sich über. Rechnet man also alle äquivalenten Unterringe — $A \bar{\mathfrak{o}} A^{-1}$ — mit regulärem A in eine Klasse, so folgt, daß die charakteristischen Zahlen *Klasseninvarianten* sind.

Kapitel II.

Ringe mit gemeinsamem Automorphismenkörper.

Diese Voraussetzung soll von jetzt an sowohl für $\mathfrak{o}$ als auch für $\bar{\mathfrak{o}}$ gemacht werden, und zwar soll der gemeinsame Automorphismenkörper von $\bar{\mathfrak{o}}$ durch $\bar{d} K \bar{d}$ gegeben sein, wenn K ein Automorphismenkörper von $\mathfrak{o}$ und $\bar{d}$ die Einheit von $\bar{\mathfrak{o}}$ ist (Vorbemerkung 7) [5]).

[5]) Die in diesem Kapitel gemachte Voraussetzung ist z. B. erfüllt, wenn man ein hyperkomplexes System $\mathfrak{o}$ mitsamt den hyperkomplexen Untersystemen, über ein und demselben algebraisch abg. Körper K betrachtet.

§ 3.

Eindeutigkeitssatz. Die charakteristischen Zahlen charakterisieren die Unterringklasse.

Die Beweisführung verläuft auch hier, wie in § 2, in drei Stufen: 1. $\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{o}}$ zweiseitig einfach; 2. nur $\mathfrak{o}$ zweiseitig einfach; 3. weder $\mathfrak{o}$ noch $\bar{\mathfrak{o}}$ zweiseitig einfach.

Satz 1. *Sind $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ vollständig reduzibel und zweiseitig einfache Unterringe von $\mathfrak{o}$ ($\mathfrak{o}$ zweiseitig einfach) mit gemeinsamen Automorphismenkörpern, die mit $\mathfrak{o}$ die Einheit gemein haben und die in ihren charakteristischen Zahlen übereinstimmen, so gehören sie derselben Klasse an.*

Beweis Es sei $\bar{\bar{\mathsf{K}}} = \bar{\mathsf{K}} = \mathsf{K}$[6]); ferner sei

$$\bar{\mathfrak{o}} = \sum \mathsf{K}\, \bar{C}_{ik}; \qquad \bar{\bar{\mathfrak{o}}} = \sum \mathsf{K}\, \bar{\bar{C}}_{ik},$$

oder ausgedrückt als direktes Produkt:

$$\mathfrak{o} = \mathsf{K} \times \sum \mathfrak{Z}\, c_{ik}; \quad \bar{\mathfrak{o}} = \mathsf{K} \times \sum \mathfrak{Z}\, \bar{C}_{ik}; \quad \bar{\bar{\mathfrak{o}}} = \mathsf{K} \times \sum \mathfrak{Z}\, \bar{\bar{C}}_{ik},$$

wo $\mathfrak{Z}$ das Zentrum von $\mathfrak{o}$ bedeutet.

Hilfssatz. Es genügt, Satz 1 für das zugehörige System $\mathfrak{S}_\mathsf{K} = \sum \mathfrak{Z}\, c_{ik}$ zu beweisen. Denn $\bar{\mathfrak{S}}_\mathsf{K} = \sum \mathfrak{Z}\, \bar{C}_{ik}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}_\mathsf{K} = \sum \mathfrak{Z}\, \bar{\bar{C}}_{ik}$ sind Unterringe von $\mathfrak{S}_\mathsf{K}$; außerdem stimmen die charakteristischen Zahlen überein, denn $\mathfrak{S}_\mathsf{K}$ und die Unterringe $\bar{\mathfrak{S}}_\mathsf{K}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}_\mathsf{K}$ haben bzw. die Länge n, $\bar{n}$; also sind $\bar{\mathfrak{S}}_\mathsf{K}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}_\mathsf{K}$ vom gleichen Index j. Jede Transformation von $\bar{\mathfrak{S}}_\mathsf{K}$ in $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}_\mathsf{K}$ führt K in sich über, ergibt also auch eine solche von $\bar{\mathfrak{o}}$ in $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$.

Der Beweis der Äquivalenz von $\bar{\mathfrak{S}}_\mathsf{K}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}_\mathsf{K}$ wird mit Hilfe von Vorbemerkung 4 geführt.

Es seien r_1 und s_1 zwei reziproke Elemente in bezug auf $\bar{C}_{11}$ und $\bar{\bar{C}}_{11}$, so daß also $\bar{C}_{11} = r_1 s_1$, $\bar{\bar{C}}_{11} = s_1 r_1$; wir bilden ferner die Elemente $r_i = \bar{C}_{i1} r_1 \bar{\bar{C}}_{1i}$ und $s_i = \bar{\bar{C}}_{i1} s_1 \bar{C}_{1i}$ und daraus das Element $R = \sum_{i=1}^{\bar{n}} r_i$ resp. $S = \sum_{i=1}^{\bar{n}} s_i$. Man sieht dann, daß die Elemente R und S regulär in $\mathfrak{S}_\mathsf{K}$ sind, so daß man setzen kann $S = R^{-1}$. Ferner ist $R\, \bar{\bar{C}}_{ik} R^{-1} = \bar{C}_{ik}$, woraus also folgt, da $R\, \mathfrak{Z}\, R^{-1} = \mathfrak{Z}$ ist, daß $R\, \bar{\bar{\mathfrak{o}}}\, R^{-1} = \bar{\mathfrak{o}}$ ist. w. z. b. w.

Satz 2. *Sei $\mathfrak{o}$ vollständig reduzibel und zweiseitig einfach, $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}_{\bar{r}}$, $\bar{\bar{\mathfrak{o}}} = \bar{\bar{\mathfrak{o}}}_1 + \ldots + \bar{\bar{\mathfrak{o}}}_{\bar{r}}$ seien vollständig reduzible Unterringe mit gleichen charakteristischen Zahlen mit gemeinsamem Automorphismenkörper; ferner sollen $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ mit $\mathfrak{o}$ die Einheit gemein haben. Dann gehören $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ derselben Klasse an.*

---

[6]) Denn ist etwa $A^{-1} \bar{\mathsf{K}}\, A = \bar{\mathsf{K}}$ mit regulärem A, so haben die Unterringe $A^{-1}\, \bar{\bar{\mathfrak{o}}}\, A$ und $\bar{\mathfrak{o}}$ den Automorphismenkörper K gemein.

Beweis. Der Beweis besteht in der Zurückführung auf Satz 1 durch den

Hilfssatz. Es gibt ein reguläres Element A, so daß der Ring $\mathfrak{o}^\alpha = A^{-1}\bar{\mathfrak{o}}A$ mit $\bar{\mathfrak{o}}$ die zweiseitigen Einheiten — und natürlich auch die charakteristischen Zahlen — gemein hat.

Es sei $\overline{E}_\lambda \bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ und $\overline{\overline{E}}_\lambda \bar{\mathfrak{o}} = \bar{\bar{\mathfrak{o}}}_\lambda$; dann sind — nach Voraussetzung — die Ideale $\overline{E}_\lambda \mathfrak{o}$ und $\overline{\overline{E}}_\lambda \mathfrak{o}$ von gleicher Länge; also gibt es reziproke Elemente a_λ und b_λ, so daß $a_\lambda b_\lambda = \overline{\overline{E}}_\lambda$; $b_\lambda a_\lambda = \overline{E}_\lambda$; $a_\lambda = \overline{\overline{E}}_\lambda a_\lambda \overline{E}_\lambda$ $b_\lambda = \overline{E}_\lambda b_\lambda \overline{\overline{E}}_\lambda$, also $b_\lambda \overline{\overline{E}}_\lambda a_\lambda = \overline{E}_\lambda$. Dann leistet $A = \sum_\lambda b_\lambda$; $A^{-1} = \sum_\lambda a_\lambda$ das Gewünschte.

Sei also jetzt $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}_r$; $\mathfrak{o}^\alpha = \mathfrak{o}_1^\alpha + \ldots + \mathfrak{o}_r^\alpha$ mit gleichen charakteristischen Zahlen, so daß die zweiseitig einfachen Ideale $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ und $\mathfrak{o}_\lambda^\alpha$ die Einheiten gemein haben. Dann sind $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ und $\mathfrak{o}_\lambda^\alpha$ zweiseitig einfache Unterringe von $\overline{E}_\lambda \mathfrak{o} \overline{E}_\lambda$ von Länge $\bar{n}_\lambda$ und Index j_λ (§ 2, Folgerung 3 und 4) also durch in $\overline{E}_\lambda \mathfrak{o} \overline{E}_\lambda$ reguläres Element g_λ ineinander überführbar. Das reguläre Element $G = \sum g_\lambda$ in $\mathfrak{o}$ führt dann $\bar{\mathfrak{o}}$ in $\mathfrak{o}^\alpha$ über.

Satz 3. (Allgemeiner Eindeutigkeitssatz.) *Sind $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ vollständig reduzible Unterringe des vollständig reduziblen Ringes $\mathfrak{o}$, mit gleichen charakteristischen Zahlen und von gemeinsamem Automorphismenkörper haben ferner die Ringe $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ mit $\mathfrak{o}$ die Einheit gemein, so gehören sie derselben Klasse an.*

Beweis. Der Beweis geschieht durch Zurückführung auf Satz 2. Es sei, wie in Hilfssatz 4, § 2:

$$\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)} = \sum_\lambda{}' \bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}; \qquad \bar{\bar{\mathfrak{o}}}^{(\nu)} = \sum_\lambda{}' \bar{\bar{\mathfrak{o}}}_\lambda^{(\nu)} \text{ [7]},$$

dann sind für $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}^{(\nu)}$ als Unterringe von $\mathfrak{o}^{(\nu)}$ die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt. Insbesondere gibt es also ein solches reguläres Element B_ν in $\mathfrak{o}^{(\nu)}$, so daß $B_\nu^{-1} \bar{\bar{\mathfrak{o}}}_\lambda^{(\nu)} B_\nu = \bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ ist, und ferner können die B_ν so *gewählt* werden, daß, wenn man $B = \sum_\nu B_\nu$ setzt, B regulär wird und $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ in $\bar{\mathfrak{o}}$ überführt. Man muß nämlich im allgemeinen auf $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^\nu$ noch einen inneren Automorphismus ausüben — B_ν durch $\bar{R}_\nu B_\nu$ ersetzen —, um von der Gleichheit der Ringkomponenten zu der Gleichheit der Elementkomponenten und damit der Ringe zu gelangen.

§ 4.

Existenzsatz: Zu jedem Lösungssystem von I existiert eine Unterringklasse.

Entsprechend §§ 2 und 3 wird auch der Beweis des Existenzsatzes in drei Schritten geführt.

---

[7]) $\sum'$ bedeutet, daß nur über solche λ summiert wird, für die $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)} \neq 0$ ist.

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{o}$ *zweiseitig einfach von der Länge* n, *so gibt es zu jedem Wertepaar* $\bar{n}, j$, *für das* $n = \bar{n}\, j$ *wird, einen zweiseitig einfachen Unterring* $\bar{\mathfrak{o}}$, *dessen charakteristische Zahlen durch* $\bar{n}$ *und* j *gegeben sind. Ferner kann man* $\bar{\mathfrak{o}}$ *so wählen, daß er einen gemeinsamen Automorphismenkörper mit* $\mathfrak{o}$ *hat.*

Beweis. Sei

$$(1) \qquad \mathfrak{o} = (\mathfrak{v}_1 + \ldots + \mathfrak{v}_j) + (\mathfrak{v}_{j+1} + \ldots + \mathfrak{v}_{2j}) + \ldots + (\mathfrak{v}_{(\bar{n}-1)j+1} + \ldots + \mathfrak{v}_{\bar{n}j}) = \mathfrak{s}_1 + \ldots + \mathfrak{s}_{\bar{n}}.$$

Dann existieren solche C_{ik} $(i, k = 1, \ldots, \bar{n})$, die den Operatorisomorphismus der $\mathfrak{s}$ vermitteln (Vorbemerkung 3), daß $\bar{\mathfrak{o}} = \sum \mathsf{K}\, C_{ik}$ der gesuchte Ring wird, wo $\sum \mathsf{K}\, c_{ik}$ eine aus (1) entspringende Matrizendarstellung ist. Man setze nämlich $C_{11} = c_{11} + \ldots + c_{jj}, \ldots, C_{\mu,1} = c_{(\mu-1)j+1,1} + \ldots + c_{\mu j, j}$; $C_{1\mu} = C_{1,(\mu-1)j+1} + \ldots + C_{j,\mu j}$; $C_{\mu\lambda} = C_{\mu 1}\, C_{1\lambda}$. Dann ist K mit den C_{ik} vertauschbar und $\bar{\mathfrak{o}} = \sum \mathsf{K}\, C_{ik}$ ist der gesuchte Ring.

Satz 2. *Ist* $\mathfrak{o}$ *zweiseitig einfach, von der Länge* n, *so gibt es zu jedem Lösungssystem* $\bar{r}, \bar{n}_\lambda, j_\lambda$ *von*

$$(1) \qquad n = \sum_{\lambda=1}^{\bar{r}} \bar{n}_\lambda j_\lambda$$

einen vollständig reduziblen Unterring $\bar{\mathfrak{o}}$ *mit den charakteristischen Zahlen* $\bar{r}, \bar{n}_\lambda, j_\lambda$ *und mit* $\mathfrak{o}$ *gemeinsamen Automorphismenkörper.*

Beweis. Sei durch Zusammenfassen der $\mathfrak{v}$ wie bei Satz 1

$$\mathfrak{o} = (\mathfrak{s}_1^{(1)} + \ldots + \mathfrak{s}_{\bar{n}_1}^{(1)}) + (\mathfrak{s}_1^{(2)} + \ldots + \mathfrak{s}_{\bar{n}_2}^{(2)}) + \ldots + (\mathfrak{s}_1^{\bar{r}} + \ldots + \mathfrak{s}_{\bar{n}_{\bar{r}}}^{\bar{r}}),$$

wobei die $\mathfrak{s}^{(\lambda)}$ von der Länge j_λ; eine Zusammenfassung, die nach I möglich ist. Konstruiert man die $C_{ik}^{(\lambda)}$ wie bei Satz 1 vermöge der $\mathfrak{s}_1^{(\lambda)}, \ldots, \mathfrak{s}_{\bar{n}_\lambda}^{(\lambda)}$, so ergibt $\bar{\mathfrak{o}} = \sum_\lambda \bar{\mathfrak{o}}_\lambda = \sum_i \sum_k \mathsf{K}\, C_{ik}^{(\lambda)}$ den gesuchten Ring. Denn $\bar{\mathfrak{o}}$ besitzt den gemeinsamen Automorphismenkörper K; seine zweiseitig einfache Komponente $\mathsf{K}\, E^{(\lambda)}$, wo $E^{(\lambda)} = \sum_i C_{ii}^{(\lambda)}$, $\sum_\lambda E^{(\lambda)} = E$, und die Zahlen $\bar{r}, \bar{n}_\lambda, j_\lambda$ als charakteristische Zahlen.

Satz 3. (Allgemeiner Existenzsatz.) *Ist* $\mathfrak{o}$ *vollständig reduzibel mit gemeinsamem Automorphismenkörper, von den Längen* $n^{(\nu)}$, *so gibt es zu jedem Lösungssystem* $\bar{r}, \bar{n}_\lambda, j_\lambda^{(\nu)}$ *von*

$$(1) \qquad n^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{\bar{r}} \bar{n}_\lambda j_\lambda^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

einen vollständig reduziblen Unterring mit den charakteristischen Zahlen $\bar{r}, \bar{n}_\lambda, j_\lambda^{(\nu)}$ *und mit gemeinsamem Automorphismenkörper.*

Beweis. Sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^{(1)} + \ldots + \mathfrak{o}^{(\nu)} + \ldots + \mathfrak{o}^{(r)}$, dann sind für jedes einzelne $\mathfrak{o}^{(\nu)}$ die Bedingungen von Satz 2 erfüllt; also gibt es einen Unterring $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)} = \sum' \bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ mit den charakteristischen Zahlen $\bar{n}_\lambda, j_\lambda^{(\nu)}, \bar{r}_\lambda$, in bezug auf $\mathfrak{o}^{(\nu)}$; und mit dem Automorphismenkörper $K E^{(\nu)}$, wo $E^{(\nu)}$ die Einheit von $\mathfrak{o}^{(\nu)}$; also sind für jedes λ die von Null verschiedenen $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ alle ringisomorph, weil ihre Automorphismenkörper und Länge übereinstimmen. Konstruiert man also, wenn ein fester Isomorphismus $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(1)} \to \bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ gewählt ist, $\bar{a}_\lambda = \bar{a}_\lambda^{(1)} + \bar{a}_\lambda^{(2)} + \ldots + \bar{a}_\lambda^{(r)}$ (wo Null steht, wenn $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)} = 0$), so wird die Menge der $\bar{a}_\lambda$ ein zu $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ isomorpher Ring, der $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ zu Komponenten besitzt. Also genügt $\bar{\mathfrak{o}} = \sum_\lambda \mathfrak{o}_\lambda$ allen Bedingungen, insbesondere auch der Einheitsbedingung, weil $\bar{\mathfrak{o}}^{(\nu)} = \sum_\lambda \bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ die Einheit $E^{(\nu)}$ besitzt.

Folgerung. *Es gibt genau so viele Unterringklassen, als Lösungen von* I, *also endlich viele.*

§ 5.

Darstellungsunterringe.

Definitionen. (Bei diesen Definitionen können $\mathfrak{o}$ und $\bar{\mathfrak{o}}$ beliebige Ringe sein, vollständige Reduzibilität wird nicht vorausgesetzt.)

1. *Direkter Modul in bezug auf einen Unterring* $\bar{\mathfrak{o}}$.

Ein eingliedriger Modul $z\bar{\mathfrak{o}}$ heißt direkt, wenn aus $z\bar{\omega} = 0$ stets $\bar{\omega} = 0$ folgt.

Ein $\bar{\mathfrak{o}}$-Modul heißt direkt, wenn er direkte Summe von endlich vielen eingliedrigen direkten Moduln ist. Diese Anzahl heißt der Index (in bezug auf die vorliegende Zerlegung, wenn die Invarianz nicht nachgewiesen ist).

2. *Darstellungsmodul von* $\overline{\bar{\mathfrak{o}}}$ *in bezug auf* $\bar{\mathfrak{o}}$.

Ein Doppelmodul $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\bar{\mathfrak{o}}$ rechts und $\overline{\bar{\mathfrak{o}}}$ links heißt Darstellungsmodul von $\overline{\bar{\mathfrak{o}}}$ in $\bar{\mathfrak{o}}$, wenn er direkter Modul in bezug auf $\bar{\mathfrak{o}}$ rechts ist.

3. *Darstellungsunterring von* $\bar{\mathfrak{o}}$.

Ein Unterring $\bar{\mathfrak{o}}$ heißt Darstellungsunterring von $\mathfrak{o}$, wenn $\mathfrak{o}$ Darstellungsmodul in bezug auf $\bar{\mathfrak{o}}$ ist. Die Eigenschaft, Darstellungsunterring zu sein, ist eine Klasseneigenschaft.

Der Index von $\bar{\mathfrak{o}}$ in $\mathfrak{o}$ heißt Darstellungsindex.

Hilfssatz. Ist $\bar{\mathfrak{o}}$ Darstellungsunterring von $\mathfrak{o}$, ist $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}_r$ eine zweiseitige Zerlegung, der die direkte Summenzerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}\bar{\mathfrak{o}}_1 + \ldots + \mathfrak{o}\bar{\mathfrak{o}}_r$ von $\mathfrak{o}$ in Linksideale entspricht, so sind $\mathfrak{o}\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ Darstellungsmoduln von $\mathfrak{o}$ in bezug auf $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$, und zwar vom gleichen Darstellungsindex wie $\bar{\mathfrak{o}}$ in $\mathfrak{o}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{o} = A_1\bar{\mathfrak{o}} + \ldots + A_m\bar{\mathfrak{o}}$; dann ist $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda = A_1\bar{\mathfrak{o}}_\lambda + \ldots + A_m\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$. Die Summe ist direkt, da $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ Unterring von $\bar{\mathfrak{o}}$. Es ist aber auch $A_i\bar{\mathfrak{o}}_\lambda = A_i\bar{e}_\lambda\bar{\mathfrak{o}}_\lambda = A_i^\lambda\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ mit $A_i^\lambda\bar{\omega}_\lambda = A_i\bar{\omega}_\lambda$. Also handelt es sich um den direkten Modul $A_i^\lambda\bar{\mathfrak{o}}_\lambda + \ldots + A_m^\lambda\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$, dessen Basiselemente zu $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ gehören. Somit ist dieser ein Darstellungsmodul.

Von jetzt an sei wieder vollständige Reduzibilität und gemeinsamer Automorphismenkörper vorausgesetzt.

Satz. (Allgemeine Beziehung zwischen Index, Darstellungsindex und Länge.) *Ist* $\bar{\mathfrak{o}}$ *Darstellungsunterring von* $\mathfrak{o}$ *mit gemeinsamer Einheit und gemeinsamem Automorphismenkörper, so gelten außer* I *noch die Relationen* (*Umkehr von* I):

II. $$\boxed{m\bar{n}_\lambda = \sum_{\nu=1}^{r} j_\lambda^{(\nu)} n^{(\nu)} \qquad (\lambda = 1, \ldots, \bar{r}).}$$

Dabei haben $n^{(\nu)}, \bar{n}_\lambda, j_\lambda^{(\nu)}$ *die Bedeutung unter* I (§ 2, *Satz* 3); m *bedeute den Darstellungsindex* (*dessen Invarianz also mitbewiesen wird*).

Beweis. Nach dem obigen Hilfssatz wird (1): $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda = A_1\bar{\mathfrak{o}}_\lambda + \ldots + A_m\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ Darstellungsmodul in bezug auf $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$. Die Relationen II drücken aus, daß die Länge von $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ in bezug auf den Automorphismenkörper K von $\mathfrak{o}$ sich sowohl durch die rechte wie durch die linke Seite der Relation (1) berechnen läßt. Rechts kommt $m\bar{n}_\lambda^2$, da die Summe nach dem obigen Hilfssatz ein direkter Modul, also jedes $A_\sigma\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ vom Rang $\bar{n}_\lambda^2$ von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ ist (wegen der Voraussetzung über den Automorphismenkörper). Links aber kommt $\bar{n}_\lambda \sum_\nu j_\lambda^{(\nu)} n^{(\nu)}$. Denn $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda = \sum_\nu \mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$; jedes $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^{(\nu)}$ zerfällt aber (vgl. § 2) in $\bar{n}_\lambda j_\lambda^{(\nu)}$ einfache Ideale aus $\mathfrak{o}^{(\nu)}$, deren Länge in bezug auf K gleich $n^{(\nu)}$ ist. Kürzen durch $\bar{n}_\lambda$ ergibt die Relationen II.

§ 6.

Eindeutigkeits- und Existenzsatz für Darstellungsunterringe.

Eindeutigkeitssatz. *Zu jedem Lösungssystem* $\bar{n}_\lambda, j_\lambda^{(\nu)}, \bar{r}$ *von* I *und* II *existiert höchstens eine Klasse von Darstellungsunterringen.*

Beweis. Folgt aus dem Eindeutigkeitssatz (Satz 3, § 3) über vollständig reduzible Ringe, wonach es schon zu I höchstens eine Klasse gibt.

Satz 1. (Existenzsatz für zweiseitig einfache Darstellungsunterringe.) *Jedes ganzzahlige, positives Lösungssystem* $\bar{n}, j^{(\nu)}, m$ *von*

(1) $n^{(\nu)} = j^{(\nu)}\bar{n} \qquad (\nu = 1, \ldots, r);$ (2) $m\bar{n} = \sum_{\nu=1}^{r} j^{(\nu)} n^{(\nu)}$

besteht aus den charakteristischen Zahlen einer zweiseitig einfachen Darstellungsunterringklasse.

Beweis (durch Konstruktion einer Modulbasis in bezug auf einen Lösungsring von I, wenn II erfüllt ist).

Sei $\bar{\mathfrak{o}}$ ein (nach dem Existenzsatz aus § 4 existierender) zweiseitig einfacher Unterring aus $\mathfrak{o}$ mit den charakteristischen Zahlen $\bar{n}$ und $j^{(\nu)}$. Sei weiter $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{l}}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{l}}_{\bar{n}} = \sum \mathsf{K}\,\bar{e}_{ik}$, wo die $\bar{e}_{ik}$ aus der Zerlegung der $\bar{\mathfrak{l}}$ abgeleitet sind. Es kommt

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{l}}_1 + \ldots + \mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{l}}_{\bar{n}},$$

dabei ist die Länge von jedem $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{l}}$ in bezug auf K gleich $\sum j^{(\nu)} n^{(\nu)}$, also nach (2) durch m teilbar.

Sei etwa eine Basis (in bezug auf K) von $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{l}}_1$ gegeben durch

$$b_{11}, \ldots, b_{1\bar{n}};\ b_{21}, \ldots, b_{2\bar{n}};\ \ldots;\ b_{m1}, \ldots, b_{m\bar{n}},$$

wo also $b_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}\,\bar{e}_{11}$ wegen $\bar{\mathfrak{l}}_1 = \bar{\mathfrak{o}}\,\bar{e}_{11}$.

Dann wird eine Basis von $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{l}}_j$ gegeben (wegen $\bar{\mathfrak{l}}_j = \bar{\mathfrak{l}}_1\,\bar{e}_{1j}$) durch

$$b_{11}\,\bar{e}_{1j}, \ldots, b_{1\bar{n}}\,\bar{e}_{1j};\ b_{21}\,\bar{e}_{1j}, \ldots, b_{2\bar{n}}\,\bar{e}_{1j};\ \ldots;\ b_{m1}\,\bar{e}_{1j}, \ldots, b_{m\bar{n}}\,\bar{e}_{1j},$$

folglich kommt

$$\mathfrak{o} = \sum \mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{l}}_j = \sum_{\mu,\nu,j}^{m,\bar{n},\bar{n}} \mathsf{K}\,b_{\mu\nu}\,\bar{e}_{1j};$$

diese Summe ist direkt in bezug auf K, d. h. die $b_{\mu\nu}\,\bar{e}_{1j}$ sind linear unabhängig.

Man bilde jetzt $A_i = b_{i1}\,\bar{e}_{11} + b_{i2}\,\bar{e}_{12} + \ldots + b_{i\bar{n}}\,\bar{e}_{1\bar{n}}$; dann wird $\mathfrak{o}$ gleich dem direkten Modul $A_1\bar{\mathfrak{o}} + \ldots + A_m\bar{\mathfrak{o}}$. Denn diese Summe wird gleich $\mathfrak{o}$; da $A_i\,\bar{e}_{\nu j} = b_{i\nu}\,\bar{e}_{1j}$ wird. Der Modul ist aber auch direkt, denn aus $0 = \sum_i A_i\,\bar{\omega}_i$ mit $\bar{\omega}_i = \sum \bar{e}_{\mu\nu}\,\alpha_{\mu\nu}^{(i)}$ folgt:

$$0 = \sum A_i\,\bar{\omega}_i = \sum A_i\,\bar{e}_{\mu\nu}\,\alpha_{\mu\nu}^{(i)} = \sum_{i,\mu,\nu}^{m,\bar{n},\bar{n}} b_{i\mu}\,\bar{e}_{1\nu}\,\alpha_{\mu\nu}^{(i)},$$

also $\alpha_{\mu\nu}^{(i)} = 0$, $\bar{\omega}_i = 0$, da $b_{i\mu}\,\bar{e}_{1\nu}$ gerade einmal das volle Basissystem durchlaufen.

Satz 2. (Allgemeiner Existenzsatz für Darstellungsunterringe.) *Jedes ganzzahlige Lösungssystem* $\bar{n}_\lambda$, $j_\lambda^{(\nu)}$, $\bar{r}$, m *von* I *und* II *besteht aus den charakteristischen Zahlen einer Darstellungsunterringklasse.*

Beweis. Ist $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}_{\bar{r}}$ eine Lösung von I, so folgt aus Satz 1, daß $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda = A_1^\lambda\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda + \ldots + A_m^\lambda\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ Darstellungsmodul in bezug auf $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ wird (daß $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}$, war beim Beweis der direkten Moduleigenschaft nirgends benutzt). Setzt man also $B_i = \sum_\lambda A_i^\lambda$, so kommt:

$$\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}} = \sum_\lambda \mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda = B_1\,\bar{\mathfrak{o}} + \ldots + B_m\,\bar{\mathfrak{o}},$$

es handelt sich um direkten Modul, da die Summen $\sum \mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ direkt und die einzelnen Summanden direkte Moduln darstellen. Damit ist alles bewiesen.

Folgerung 1. Jeder Darstellungsunterring $\bar{\mathfrak{o}}$, in bezug auf einen $\bar{\mathfrak{o}}$-Rechtsmodul, ist auch ein solcher in bezug auf einen Linksmodul, und zwar von gleichem Darstellungsindex. (Denn man hat nur die Überlegungen auf $\bar{\mathfrak{o}}\,\mathfrak{o}$ anzuwenden; der Index $j_\lambda^{(\nu)}$ ist für Rechts- und Linksideale der gleiche, ebenso die andern charakteristischen Zahlen.)

Folgerung 2. Die Anzahl der Darstellungsunterringklassen ist gleich der Anzahl ganzzahliger positiver Lösungen von I und II.

§ 7.

Normale Unterringe.

Definition 1. Ein Darstellungsunterring $\bar{\mathfrak{o}}$ heißt ein normaler Unterring, falls es mindestens ein Basissystem von $\mathfrak{o}$ in bezug auf $\bar{\mathfrak{o}}$ gibt, dessen Elemente A_i regulär und mit $\bar{\mathfrak{o}}$ vertauschbar sind: $\mathfrak{o} = A_1\bar{\mathfrak{o}} + \ldots + A_m\bar{\mathfrak{o}}$ und $A_i\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}A_i$ oder $A_i^{-1}\bar{\mathfrak{o}}\,A_i = \bar{\mathfrak{o}}$.

Bemerkung. Es kann stets A_1 gleich der Einheit E von $\mathfrak{o}$ angenommen werden, was im folgenden immer vorausgesetzt sei.

Denn wegen $A_1^{-1}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ bilden auch $E_1, A_1^{-1}A_2, \ldots, A_1^{-1}A_m$ eine Basis, für die $A_1^{-1}A_i\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}A_1^{-1}A_i$ oder $(A_1^{-1}A_i)^{-1}\bar{\mathfrak{o}}\,(A_1^{-1}A_i) = \bar{\mathfrak{o}}$ erfüllt ist.

Definition 2. Ist $\bar{\mathfrak{o}}$ normal, $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}_r$, so werden unter den Konjugierten eines $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ die verschiedenen unter $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda, A_2^{-1}\bar{\mathfrak{o}}_\lambda A_2, \ldots, A_m^{-1}\bar{\mathfrak{o}}_\lambda A_m$ verstanden.

Hilfssatz. Neben $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ ist auch jeder Konjugierte eine einfache Komponente von $\bar{\mathfrak{o}}$, also gleich einem $\bar{\mathfrak{o}}_{\lambda'}$.

Beweis. Aus $\bar{\mathfrak{o}} = A_i^{-1}\bar{\mathfrak{o}}\,A_i = \sum_\lambda A_i^{-1}\bar{\mathfrak{o}}_\lambda A_i$ folgt das wegen der Eindeutigkeit der Darstellung, und da mit $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ auch $A_i^{-1}\bar{\mathfrak{o}}_\lambda A_i$ zweiseitig einfach ist. Durch den Übergang zu den Konjugierten wird nur eine Permutation der $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ erzeugt.

Definition 3. Ein System von einfachen Komponenten $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ heißt ein Komplex unter sich konjugierter, wenn neben jedem $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ auch alle Konjugierten zum System gehören und wenn keine Einteilung in zwei echte Untersysteme gleicher Eigenschaft möglich ist.

Satz. *Es sei $\bar{\mathfrak{o}}$ ein normaler Unterring in $\mathfrak{o}$. Teilt man die $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ in Komplexe von unter sich Konjugierten ein, und bezeichnen $\bar{\mathfrak{o}}^{(1)}, \ldots, \bar{\mathfrak{o}}^{(s)}$ jeweils die Summe über alle $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ eines solchen Komplexes, also $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}^{(1)} + \ldots + \mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}^{(s)}$, so ergibt sich auf diese Art eine zweiseitige Zerlegung von $\mathfrak{o}$. Zugleich ist $\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}$ normal in $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}$; der Darstellungsindex ist für alle $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}$ gleich dem Index von $\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{o}}$.*

Beweis. Nach Definition ($\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}$ enthält neben $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ alle Konjugierten) ist $A_i^{-1}\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}A_i \leq \bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}$; also gleich $\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}$, da die Komponentenzahl von $\sum A_i\bar{\mathfrak{o}}_\lambda A_i^{-1}$ die gleiche ist; also ist $A_i\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)} = \bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}A_i$.

Nach § 5, Hilfssatz wird aber $\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}$ Darstellungsunterring von $\mathfrak{o}\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}$, und zwar von gleichem Darstellungsindex für alle μ

$$\mathfrak{o}\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)} = A_1^{(\mu)}\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)} + \ldots + A_m^{(\mu)}\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)} = \bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}A_1^{(\mu)} + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}A_m^{(\mu)}$$
$$= \sum_i \bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}\bar{\mathfrak{o}}A_i = \bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}\mathfrak{o},$$

und da die $A_i^{(\mu)}$ regulär in $\mathfrak{o}\bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)} = \bar{\mathfrak{o}}^{(\mu)}\mathfrak{o}$ und wie man sieht, das rechtsstehende Ideal zweiseitig, so ist alles bewiesen.

§ 8.

Umkehrsätze bei normalen Unterringen.

Es handelt sich um die Umkehrung des Satzes aus § 7, daß bei normalen Unterringen die Komplexe zu zweiseitiger Zerlegung führen, indem aus der Tatsache, daß es zweiseitige Zerlegungen vermöge äquivalenter $\bar{\mathfrak{o}}_i$ gibt, auf die Normalität geschlossen wird. Der Beweis wird wieder schrittweise geführt, indem es sich zuerst um Unterringe eines zweiseitig einfachen Ringes handelt; hier sukzessive um Automorphismenkörper, zweiseitig einfacher Unterring und Unterring mit äquivalenten zweiseitigen Komponenten.

Satz 1. *Der Automorphismenkörper eines zweiseitig einfachen Ringes* $\mathfrak{o}$ *ist ein normaler Unterring.*

Beweis. Wegen $\mathfrak{o} = \sum \mathsf{K}c_{ik} = \sum c_{ik}\mathsf{K}$ ist nur zu zeigen, daß man die c_{ik} durch reguläre Elemente ersetzen kann, die lineare Verbindungen der c_{ik} mit Koeffizienten aus dem Zentrum sind. Es wird gezeigt, daß schon Verbindungen mit Koeffizienten 0, 1 existieren, so daß der Beweis für jede Charakteristik gilt.

Eine solche Basis ist etwa gegeben durch die Elemente φ_{ik}, wo

$$\varphi_{11} = c_{11} + c_{22} + \ldots + c_{nn};\ \varphi_{21} = \varphi_{11} + c_{21};\ \ldots;\ \varphi_{n1} = \varphi_{11} + c_{n1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{1k} = c_{1k} + c_{2k+1} + \ldots + c_{n,n+k-1},\ \varphi_{2k} = \varphi_{1k} + c_{2k};\ \ldots;\ \varphi_{nk} = \varphi_{1k} + c_{nk}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wobei für die Indizes stets die reduzierten Reste nach n zu nehmen sind. Denn die Elemente $c_{2k}, \ldots, c_{nk}$ $(k = 1, \ldots, n)$ sind ganzzahlig durch die Elemente φ ausdrückbar; und ebenso $c_{11}, \ldots, c_{1k}, \ldots, c_{1n}$ durch die φ und die obigen $c_{2k}, \ldots, c_{nk}$. Alle φ_{ik} sind regulär, da die Determinante der zugeordneten Matrix den Wert ± 1 hat. Unter den Basiselementen ist insbesondere die Einheit φ_{11} enthalten.

Satz 2. *Jeder vollständig reduzible und zweiseitig einfache Unterring eines vollständig reduziblen und zweiseitig einfachen Ringes (mit gemeinsamen Automorphismenkörpern) ist ein normaler Unterring. Überdies kann die Basis von $\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{o}}$ so gewählt werden, daß ihre linearen Verbindungen mit dem betreffenden Automorphismenkörper einen vollständig reduziblen und zweiseitig einfachen Unterring von $\mathfrak{o}$ bilden, der, nach der ersten Hälfte des Satzes, auch ein normaler Unterring von $\mathfrak{o}$ ist.*

Beweis. Sei $\bar{\mathfrak{o}} = \sum \mathsf{K}\,\bar{c}_{ik} = \sum \bar{c}_{ik}\,\mathsf{K}$, $\bar{c}_{ii} = \bar{e}_i$, es wird $\mathfrak{o} = \sum \bar{e}_i\,\mathfrak{o}\,\bar{e}_k = \sum \mathfrak{o}_{ik}$, dabei ist $\mathfrak{o}_{11}$ vollständig reduzibel und zweiseitig einfach (§ 1, 5) mit dem Automorphismenkörper $\bar{e}_1\,\mathsf{K} = \bar{e}_1\,\mathsf{K}\,\bar{e}_1$; und vom Rang j^2 in bezug auf K, wenn j der Index von $\bar{\mathfrak{o}}$ in $\mathfrak{o}$ (d. h. der Index aller einfachen Rechtsideale aus $\bar{\mathfrak{o}}$). Somit: $\mathfrak{o}_{11} = \sum_{\varrho,\lambda=1}^{j} \varphi_{11}^{\varrho\lambda}\,\mathsf{K} = \sum_{\varrho,\lambda=1}^{j} \mathsf{K}\,\varphi_{11}^{\varrho\lambda}$, wobei die $\varphi_{11}^{\varrho\lambda}$ Matrizeneinheiten sind. Daraus folgt aber, vermöge der Relationen zwischen den $\bar{c}_{ik}$

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{o}_{ii} &= \bar{c}_{i1}\,\mathfrak{o}_{11}\,\bar{c}_{1i} = \sum_{\varrho,\lambda} \bar{c}_{i1}\,\varphi_{11}^{\varrho\lambda}\,\bar{c}_{1i}\,\mathsf{K} = \sum_{\varrho,\lambda} \varphi_{ii}^{\varrho\lambda}\,\mathsf{K};\\ \mathfrak{o}_{ik} &= \bar{c}_{i1}\,\mathfrak{o}_{11}\,\bar{c}_{1k} = \mathfrak{o}_{ii}\,\bar{c}_{ik} = \bar{c}_{ik}\,\mathfrak{o}_{kk} = \sum_{\varrho,\lambda} \varphi_{ik}^{\varrho\lambda}\,\mathsf{K} = \sum_{\varrho,\lambda} \varphi_{ii}^{\varrho\lambda}\,\bar{c}_{ik}\,\mathsf{K} = \sum_{\varrho,\lambda} \bar{c}_{ik}\,\varphi_{kk}^{\varrho\lambda}\,\mathsf{K}, \end{aligned}$$

wobei alle Summen direkt sind in bezug auf K.

Setzt man jetzt $\varphi^{\varrho\lambda} = \varphi_{11}^{\varrho\lambda} + \varphi_{22}^{\varrho\lambda} + \ldots + \varphi_{nn}^{\varrho\lambda}$, so gehen die Relationen (1) über in:

$$(2)\qquad \mathfrak{o}_{ik} = \sum_{\varrho,\lambda} \varphi^{\varrho\lambda}\,\bar{c}_{ik}\,\mathsf{K} = \sum_{\varrho,\lambda} \bar{c}_{ik}\,\mathsf{K}\cdot\varphi^{\varrho\lambda} \quad (i = k \text{ oder } i \neq k),$$

wobei $\varphi^{\varrho\lambda}\,\bar{c}_{ik} = \bar{c}_{ik}\,\varphi^{\varrho\lambda}$ für jedes ϱ, λ einzeln gilt. Aus (2) folgt aber

$$\mathfrak{o} = \sum_{i,k} \mathfrak{o}_{ik} = \sum_{\varrho,\lambda} \Big(\varphi^{\varrho\lambda} \sum_{i,k} \bar{c}_{ik}\,\mathsf{K}\Big) = \sum_{\varrho,\lambda} \Big(\sum_{i,k} \bar{c}_{ik}\,\mathsf{K}\cdot\varphi^{\varrho\lambda}\Big) = \sum_{\varrho,\lambda} \varphi^{\varrho\lambda}\,\bar{\mathfrak{o}} = \sum_{\varrho,\lambda} \bar{\mathfrak{o}}\,\varphi^{\varrho\lambda}.$$

Die Summe ist direkt, da sie durch Zusammenfassen der direkten K-Summen entstanden ist; die $\varphi^{\varrho\lambda}$ sind mit $\bar{\mathfrak{o}}$ vertauschbar.

Nun bilden die $\varphi^{\varrho\lambda}$ ein System von Matrizeneinheiten und sind mit dem Körper K vertauschbar. Daher bilden alle linearen Verbindungen der $\varphi^{\varrho\lambda}$ mit Elementen aus K einen vollständig reduziblen und zweiseitig einfachen Unterring $\mathfrak{o}^*$ von $\mathfrak{o}$. Ersetzen wir jetzt die $\varphi^{\varrho\lambda}$ durch reguläre Elemente aus $\mathfrak{o}^*$, wie es der Satz 1 vorschreibt, und bezeichnen wir diese mit T^σ, so sind die T^σ reguläre Elemente in $\mathfrak{o}$, sind mit $\bar{\mathfrak{o}}$ vertauschbar und bilden eine Basis von $\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{o}}$. Dies folgt aus der Konstruktion der $\varphi^{\varrho\lambda}$ aus den $\varphi_{ii}^{\varrho\lambda}$ und aus der Tatsache, daß die T^σ eine reguläre, mit dem Automorphismenkörper K von $\mathfrak{o}$ vertauschbare Basis von $\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{o}}$ bilden. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 3. *Sind* $\mathfrak{o}$ *und* $\bar{\mathfrak{o}}$ *vollständig reduzible Ringe vom gemeinsamen Automorphismenkörper; ist* $\mathfrak{o}$ *zweiseitig einfach und die zweiseitig einfachen Bestandteile von* $\bar{\mathfrak{o}}$ *alle zueinander äquivalent (d. h. vermöge regulärer Elemente aus* $\mathfrak{o}$ *ineinander transformierbar), so ist* $\bar{\mathfrak{o}}$ *ein normales Unterring von* $\mathfrak{o}$.

Beweis. Aus der Äquivalenz aller $\bar{\mathfrak{o}}_i$ folgt das Übereinstimmen ihrer charakteristischen Zahlen $\bar{n} =$ Länge, $j =$ Index; also folgt aus I:

$$n = j \cdot \bar{n} \cdot \bar{r}.$$

Seien $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_{\bar{r}}$ die Einheiten der zweiseitigen Zerlegung von $\bar{\mathfrak{o}}$, so ist

$$(1) \qquad \mathfrak{o} = \sum_{i,k} \bar{E}_i \, \mathfrak{o} \, \bar{E}_k = \sum_{i,k} \mathfrak{o}_{ik}; \qquad \mathfrak{o}_{ii} = \bar{E}_i \, \mathfrak{o} \, \bar{E}_i > \bar{E}_i \, \bar{\mathfrak{o}} \, \bar{E}_i = \bar{\mathfrak{o}}_i.$$

Dabei wird $\mathfrak{o}_{ii}$ ein zweiseitig einfacher Ring, $\bar{\mathfrak{o}}_i$ ein zweiseitig einfaches Unterring von der Länge $\bar{n}$ und Index j in bezug auf $\mathfrak{o}_{ii}$ (da der Index von $\mathfrak{o}_{ii}$ in $\mathfrak{o}$ gleich eins ist).

Es gelten weiter (Vorbemerkung 3) die Relationen:

$$\mathfrak{o}_{ik} = D_{i1} \, \mathfrak{o}_{11} \, D_{1k} \quad \text{mit} \quad D_{i1} D_{1i} = \bar{E}_i; \quad D_{1i} D_{i1} = \bar{E}_1.$$

Geht dabei $\bar{\mathfrak{o}}_1$ in $D_{i1} \, \bar{\mathfrak{o}}_1 \, D_{1i}$ über, so ist letzterer Ring zu $\bar{\mathfrak{o}}_1$ ringisomorph, also auch zu $\bar{\mathfrak{o}}_i$; folglich stimmen die Längen $\bar{n}$ überein, also auch der Index j wegen I (angewandt auf $\bar{\mathfrak{o}}_i$ und $\bar{E}_i \, \mathfrak{o} \, \bar{E}_i$); also gibt es (§ 3) ein in $\mathfrak{o}_{ii}$ reguläres Element R_{ii}, so daß

$$R_{ii}^{-1} D_{i1} \, \bar{\mathfrak{o}}_1 \, D_{1i} R_{ii} = \bar{\mathfrak{o}}_i; \quad R_{ii}^{-1} \, \mathfrak{o}_{ii} R_{ii} = \mathfrak{o}_{ii}.$$

Setzt man also

$$C_{i1} = R_{ii}^{-1} D_{i1}; \qquad C_{1i} = D_{1i} R_{ii}; \qquad C_{ik} = C_{i1} C_{1k},$$

so erfüllen die C_{ik} die Transformationen

$$(2) \qquad \begin{aligned} &C_{ik} \, \mathfrak{o}_{kk} \, C_{ki} = \mathfrak{o}_{ii}, \qquad C_{ik} \, \bar{\mathfrak{o}}_k \, C_{ki} = \bar{\mathfrak{o}}_i, \\ &C_{i1} \, \mathfrak{o}_{11} \, C_{1k} = \mathfrak{o}_{ik}. \end{aligned}$$

Es sei jetzt wegen (1) nach Satz 2

$$(3) \qquad \mathfrak{o}_{11} = \sum_{\lambda=1}^{j^2} \varphi_{11}^{\lambda} \, \bar{\mathfrak{o}}_1 = \sum_{\lambda} \bar{\mathfrak{o}}_1 \, \varphi_{11}^{\lambda} \quad \text{mit} \quad \varphi_{11}^{\lambda} \, \bar{\mathfrak{o}}_1 = \bar{\mathfrak{o}}_1 \, \varphi_{11}^{\lambda}.$$

Dann kommt nach (2) und (3) (indem man $C_{i1} \, \varphi_{11}^{\lambda} \, C_{1k} = \varphi_{ik}^{\lambda}$ setzt)

$$(4) \quad \mathfrak{o}_{ik} = \sum_{\lambda} C_{i1} \, \varphi_{11}^{\lambda} \, C_{1i} \, (C_{i1} \, \bar{\mathfrak{o}}_1 \, C_{1k}) = \sum_{\lambda} \varphi_{ii}^{\lambda} \, C_{ik} \, \bar{\mathfrak{o}}_k = \sum_{\lambda} \varphi_{ik}^{\lambda} \, \bar{\mathfrak{o}}_k = \sum_{\lambda} \bar{\mathfrak{o}}_i \, \varphi_{ik}^{\lambda},$$

indem man entsprechend von der zweiten Relation (3) ausgeht. Dabei ist

$$(5) \qquad \varphi_{ik}^{\lambda} \, \bar{\mathfrak{o}}_k = \bar{\mathfrak{o}}_i \, \varphi_{ik}^{\lambda}$$

für jedes λ einzeln und

$$\bar{\mathfrak{o}}_{ik} = \sum_{\lambda} \varphi_{ik}^{\lambda} \bar{\mathfrak{o}}_k = \sum_{\lambda} \bar{\mathfrak{o}}_i \varphi_{ik}^{\lambda}.$$

Setzt man jetzt:

$$\begin{aligned} T^{\lambda 1} &= \varphi_{11}^{\lambda} + \varphi_{22}^{\lambda} + \ldots + \varphi_{\bar{r}\bar{r}}^{\lambda} \\ T^{\lambda 2} &= \varphi_{12}^{\lambda} + \varphi_{23}^{\lambda} + \ldots + \varphi_{\bar{r}1}^{\lambda} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T^{\lambda \bar{r}} &= \varphi_{1\bar{r}}^{\lambda} + \varphi_{21}^{\lambda} + \ldots + \varphi_{\bar{r},\bar{r}-1}^{\lambda}, \end{aligned} \tag{6}$$

so kommt

$$\mathfrak{o} = \sum T^{\lambda\mu}\, \bar{\mathfrak{o}} = \sum \bar{\mathfrak{o}}\, T^{\lambda\mu}; \qquad T^{\lambda\mu}\, \bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}\, T^{\lambda\mu}. \tag{7}$$

Die Summe ist aber auch direkt, wie die Abzählung des Ranges in bezug auf K zeigt: $\mathfrak{o}$ hat den Rang $n^2 = j^2 \bar{n}^2 \cdot \bar{r}^2$; rechts ist aber die Anzahl der Basiselemente $j^2 \bar{r}\,(\text{von } T^{\lambda\mu}) \cdot \bar{n}^2 \bar{r}\,(\text{von } \bar{\mathfrak{o}})$; also ist rechts alles in bezug auf K linear unabhängig, somit direkt, da die $T^{\lambda\mu}$ regulär sind. Mit (7) ist $\bar{\mathfrak{o}}$ als normal in $\mathfrak{o}$ nachgewiesen.

Als Verallgemeinerung von Satz 1 zeigen wir jetzt

Satz 4. *Ist $\mathfrak{o}$ ein vollständig reduzibler Ring mit gemeinsamem Automorphismenkörper* K, *so ist* K *ein normaler Unterring von $\mathfrak{o}$. Der Satz ist für jede Charakteristik erfüllt, wenn nur im Zentrum von* K *außer dem Null- und Einselement noch ein drittes Element a enthalten ist. (Dies bedeutet also bloß für Charakteristik 2 eine Einschränkung.)*

Beweis. Es sei $\mathfrak{o} = \sum_{\nu=1}^{r} \mathfrak{o}^{\nu}$, wo $\mathfrak{o}^{\nu}$ zweiseitig einfach sind mit den Einheiten E^{ν} und den Automorphismenkörpern $E^{\nu} \cdot \mathsf{K} = \mathsf{K}^{\nu}$, wobei K ein gemeinsamer Automorphismenkörper von $\mathfrak{o}$ ist. Nach Satz 1 ist K^{ν} normal in $\mathfrak{o}^{\nu}$. Es sei S_{λ}^{ν}, $\lambda = 1, \ldots, n_{\nu}^2$, eine normale Basis von $\mathfrak{o}^{\nu}$ über K^{ν}, wo n_{λ} die Länge und $S_1^{\nu} = E^{\nu}$ die Einheit von $\mathfrak{o}^{\nu}$ sind. Wir bilden jetzt für jedes ν die Elemente

$$T_{\lambda}^{\nu} = S_1^1 + \ldots + S_1^{\nu-1} + S_{\lambda}^{\nu} + S_1^{\nu+1} + \ldots + S_1^r \quad (\lambda = 2, \ldots, n_{\nu}^2).$$

Diese Elemente, zusammen mit den Einheiten $S_1^{\nu} = E^{\nu}$, $\nu = 1, \ldots, r$, bilden eine Basis von $\mathfrak{o}$ über K, sind linear unabhängig und mit K vertauschbar.

Liegt nun im Zentrum von K außer 0 und 1 noch das Element a, so bilden wir die Elemente

$$\begin{aligned} T_1^1 &= E^1 + E^2 + E^3 + \ldots + E^r \\ T_1^2 &= E^1 + a E^2 + a E^3 + \ldots + a E^r \\ T_1^3 &= E^1 + E^2 + a E^3 + \ldots + a E^r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_1^r &= E^1 + E^2 + E^3 + \ldots + a E^r. \end{aligned}$$

Da alle Koeffizienten ungleich 0, so werden die neuen Elemente regulär; und da

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & 1 & a & \dots & a \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & (a-1) & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (a-1) & \dots & \dots \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (a-1) \end{vmatrix} = (a-1)^{r-1} + 0,$$

so haben wir in dem System von Elementen T_λ^ν, $\lambda = 1, \dots, n_\nu^2$, $\nu = 1, \dots, r$, eine unabhängige, reguläre, mit K vertauschbare Basis von $\mathfrak{o}$ über K, womit K als normal in $\mathfrak{o}$ nachgewiesen ist.

Satz 5. *Es seien $\mathfrak{o}$ und $\bar{\mathfrak{o}}$ vollständig reduzible Ringe mit gemeinsamen Automorphismenkörpern und Einheiten. Es sei $\bar{\mathfrak{o}}$ ein Unterring von $\mathfrak{o}$ und seine zweiseitig-einfachen Ideale sämtlich einander äquivalent (d. h. vermöge regulärer Elemente aus $\mathfrak{o}$ ineinander transformierbar). Dann ist $\bar{\mathfrak{o}}$ ein normaler Unterring von $\mathfrak{o}$. Der Satz ist für jede Charakteristik des Zentrums richtig, sobald das Zentrum außer 0 und 1 noch ein Element a enthält.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{o} = \sum_{\nu=1}^{r} \mathfrak{o}^\nu$ und $\bar{\mathfrak{o}} = \sum_{\lambda=1}^{\bar{r}} \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ mit den zweiseitig einfachen Idealen $\mathfrak{o}^\nu$ bzw. $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$. Aus der Äquivalenz der $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ folgt, daß der Index $j^{(\nu)}$ für alle Komponenten $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda^\nu$ von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ in $\mathfrak{o}^\nu$ derselbe ist, unabhängig von λ (also $n^{(\nu)} = \bar{r} j^\nu \bar{n}$, wo wegen Äquivalenz der $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$, $\bar{n}_1 = \dots = \bar{n}_{\bar{r}} = \bar{n}$) ist. Es ist nun, wenn E^ν und $\bar{e}_\lambda$ die Einheiten von $\mathfrak{o}^\nu$ bzw. von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ sind, und $\bar{e}_\lambda^\nu$ die Komponente von $\bar{e}_\lambda$ in $\mathfrak{o}^\nu$,

$$\mathfrak{o} = \sum_{\varrho,\sigma} \bar{e}_\varrho \mathfrak{o} \bar{e}_\sigma = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{\bar{r}} \sum_{\nu=1}^{r} \bar{e}_\varrho^\nu \mathfrak{o} \bar{e}_\sigma^\nu = \sum_{\varrho,\sigma} \sum_{\nu} \bar{e}_\varrho^\nu \mathfrak{o}^\nu \bar{e}_\sigma^\nu = \sum \mathfrak{o}_{\varrho,\sigma}^\nu, \quad \bar{\mathfrak{o}}_\lambda^\nu \leq \bar{e}_\lambda^\nu \mathfrak{o}^\nu \bar{e}_\lambda^\nu$$

eine direkte Summe von Ringen.

Für jedes ν konstruieren wir wie beim Beweis von Satz 3 die zugehörigen C_{ik}^ν derart, daß folgende Relationen erfüllt sind:

$$C_{ik}^\nu \mathfrak{o}_{kk}^\nu C_{ki}^\nu = \mathfrak{o}_{ii}^\nu; \qquad C_{ik}^\nu \bar{\mathfrak{o}}_k^\nu C_{ki}^\nu = \bar{\mathfrak{o}}_i^\nu; \qquad C_{i1}^\nu \mathfrak{o}_{11}^\nu C_{1k}^\nu = \mathfrak{o}_{ik}^\nu.$$

Setzen wir sodann

$$C_{ik} = \sum_{\nu=1}^{r} C_{ik}^\nu,$$

so gelten bei geeigneter Wahl der C_{ik}^ν (§ 3 Schluß) folgende Relationen:

$$C_{ik} \mathfrak{o}_{kk} C_{ki} = \mathfrak{o}_{ii}; \qquad C_{ik} \bar{\mathfrak{o}}_k C_{ki} = \bar{\mathfrak{o}}_i, \qquad C_{i1} \mathfrak{o}_{11} C_{1k} = \mathfrak{o}_{ik},$$

wobei $\mathfrak{o}_{ik} = \bar{e}_i \mathfrak{o} \bar{e}_k$ gesetzt ist.

Nach Satz 2 ist nun

$$\mathfrak{o}_{11}^{\nu} = \sum_{\lambda=1}^{(j^\nu)^2} S_{11}^{\lambda\nu}\, \bar{\mathfrak{o}}_1^{\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, r),$$

wo die Elemente $S_{11}^{\lambda\nu}$ regulär in $\mathfrak{o}_{11}^{\nu}$ mit $\bar{\mathfrak{o}}_1^{\nu}$ vertauschbar und unabhängig bezüglich $\bar{\mathfrak{o}}_1^{\nu}$ sind. Ferner kann man nach Satz 2 die $S_{11}^{\lambda\nu}$ so wählen, daß sie einen vollständig reduziblen und zweiseitig einfachen Ring bilden. Daraus folgt die Relation $\mathfrak{o}_{11} = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\lambda=1}^{(j^\nu)^2} S_{11}^{\lambda\nu}\, \bar{\mathfrak{o}}_1$, d. h., der vollständig reduzible Ring $\mathfrak{o}_{11}$ besitzt über den vollständig reduziblen und zweiseitig einfachen Ring $\bar{\mathfrak{o}}_1$ eine vertauschbare, bezüglich $\bar{\mathfrak{o}}_1$ unabhängige Basis $S_{11}^{\lambda\nu}$, deren direktes Produkt mit dem gemeinsamen Automorphismenkörper K einen vollständig reduziblen Ring $\bar{\mathfrak{o}}_1^{*}$ bildet; dieser Ring ist ferner ein Unterring von $\mathfrak{o}_{11}$ mit gemeinsamem Automorphismenkörper und Einheit. Nach Satz 4 kann man nun die $S_{11}^{\lambda\nu}$ durch reguläre Elemente T_{11}^{α} aus $\bar{\mathfrak{o}}_1^{*}$ (also auch aus $\mathfrak{o}_{11}$) ersetzen, und zwar so, daß sie mit $\bar{\mathfrak{o}}_1$ vertauschbar sind, wie aus der Konstruktion der T_{11}^{α} aus den $S_{11}^{\lambda\nu}$ beim Beweis des Satzes 4 hervorgeht, so daß also $\mathfrak{o}_{11} = \sum T_{11}^{\alpha}\, \bar{\mathfrak{o}}_1$, wo von $\alpha = 1$ bis $\sum_{\nu=1}^{r} (j^\nu)^2$ summiert wird und wo die T_{11}^{α} regulär in $\mathfrak{o}_{11}$, mit $\bar{\mathfrak{o}}_1$ vertauschbar, und eine unabhängige Basis von $\mathfrak{o}_{11}$ über $\bar{\mathfrak{o}}_1$ bilden.

Ähnlich wie beim Beweis von Satz 3 (Relation 4) folgt auch hier

$$\mathfrak{o}_{ik} = \sum_{\alpha} C_{i1}\, T_{11}^{\alpha}\, C_{1i}\, (C_{i1}\, \bar{\mathfrak{o}}_1\, C_{1k}) = \sum_{\alpha} T_{ii}^{\alpha}\, C_{ik}\, \bar{\mathfrak{o}}_k = \sum_{\alpha} T_{ik}^{\alpha}\, \bar{\mathfrak{o}}_k = \sum_{\alpha} \bar{\mathfrak{o}}_i\, T_{ik}^{\alpha},$$

wo $T_{ik}^{\alpha} = C_{i1}\, T_{11}^{\alpha}\, C_{1k}$ gesetzt ist.

Setzt man jetzt analog zu (6) beim Beweis von Satz (3)

$$\begin{aligned} T^{\alpha 1} &= T_{11}^{\alpha} + T_{22}^{\alpha} + \ldots + T_{rr}^{\alpha} \\ T^{\alpha 2} &= T_{12}^{\alpha} + T_{23}^{\alpha} + \ldots + T_{r1}^{\alpha} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T^{\alpha r} &= T_{1r}^{\alpha} + T_{21}^{\alpha} + \ldots + T_{r,r-1}^{\alpha}, \end{aligned}$$

so kommt

$$\mathfrak{o} = \sum T^{\lambda\mu}\, \bar{\mathfrak{o}} = \sum \bar{\mathfrak{o}}\, T^{\lambda\mu}; \qquad T^{\lambda\mu}\, \bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}\, T^{\lambda\mu}.$$

Die Summe ist direkt, wie die Abzählung des Ranges in bezug auf K zeigt: $\mathfrak{o}$ hat den Rang $\sum n_i^2 = \sum_{\nu=1}^{r} (\bar{r}\, \bar{n}\, j^\nu)^2$; rechts ist aber die Anzahl der Basiselemente $\bar{r} \sum_{\nu=1}^{n} (j^\nu)^2$ (von $T^{\lambda\mu}$) $\cdot\, \bar{r} \cdot \bar{n}^2$ (von $\bar{\mathfrak{o}}$); also ist rechts alles in bezug auf K linear unabhängig, somit direkt, da die $T^{\lambda\mu}$ regulär sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Zusatz. Die Anzahl der Basiselemente wird: $\bar{r} \sum_{\nu} (j^{(\nu)})^2$.

§ 9.

Die charakteristischen Zahlenrelationen für normale Unterringe.

Die Ergebnisse von § 8 gestatten, die normalen Unterringe ebens wie die früheren nur durch Zahlen zu charakterisieren.

Satz. *Notwendig und hinreichend dafür, daß* $\bar{\mathfrak{o}}$ (*mit gemeinsamen Automorphismenkörper mit* $\mathfrak{o}$) *normal in* $\mathfrak{o}$ *sei, ist neben* I *und* II *da folgende:*

Man kann die Komponenten $\bar{\mathfrak{o}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{o}}_r$ *so in* s *Komplexe einteilen daß erfüllt ist:*

III.

a) $j_\lambda^{(\nu)} = j_{\lambda'}^{(\nu)}$ (λ *und* λ' *gehören demselben Komplex an*), $\bar{n}_\lambda = \bar{n}_{\lambda'}$.

b) *Für jedes* ν *ist mindestens einer der Indizes* $j_\lambda^{(\nu)}, j_\mu^{(\nu)}$ *gleich Null, wenn* λ *und* μ *zu verschiedenen Komplexen gehören.*

Beweis. Die Bedingung ist notwendig; denn die in § 7 gegeben Einteilung in Komplexe unter sich Konjugierter ist eine Einteilung, di III erfüllt ($j_\lambda^{(\nu)}$ ist Null für alle von $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}^{(i)}$ verschiedenen zweiseitigen Kom ponenten).

Die Bedingung ist hinreichend: Denn es bedeute

$$\bar{\mathfrak{o}}^{(1)}, \ldots, \bar{\mathfrak{o}}^{(s)}; \quad \mathfrak{o}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{o}^{(s)}$$

jeweils die Summe der $\bar{\mathfrak{o}}$ Komponenten, die zum gleichen Komplex ge hören, bzw. bedeute $\mathfrak{o}^{(\lambda)}$ die Summe derjenigen $\mathfrak{o}$ Komponenten, in dene der Index von $\bar{\mathfrak{o}}^{\lambda} \neq 0$ ist. Nach IIIb bestehen die verschiedenen $\mathfrak{o}^{(\lambda)}$ au verschiedenen Komponenten; es wird also $\mathfrak{o} = \sum \mathfrak{o}^{(\lambda)}$ direkt. Nun ist aber nach Satz 3 und 4 von § 8, $\bar{\mathfrak{o}}^{(\lambda)}$ normal in $\mathfrak{o}^{(\lambda)}$ (denn dort wurde gerad das Übereinstimmen von Länge und Index zum Beweis benutzt).

Es ist zu zeigen, daß der Index (die Basiszahl) unabhängig von λ ist Es bezeichne

$$\mathfrak{o}^{(\lambda_i)}, \; n^{(\lambda_i)}, \; \varrho_\lambda$$

die Komponenten von $\mathfrak{o}^{(\lambda)}$, ihre Länge und ihre Anzahl, entsprechend

$$\bar{n}^{(\lambda)}, \; j^{(\lambda_i)}, \; \bar{\varrho}_\lambda$$

für die Komponenten von $\bar{\mathfrak{o}}^{(\lambda)}$ die gemeinsame Länge, den gemeinsame Index in $\mathfrak{o}^{\lambda_i}$ und die Komponentenzahl. Nach dem Zusatz, § 8, gilt fü den Darstellungsindex $m^{(\lambda)}$:

$$m^{(\lambda)} = \bar{\varrho}_\lambda \sum_{i=1}^{\varrho_\lambda} (j^{(\lambda_i)})^2, \tag{1}$$

andererseits ergibt das Einsetzen von III in I und II die Relationen:

IV. $$\boxed{n^{(\lambda_i)} = \overline{n}^{(\lambda)} \cdot j^{(\lambda_i)} \bar{\varrho}_\lambda}$$

und (2): $m \overline{n}_\lambda = \sum_{i=1}^{e_\lambda} n^{(\lambda_i)} j^{(\lambda_i)}$.

Setzt man IV in (2) ein, so kommt:

V. $$\boxed{m = \bar{\varrho}_\lambda \sum_{i=1}^{e_\lambda} (j^{(\lambda_i)})^2.}$$

Der Vergleich mit (1) zeigt also, daß der Index $m^{(\lambda)}$ unabhängig von λ gleich der festen Zahl m ist.

Ist also etwa $\mathfrak{o}^{(\lambda)} = A_1^{(\lambda)} \bar{\mathfrak{o}}^{(\lambda)} + \ldots + A_m^{(\lambda)} \bar{\mathfrak{o}}^{(\lambda)} = \bar{\mathfrak{o}}^{(\lambda)} A_1^{(\lambda)} + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}^{(\lambda)} A_m^{(\lambda)}$ und setzt man: $A_i = \sum_\lambda A_i^{(\lambda)}$, so werden die A_i regulär und es kommt:

$$\mathfrak{o} = A_1 \bar{\mathfrak{o}} + \ldots + A_m \bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}} A_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{o}} A_m,$$

womit $\bar{\mathfrak{o}}$ als normal in $\mathfrak{o}$ nachgewiesen ist.

Zusatz. Die Bestimmung des Ranges von $\mathfrak{o}^{(\lambda)} = \mathfrak{o}\, \bar{\mathfrak{o}}^{(\lambda)}$ in bezug auf K ergibt noch das Gleichungssystem:

VI. $$\boxed{\sum_{i=1}^{e_\lambda} (n^{(\lambda_i)})^2 = m \bar{\varrho}_\lambda \cdot (\overline{n}^{(\lambda)})^2 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s).}$$

Folgerung. Es existieren so viele Klassen normaler Unterringe, wie Lösungssysteme von I, II und III (folgt aus obigem Satz und § 3).

Kapitel III[8]).

Die Beziehungen der Ringdarstellungen zu den Darstellungen der Unterringe.

§ 10.

Allgemeine vollständig reduzible Ringe.

Es sei $\mathfrak{o} = \sum_{\nu=1}^{r} \mathfrak{o}^\nu$ ein beliebiger vollständig reduzibler Ring. Es sei $\mathfrak{u} = \sum_{\lambda=1}^{\bar{r}} \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ ein beliebiger vollständig reduzibler Unterring von $\mathfrak{o}$ mit der gleichen Einheit wie $\mathfrak{o}$. Wir betrachten für $\bar{e}_\lambda^\nu \neq 0$ den Modul $\mathfrak{M}_\lambda^\nu = \mathfrak{o}^\nu \cdot \bar{\mathfrak{o}}_\lambda = \mathfrak{o}^\nu \cdot \bar{e}_\lambda^\nu$, wo $\bar{e}_\lambda$ die Einheit von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ und $\bar{e}_\lambda^\nu$ ihre Komponente in $\mathfrak{o}^\nu$ bedeuten. Es ist dann $\mathfrak{M}_\lambda^\nu = \mathfrak{o}^\nu \bar{e}_\lambda^\nu$ einerseits ein Linksideal und vermittelt eine Darstellung

[8]) Für das Verständnis dieses Kapitels sind nur die §§ 1, 2, 4 und 5 erforderlich.

von $\mathfrak{o}$ im Automorphismenring von $\mathfrak{o}$; andererseits ist $\mathfrak{M}_\lambda^\nu = \mathfrak{o}^\nu \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ ein Da stellungsmodul für $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ in dem Automorphismenring von $\mathfrak{o}$. Demgemäß d finieren wir:

Definition 1. Die durch das Linksideal $\mathfrak{M}_\lambda^\nu$ vermittelte Darstellun von $\mathfrak{o}^\nu$ heißt die durch $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ erzeugte *imprimitive Darstellung* von $\mathfrak{o}$ Nimmt man statt $\mathfrak{o}^\nu$ den ganzen Ring $\mathfrak{o}$, so bekommt man die regulär durch $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ erzeugte imprimitive Darstellung von $\mathfrak{o}$.

Nimmt man statt $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ irgendein einfaches Linksideal $\bar{\mathfrak{l}}_\lambda$ aus $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ un bildet das Linksideal $\mathfrak{o}^\nu \bar{\mathfrak{l}}_\lambda$ in $\mathfrak{o}$, so bekommt man die reduzierte imprim tive Darstellung von $\mathfrak{o}^\nu$ bzw. $\mathfrak{o}$.

Definition 2. Die durch den Darstellungsmodul $\mathfrak{M}_\lambda^\nu$ für $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ ve mittelte Darstellung von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ in dem Automorphismenkörper von $\mathfrak{o}^\nu$ heiß die durch $\mathfrak{o}^\nu$ *induzierte Darstellung* von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$.

Nimmt man statt $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ den ganzen Ring $\bar{\mathfrak{o}}$, so erhält man die regulär induzierte Darstellung.

Nimmt man statt $\mathfrak{o}^\nu$ irgendein Rechtsideal $\mathfrak{v}^\nu$ aus $\mathfrak{o}^\nu$ und bildet de Darstellungsmodul $\mathfrak{v}^\nu \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$, so bekommt man die reduzierte, durch $\mathfrak{v}^\nu \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ in duzierte Darstellung.

Satz. *Ist $\bar{\mathfrak{l}}_\lambda$ irgendein einfaches Linksideal aus $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$, $\mathfrak{v}^\nu$ irgendein ein faches Rechtsideal aus $\mathfrak{o}^\nu$, und j_λ^ν der Index von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ in $\mathfrak{o}^\nu$, so kommt i der durch $\mathfrak{o}^\nu \bar{\mathfrak{l}}_\lambda$ erzeugten imprimitiven Darstellung von $\mathfrak{o}^\nu$ die irreduzib Darstellungsklasse von $\mathfrak{o}^\nu$ genau j_λ^ν-mal vor.*

Wird ferner die durch $\mathfrak{v}^\nu \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ induzierte Darstellung von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ in irredu zible Bestandteile zerspaltet, so sind diese Bestandteile alle zu $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ ring isomorph und ihre Anzahl ist höchstens gleich j_λ^ν.

Beweis. Die erste Hälfte des Satzes folgt unmittelbar aus der Def nition des Index. Der Index j_λ^ν ist nämlich definiert als die Länge de Ideals $\mathfrak{o}^\nu \bar{\mathfrak{l}}_\lambda$. Um die zweite Hälfte des Satzes zu beweisen, betrachten w die durch $\mathfrak{v}^\nu \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ induzierte Darstellung von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$. Da $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ zweiseitig einfac ist, so müssen die irreduziblen Bestandteile dieser Darstellung zu $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ ring isomorph sein. Den regulären Elementen von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ werden bei dieser Da stellung Matrizen vom Rang $j_\lambda^\nu \bar{n}_\lambda$ zugeordnet, denn $\mathfrak{o}^\nu \bar{\mathfrak{l}}_\nu$ ist von de Länge j_λ^ν, also $\mathfrak{o}^\nu \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ von der Länge $j_\lambda^\nu \bar{n}_\lambda$, also vom Rang $j_\lambda^\nu \bar{n}_\lambda \cdot n_\nu$, als $\mathfrak{v}^\nu \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ vom Rang $j_\lambda^\nu \bar{n}_\lambda$ [9]). Da ferner der Grad der irreduziblen Bestandtei — wegen der $\bar{n}_\lambda^2$ Matrizeneinheiten — mindestens gleich $\bar{n}_\lambda$ sein muß (braucht nicht gleich dieser Zahl zu sein, denn der Automorphismenkörp von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ ist ja mit dem des Darstellungsmoduls nicht identisch), folg daraus das Behauptete.

[9]) Hier ist, entgegen dem früheren, $\mathfrak{v}^\nu \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ ein $\bar{\mathfrak{o}}$-Rechts-, K-Linksmodul, was f die Darstellungen natürlich nichts ausmacht.

§ 11.

Ringe mit gemeinsamem Automorphismenkörper.

Es seien jetzt $\mathfrak{o}$ und $\bar{\mathfrak{o}}$ mit gemeinsamem Automorphismenkörper; dann kann man den Satz des vorigen Paragraphen folgendermaßen verschärfen:

Satz 1. *Kommt in der durch* $\mathfrak{o}^\nu \bar{1}_\lambda$ *erzeugten (reduzierten) imprimitiven Darstellung von* $\mathfrak{o}^\nu$ *die irreduzible Darstellung von* $\mathfrak{o}^\nu$ *genau* j_λ^ν*-mal vor, so kommt in der (reduzierten) durch* $\mathfrak{v}^\nu \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ *induzierten Darstellung von* $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ *die zu der Darstellung von* $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ *isomorphe Darstellung auch* j_λ^ν*-mal vor*[10]. *Dabei bedeutet* j_λ^ν *wie im vorigen Paragraphen den Index von* $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ *in* $\mathfrak{o}^\nu$.

Beweis. In diesem Fall kann man nämlich schließen, daß der Rang der irreduziblen Bestandteile der induzierten Darstellung gleich $\bar{n}_\lambda$ ist, da der Automorphismenkörper des dargestellten Ringes $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ und der des Darstellungsmoduls dieselben sind. Da der Rang der Darstellung gleich $j_\lambda^\nu \bar{n}_\lambda$ ist, so folgt daraus, daß die Anzahl der irreduziblen Bestandteile wirklich gleich j_λ^ν ist.

Bei Benutzung derselben Matrizenbasen c_{ik}^ν von $\mathfrak{o}$ und $\bar{c}_{ik}^\lambda$ von $\bar{\mathfrak{o}}$, wie sie in § 4 konstruiert sind, folgert man

Satz 2. *Ist* $\bar{\mathfrak{o}} \to (\alpha_{ik}^\lambda)$ *eine irreduzible Darstellung von* $\bar{\mathfrak{o}}$ *aus der Klasse von* $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$, *so erhält man die entsprechende (reduzierte) induzierte Darstellung in* $\mathfrak{o}^\nu$, *indem man jedes der Elemente* α_{ik}^λ $(i, k = 1, \ldots, \bar{n}_\lambda)$ *durch eine Diagonalmatrix* j_λ^ν*-ten Grades ersetzt:*

$$\text{also } \alpha_{ik}^\lambda \text{ durch } \begin{pmatrix} \alpha_{ik}^\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_{ik}^\lambda & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{ik}^\lambda \end{pmatrix},$$

wo also in der Diagonale lauter gleiche Elemente stehen.

Ist insbesondere $\bar{\mathfrak{o}}$ ein Darstellungsunterring von $\mathfrak{o}$, so kann man zu der imprimitiven Darstellung von $\mathfrak{o}$ durch $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ (also auch von $\mathfrak{o}^\nu$ durch $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$) auch anders gelangen. Es ist nämlich in diesem Fall $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ ein endlicher Modul über $\bar{\mathfrak{o}}$ (§ 5), also etwa $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda = S_1^\lambda \bar{\mathfrak{o}}_\lambda + \ldots + S_m^\lambda \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$, wo die S_ϱ^λ die Basis des Moduls sind. Dieser Modul ist aber ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{o}$ in $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$, und zwar werden dabei den Elementen von $\mathfrak{o}$ m-reihige Matrizen aus Elementen des Ringes $\bar{\mathfrak{o}}$ zugeordnet.

---

[10]) Für Gruppendarstellungen kommt dieser Satz in dem Buch von A. Speiser (A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Satz 135) vor.

Als leichte Verallgemeinerung eines Satzes von E. Noether (Darstellungstheorie, § 18) gilt nun der Hilfssatz:

Hilfssatz. Ist $\mathfrak{M}$ ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{o}$ links und $\bar{\mathfrak{o}}$ rechts, und ist $\bar{\mathfrak{o}}$ eine endliche, direkte Erweiterung von $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ (d. h. ein endlicher Modul in $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$), so ist $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ auch ein Darstellungsring von $\mathfrak{o}$; man erhält die $\mathfrak{o}$ zugeordneten Matrizen in $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$, indem man die Elemente der Matrizen in $\bar{\mathfrak{o}}$ die $\mathfrak{o}$ zugeordnet sind, durch die ihnen entsprechenden Matrizen in der Darstellung durch $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ ersetzt.

Der Beweis[11]) verläuft genau so wie bei E. Noether. Aus diesem Hilfssatz folgt in unserem Fall:

Satz 3. *Um die durch $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ erzeugte imprimitive Darstellung von $\mathfrak{o}$ zu erhalten, bilde man die durch den Darstellungsmodul $\mathfrak{o}\,\bar{\mathfrak{o}}_\lambda = S_1^\lambda \bar{\mathfrak{o}}_\lambda + \ldots + S_m^\lambda \bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ erzeugte Darstellung in $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ und ersetze die Elemente von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ durch die ihnen entsprechende Darstellung in dem (gemeinsamen) Automorphismenkörper. Die reduzierte imprimitive Darstellung erhält man, indem man statt der Darstellung von $\mathfrak{o}$ durch $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ (also statt der regulären Darstellung) irgendeine durch ein einfaches Linksideal in $\bar{\mathfrak{o}}$ erzeugte nimmt.*

§ 12.

Zusammenhang zwischen den Spuren eines hyperkomplexen Systems und denen eines Untersystems.

Wir beschränken uns auf hyperkomplexe Systeme und Untersysteme ohne Radikal über ein und demselben kommutativen Körper, der zugleich ihr gemeinsamer Automorphismenkörper ist (z. B. auf hyperkomplexe Systeme ohne Radikal über einem algebraisch abgeschlossenen Körper).

Es sei a ein beliebiges Element aus $\mathfrak{o}$. Mit $\chi^\nu(a)$ bezeichnen wir seinen Charakter in der Darstellungsklasse von $\mathfrak{o}^\nu$; mit $\psi^\lambda(a)$ bezeichnen wir seinen Charakter in der durch $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ erzeugten imprimitiven Darstellung von $\mathfrak{o}$. Ist a ein Element des Untersystems $\bar{\mathfrak{o}}$, so bezeichnen wir mit $\bar{\chi}_\lambda(a)$ seinen Charakter in der Darstellungsklasse von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ und mit $\varphi^\nu(a)$ seinen Charakter in der durch $\mathfrak{o}^\nu$ induzierten Darstellung von $\bar{\mathfrak{o}}$. Mit $\psi^\lambda_{\text{red.}}(a)$ bzw. $\varphi^\nu_{\text{red.}}(a)$ bezeichnen wir schließlich die Charaktere in den reduzierten imprimitiven bzw. induzierten Darstellungen. Da nun in der durch $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ erzeugten reduzierten imprimitiven Darstellung von $\mathfrak{o}$ die Klasse von $\mathfrak{o}^\nu$ nach § 11, Satz 1, genau j_λ^ν-mal auftritt, so gilt

$$(1) \qquad \psi^\lambda_{\text{red.}}(a) = \sum_{\nu=1}^{r} j_\lambda^\nu \chi^\nu(a) \quad \text{für} \quad \lambda = 1, \ldots, \bar{r}.$$

---

[11]) Vgl. den „Zusatz bei der Korrektur" am Schluß der Arbeit.

Aus § 11, Satz 2, folgt aber, falls a ein Element aus $\bar{\mathfrak{o}}$ ist,

$$\varphi^{\nu}_{\text{red.}}(a) = \chi^{\nu}(a) = \sum_{\lambda=1}^{\bar{r}} j^{\nu}_{\lambda} \bar{\chi}_{\lambda}(a) \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, r. \tag{2}$$

Ist insbesondere $\bar{\mathfrak{o}}$ ein Darstellungsunterring von $\mathfrak{o}$, so besagt § 11, Satz 3, daß der Charakter der imprimitiven Darstellung eines beliebigen Elements aus $\mathfrak{o}$ durch die Charaktere des Untersystems linear mit ganzen Koeffizienten ausdrückbar ist.

§ 13.

Der Gruppenring.

Es sei $\mathfrak{G} = (a_1, \ldots, a_g)$ eine Gruppe g-ter Ordnung. Es sei Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik nicht in g aufgeht. Wir bilden das hyperkomplexe System $\mathfrak{o} = a_1\Omega + \ldots + a_g\Omega$. Dieses System heißt der Gruppenring der Gruppe. Es sei $\overline{\mathfrak{G}} = (\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{\bar{g}})$ eine Untergruppe $\bar{g}$-ter Ordnung von $\mathfrak{G}$ und $\bar{\mathfrak{o}} = \sum_{i=1}^{\bar{g}} \bar{a}_i \Omega$ der Gruppenring von $\overline{\mathfrak{G}}$. $\mathfrak{o}$ und $\bar{\mathfrak{o}}$ sind nun vollständig reduzible Ringe (siehe Darstellungstheorie, § 26) mit gemeinsamer Einheit und Automorphismenkörper, und $\bar{\mathfrak{o}}$ ist ein Unterring von $\mathfrak{o}$. Ist $\mathfrak{G} = S_1\overline{\mathfrak{G}} + \ldots + S_n\overline{\mathfrak{G}}$ irgendeine Zerfällung von $\mathfrak{G}$ in Nebengruppen nach $\overline{\mathfrak{G}}$, so sieht man leicht, daß $\mathfrak{o} = S_1\bar{\mathfrak{o}} + \ldots + S_n\bar{\mathfrak{o}}$ ist, wo die rechte Seite einen Modul im Ring $\bar{\mathfrak{o}}$ bedeutet, wobei die Elemente S_i eine unabhängige Basis dieses Moduls sind. Wir haben also:

Satz 1. *Ist $\mathfrak{o}$ der Unterring einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist der Gruppenring einer jeden Untergruppe (über demselben Körper) ein Darstellungsunterring von $\mathfrak{o}$.*

Für normale Untergruppen folgt ferner

Satz 2. *Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine normale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist der Gruppenring von $\bar{\mathfrak{o}}$ ein normaler Unterring von $\mathfrak{o}$.*

Wir betrachten den Darstellungsmodul $\mathfrak{o} = S_1\bar{\mathfrak{o}} + \ldots + S_n\bar{\mathfrak{o}}$. Ist $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ irgendein zweiseitig einfaches Ideal aus $\bar{\mathfrak{o}}$, so ist auch $\mathfrak{M}^\lambda = \sum S_i\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{o}$, und zwar liefert er beim Übergang von $\bar{\mathfrak{o}}$ zu Ω die durch $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ erzeugte imprimitive Darstellung von $\mathfrak{o}$ (§ 11).

Hilfssatz. Ist a ein beliebiges Element des Zentrums von $\mathfrak{o}$, und wird ihm vermöge der Darstellung durch $\mathfrak{M}^\lambda$ in $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ die Matrix ω^λ_{ik} zugeordnet, wo als Basis des Moduls die Gruppenelemente $S_1 \ldots S_n$ genommen sind ($S_1 = E$ ist die Einheit von $\mathfrak{G}$), so sind alle Diagonalelemente dieser Matrix einander gleich.

Beweis. Da a im Zentrum liegt, so ist $aS_\mu = S_\mu a$, $\mu = 1, \ldots,$ Es sei ferner $S_1 = E$ (wo E die Einheit der Gruppe $\mathfrak{G}$, oder richtiger d Systems $\mathfrak{o}$ ist). Es sei $a = S_1\bar{a}_1 + \ldots + S_n\bar{a}_n$, wo $\bar{a}_i$ Elemente aus $\bar{\mathfrak{o}}$ sin Also ist $aS_\mu = S_\mu a = \sum_{\lambda=1}^{n} S_\mu S_\lambda \bar{a}_\lambda$. Da nun mit $\mathfrak{G} = S_1\overline{\mathfrak{G}} + \ldots + S_n$ auch $\mathfrak{G} = S_i S_1\overline{\mathfrak{G}} + \ldots + S_i S_n\overline{\mathfrak{G}}$ eine Zerlegung in Nebengruppen ist, folgt wegen der Eindeutigkeit dieser Zerlegung, daß die letztere eine Pe mutation der ersteren ist. Dasselbe gilt für $\mathfrak{o} = \sum S_\mu\bar{\mathfrak{o}} = \sum_\mu S_i S_\mu\bar{\mathfrak{o}}$. Als sei in $aS_\mu = \sum S_\mu S_\lambda\bar{a}_\lambda$ etwa $S_\sigma S_\lambda\bar{a}_\lambda = S_\varrho\overline{\omega}_{\varrho\sigma}$; da $S_1 = E$ ist, so i $S_\sigma S_1\bar{a}_1 = S_\sigma\bar{a}_1$ also $S_\sigma\bar{a}_1 = S_\sigma\overline{\omega}_{\sigma\sigma}$, d. h. $\overline{\omega}_{\sigma\sigma} = \bar{a}_1$, was für alle $\sigma = 1, \ldots,$ gilt. D. h. die Matrix, welche dem Zentrumselement a vermöge des Modu $\mathfrak{o} = S_1\bar{\mathfrak{o}} + \ldots + S_n\bar{\mathfrak{o}}$ zugeordnet ist, hat in der Diagonale lauter gleich Elemente. Durch Multiplikation aller obigen Gleichungen von rechts m der Einheit $\bar{e}_\lambda$ von $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ folgt dasselbe auch für den Darstellungsmod $\mathfrak{M}^\lambda = S_1\bar{\mathfrak{o}}_\lambda + \ldots + S_n\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$, w. z. b. w.

Aus diesem Hilfssatz folgt nun, daß für Zentrumselemente die Fo mel 1 vom § 12 im Gruppenfall auch so geschrieben werden kann:

$$(1') \qquad \psi^\lambda_{\text{red.}}(a) = n\bar{\chi}_\lambda(\bar{a}) = \sum_{\nu=1}^{r} j^\nu_\lambda \chi^\nu(a) \quad \text{für} \quad \lambda = 1, \ldots, \bar{r},$$

wo n der Index der Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ist, und $\bar{a}$ aus $\bar{\mathfrak{o}}_\lambda$ das im obige Hilfssatz erwähnte Diagonalelement ist.

Ist insbesondere b ein Gruppenelement von $\mathfrak{G}$, so ist $\chi^\nu(b) = \chi^\nu(a$ wo $a = \frac{1}{g}\sum_{\mathfrak{G}} S^{-1}bS$, wo die Summe rechts über alle Gruppenelement von $\mathfrak{G}$ läuft. In diesem Falle ist das Element $\bar{a}$ in der Formel $(1')$ gleic $\sum_{\overline{\mathfrak{G}}} S^{-1}bS$, wo die Summe über alle $S^{-1}bS$ genommen ist, die in $\overline{\mathfrak{G}}$ liege Für ein Gruppenelement b erhalten wir daher die Formel

$$(1'') \qquad \psi^\lambda_{\text{red.}}(b) = \frac{n}{\bar{g}_b}\bar{\chi}_\lambda\Big(\sum_{\overline{\mathfrak{G}}} S^{-1}bS\Big) = \sum_{\nu=1}^{r} j^\nu_\lambda \chi^\nu(a) \quad \text{für} \quad \lambda = 1, \ldots, \bar{r},$$

wo $\bar{g}_b$ die Anzahl der Elemente aus der Klasse von b bedeutet, die i $\overline{\mathfrak{G}}$ liegen.

Zusatz bei der Korrektur (6. 11. 1930).

Ich wurde durch E. Noether darauf aufmerksam gemacht, daß d Hilfssatz von § 11 nicht aus dem dort zitierten Satz von § 18, Darstellung theorie, gefolgert werden kann, weil bei dem Beweis von jenem Satz die Ve tauschbarkeit des Unterkörpers K mit den Matrizeneinheiten benutzt wurd

Beweis des Hilfssatzes von § 11. Es sei $\mathfrak{o} = \sum_{i=1}^{m} S_i \bar{\mathfrak{o}}$, $\bar{\mathfrak{o}} = \sum_{k=1}^{n} T_k \bar{\bar{\mathfrak{o}}}$, also $\mathfrak{o} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} S_i T_k \bar{\bar{\mathfrak{o}}}$. Es sei a ein beliebiges Element aus $\mathfrak{o}$. Es sei $a S_\nu = \sum_{i=1}^{m} S_i \bar{a}_{\nu i}$, mit $\bar{a}_{\nu i} < \bar{\mathfrak{o}}$. Dem Element a wird also die Matrix $(\bar{a}_{\varrho\sigma})$ in $\bar{\mathfrak{o}}$ zugeordnet. Sei ferner

$$a S_\nu T_\mu = \Big(\sum_{i=1}^{m} S_i \bar{a}_{\nu i}\Big) T_\mu = \sum_{i=1}^{m} S_i (\bar{a}_{\nu i} T_\mu) = \sum_{i=1}^{m} S_i \sum_{k=1}^{n} T_k \bar{\bar{a}}_{\nu i}^{\mu k} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} S_i T_k \bar{\bar{a}}_{\nu i}^{\mu k}$$

mit $\bar{\bar{a}}_{\nu i}^{\mu k} < \bar{\bar{\mathfrak{o}}}$. Wählt man also $S_1 T_1, S_1 T_2, \ldots, S_1 T_n, \ldots, S_m T_1, S_m T_2, \ldots, S_m T_n$ als die Basis von $\mathfrak{o}$ über $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$, so wird dem Element a eine Matrix $m \cdot n$-ten Grades zugeordnet, deren $\nu m + \mu$-te Zeile aus den Koeffizienten $\bar{\bar{a}}_{\nu i}^{\mu k}$ der $S_i T_k$ in $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} S_i T_k a_{\nu i}^{\mu k}$ besteht. Wir haben also zu zeigen, daß wir dieselbe Zeile erhalten, wenn wir die Elemente der Matrix $(\bar{a}_{\varrho\sigma})$ durch die ihnen entsprechenden Matrizen in der Darstellung von $\bar{\mathfrak{o}}$ in $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ durch die Basiselemente T_k ersetzen und die $\nu m + \mu$-te Zeile der so entstehenden Matrix des Grades $m \cdot n$ nehmen. Zu diesem Zweck haben wir die Elemente $\bar{a}_{\nu 1}, \bar{a}_{\nu 2}, \ldots, \bar{a}_{\nu m}$ zu betrachten. Die Koeffizienten $\bar{\bar{a}}_{\nu i}^{\mu k}$ der T_k in den m Linearformen $\bar{a}_{\nu i} T_\mu = \sum_{k=1}^{n} T_k a_{\nu i}^{\mu k}$ für $i = 1, \ldots, m$ der Reihe nach genommen, liefern die gesuchte Zeile. Diese stimmt aber mit der vorher gefundenen überein.

(Eingegangen am 10. August 1929.)

Über die Enden topologischer Räume und Gruppen.

Von

Hans Freudenthal in Laren (Nordholland).

Obzwar die Eigenschaften im Kleinen einer Lieschen kontinuierlichen Gruppe in hohem Maße ihre Eigenschaften im Großen bestimmen, leistet die Liesche Theorie doch wenig für die Erkenntnis dieser Eigenschaften. Erweiterungen des Begriffes der kontinuierlichen Gruppe erleichtern den Einblick in ihre topologischen Eigenschaften. Man läßt die Voraussetzung der Differenzierbarkeit fallen und deutet die Gruppenelemente als Punkte einer topologischen Mannigfaltigkeit oder sogar eines topologischen Raumes.

Wenn man nun von einem gegebenen topologischen Gebilde entscheiden will, ob es sich als Gruppe eignet oder nicht, so kommt man häufig schon mit einfachen Kriterien sehr weit.

Solche Forderungen, die ein Gruppenraum erfüllen muß, sind die Homogeneität, ferner nach Schreier[1]) die Kommutativität der Wegegruppe, dann z. B. für geschlossene Mannigfaltigkeiten das Verschwinden der Eulerschen Charakteristik, das nach H. Hopf[2]) notwendig für die Existenz fixpunktfreier Deformationen ist.

Ein anderes Kriterium findet sich bei Leja[3]), der direkt die bereits durch L. E. J. Brouwer[4]) und Schreier[1]) bekannte Tatsache beweist, daß die mehr als einmal gelochte Ebene nicht Gruppenmannigfaltigkeit sein kann.

---

[1]) O. Schreier, Abstrakte kontinuierliche Gruppen, Hamb. Abh. 4 (1925), S. 30. Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Großen, Hamb. Abh. 5 (1927), S. 238.

[2]) H. Hopf, Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 96 (1926), S. 244.

[3]) F. Leja, Un lemme topologique et son application dans la theorie des groupes abstraits, Fund. Math. 10 (1927), p. 421–426.

[4]) L. E. J. Brouwer, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie, Math. Annalen 67 (1909), S. 246–267; 69 (1910), S. 181–203.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist der gruppentheoretische Kern der vorliegenden Arbeit. Wir betrachten im Kleinen kompakte, zusammenhängende, im Kleinen zusammenhängende[5]) topologische Räume mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom und führen in ihnen eine möglichst starke Komponentenzerfällung des „Unendlich Fernen" durch; diese Komponenten nennen wir Endpunkte. In zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten leisten unsere Endpunkte dasselbe wie die Kerékjártóschen[6]) „Randstücke". Mit den Endpunkten können wir den betrachteten Raum in einer Weise abschließen, die sich mit einfachen topologischen Mitteln vor allen anderen Abschließungen, z. B. der Tietzeschen[7]), auszeichnen läßt.

Der Endpunktbegriff steckt in allen Kriterien, die wir für Gruppenräume und „Wirkungsräume" von Gruppen ableiten werden. Von diesen Kriterien seien hier die folgenden genannt:

Die Verallgemeinerung in der Lejaschen Richtung: Ein Gruppenraum hat höchstens zwei Endpunkte.

Unter gewissen Stetigkeits- und Kompaktheitsbedingungen besitzt der Wirkungsraum einer transitiven Gruppe genau so viel Endpunkte wie die Gruppe selbst.

In dem durch die Endpunkte abgeschlossenen Gruppenraum läßt sich jede im Gruppenraum kompakte Punktmenge stetig auf einen Punkt zusammenziehen.

Die Sätze über Gruppenräume werden ohne Benutzung des assoziativen Gesetzes bewiesen, treffen also auch auf die Schiebräume zu, d. h. Räume, die eine einfach transitive Schar bis auf die Identität fixpunktfreier Transformationen (mit gewissen Stetigkeitsbedingungen) besitzen.

Es sei noch bemerkt, daß wir von der Normalität und Metrisierbarkeit der im Kleinen kompakten Räume mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom[8]) nirgends explizit Gebrauch machen werden; wir werden die diesbezüglichen Eigenschaften direkt ableiten. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom dürfte für unsere Untersuchungen nicht wesentlich sein; man brauchte wohl nur den Begriff „kompakt" durch „bikompakt"[9]) und Folgen durch Wohlordnungstypen zu ersetzen.

---

[5]) Siehe auch Fußnote [15]), S. 702.

[6]) B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, S. 164.

[7]) H. Tietze, Beiträge zur allgemeinen Topologie II, Math. Annalen 91 (1924), S. 213.

[8]) P. Alexandroff, Über die Metrisation der im Kleinen kompakten Räume, Math. Annalen 92 (1924), S. 299.

[9]) P. Alexandroff und P. Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen 92 (1924), S. 260.

Im ersten Kapitel werden wir die Enden topologischer Räume definieren und einige Sätze über sie ableiten; das zweite Kapitel wird Anwendungen des Endenbegriffes auf Schiebräume bringen; im dritten Kapitel tritt an die Stelle des Schiebraumes der Gruppenraum. Besonders hingewiesen sei noch auf den Satz 19 dieses Kapitels, der mit der Endentheorie nichts zu hat und vielleicht für sich Interesse beanspruchen darf.

Alle folgenden Untersuchungen gelten natürlich insbesondere, wenn der betrachtete topologische Raum eine topologische Mannigfaltigkeit ist.[10])

1. Kapitel.

Die Enden topologischer Räume.

§ 1.

Definition der Endpunkte und Folgerungen.

Unter $\mathfrak{G}$ verstehen wir im folgenden stets einen *topologischen* Raum im Hausdorffschen Sinne, der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, und den wir schrittweise weiteren Einschränkungen unterwerfen werden; gegen Schluß dieses Kapitels wird er im Kleinen kompakt, zusammenhängend und im Kleinen zusammenhängend sein. Seine Punkte bzw. Teilmengen bezeichnen wir durch die Buchstaben a bis w bzw. A bis W; kleine griechische Buchstaben bedeuten natürliche Zahlen, nur σ und τ bedeuten reelle Zahlen zwischen 0 und 1. $\mathfrak{V}, \mathfrak{D}, \mathfrak{R}$ sind bzw. die Funktionszeichen der *Vereinigungs-*, *Durchschnitts-* und *Rand*bildung von Mengen; auch durch $+$ und $-$ verbinden wir Mengen in üblicher Weise. Die Bildung der *abgeschlossenen Hülle* einer Menge wird durch Überstreichen ihres Buchstabens angedeutet. *Kompakt* heißt eine echte oder unechte Teilmenge von $\mathfrak{G}$, wenn es in $\mathfrak{G}$ zu jeder ihrer unendlichen Teilmengen einen Häufungspunkt gibt. Das Wort „zusammenhängend“ wird im Hausdorffschen Sinne verwandt werden.

Der Buchstabe C bedeutet (auch mit Indizes) stets eine offene Menge von $\mathfrak{G}$ mit kompakter Berandung $\mathfrak{R}(C)$, G bedeutet (auch mit Indizes) ein Gebiet mit kompakter Berandung $\mathfrak{R}(G)$ (also ein zusammenhängendes C), das aber selbst nicht kompakt ist.

Im folgenden werden wir häufig von folgenden beiden Bemerkungen Gebrauch machen:

1. Sind zwei offene Punktmengen gegeneinander fremd[11]), so ist jede gegen die abgeschlossene Hülle der anderen fremd.

---

[10]) Die vorliegende Arbeit bildet den Inhalt meiner Dissertation (Berlin 1930); für zahlreiche Anregungen spreche ich den Herren H. Hopf und H. Kneser meinen Dank aus.

[11]) d. h. ohne gemeinsame Punkte.

2. Ein Gebiet, das mit einer offenen Menge und ihrer Komplementärmenge Punkte gemeinsam hat, hat auch mit dem Rand der offenen Menge Punkte gemeinsam.

Definition der Endpunkte von $\mathfrak{G}$: Eine unendliche Folge $G_\alpha^1 \supset G_\alpha^2 \supset \ldots \supset G_\alpha^\nu \supset \ldots$ heißt ein Endpunkt $\mathfrak{e}_\alpha$ von $\mathfrak{G}$, wenn $\overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{D}}}(\bar{G}_\alpha^\nu) = 0$, d. h. leer ist[12]).

Definitionen. $\mathfrak{e} < C$ heißt: fast alle $\mathfrak{e}$ erzeugenden Gebiete G^ν sind in C enthalten. $\mathfrak{e}_1 < \mathfrak{e}_2$ heißt: $\mathfrak{e}_1$ ist in allen $\mathfrak{e}_2$ erzeugenden Gebieten G_2^ν enthalten, oder: zu jedem ν gibt es ein ν' mit $G_1^{\nu'} < G_2^\nu$.

Daraus folgt unmittelbar der

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{e}_1 < \mathfrak{e}_2$ *und* $\mathfrak{e}_2 < \mathfrak{e}_3$, *so ist auch* $\mathfrak{e}_1 < \mathfrak{e}_3$.

Satz 2. *Ist* $\mathfrak{e}_1 < \mathfrak{e}_2$, *so ist auch* $\mathfrak{e}_2 < \mathfrak{e}_1$.

Beweis. Zu jedem ν gibt es ein ν' mit $G_1^{\nu'} < G_2^\nu$. Die zur Berandung von $G_1^{\nu'}$ gehörenden Punkte von $\bar{G}_2^\mu$ bilden, wenn μ die Zahlenreihe durchläuft, eine absteigende Folge abgeschlossener kompakter Mengen. Ihr gemeinsamer Durchschnitt ist Teilmenge von $\overset{\infty}{\underset{\mu=1}{\mathfrak{D}}}(\bar{G}_2^\mu)$, also leer. Wäre keine von ihnen leer, so wäre auch ihr Durchschnitt nicht leer. Also gibt es ein ν'', derart, daß $\bar{G}_2^{\nu''}$ fremd gegen $\mathfrak{R}(G_1^{\nu'})$ ist. Andererseits enthält $G_2^{\nu''}$ fast alle G_1^μ, und diese sind Teilmengen von $G_1^{\nu'}$. Also hat $G_2^{\nu''}$ mit $G_1^{\nu'}$ einen nicht leeren Durchschnitt, während es, wie wir sahen, gegen den Rand von $G_1^{\nu'}$ fremd ist. Weil die G Gebiete sind, folgt daraus, daß $G_2^{\nu''}$ vollständig in $G_1^{\nu'}$ liegt. Somit ist $\mathfrak{e}_2$ enthalten in dem von den $G_1^{\nu'}$ erzeugten Endpunkt, also nach Satz 1 in $\mathfrak{e}_1$.

Durch diesen Satz ist die Bezeichnung End*punkt* erst gerechtfertigt; wir werden in Zukunft statt $\mathfrak{e}_1 < \mathfrak{e}_2$ stets $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2$ schreiben. Sind zwei Endpunkte nicht gleich, so nennen wir sie verschieden.

Satz 3. *Ist* $\mathfrak{e}_1 \neq \mathfrak{e}_2$, *so gibt es ein* ν, *derart, daß* $\bar{G}_1^\nu$ *und* $\bar{G}_2^\nu$ *gegeneinander fremd sind.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{e}_1 \not< \mathfrak{e}_2$, also gibt es ein μ' mit $G_1^\mu \not< G_2^{\mu'}$ für $\mu \geqq \mu'$. Die zur Berandung von $G_2^{\mu'}$ gehörenden Punkte von $\bar{G}_1^\mu$ bilden, wenn μ die Zahlenreihe durchläuft, eine absteigende Folge abgeschlossener kompakter Mengen. Ihr gemeinsamer Durchschnitt ist Teilmenge von $\overset{\infty}{\underset{\mu=1}{\mathfrak{D}}}(\bar{G}_1^\mu)$, also leer. Wäre keine von ihnen leer, so wäre auch ihr Durchschnitt nicht leer. Also gibt es ein $\nu \geqq \mu'$ derart, daß $\bar{G}_1^\nu$ fremd gegen $\mathfrak{R}(G_2^{\mu'})$ ist; da es aber, wie wir sahen, nicht in $G_2^{\mu'}$ enthalten ist, so ist es, weil die G Gebiete sind, auch gegen $G_2^{\mu'}$ selbst fremd. Somit sind $\bar{G}_1^\nu$ und $\bar{G}_2^{\mu'}$ gegeneinander fremd, also auch $\bar{G}_1^\nu$ und $\bar{G}_2^\nu$.

[12]) Bei konstruktiver Formulierung dieser Definition lassen sich die Sätze 2 und 3 konstruktiv beweisen.

§ 2.

Die Abschließung von $\mathfrak{G}$ durch seine Endpunkte.

Im folgenden werden wir häufig von dem bekannten Überdeckungssatz Gebrauch machen: Eine kompakte abgeschlossene Menge von $\mathfrak{G}$, die in der Vereinigung einer Menge von Umgebungen aus $\mathfrak{G}$ enthalten ist, ist schon in der Vereinigung einer endlichen Teilmenge dieser Menge von Umgebungen enthalten.

Wir benutzen diesen Überdeckungssatz zunächst zum Beweise des folgenden bekannten Hilfssatzes.

Hilfssatz 1. A und B seien zwei kompakte, abgeschlossene und gegeneinander fremde Mengen von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es unter den Umgebungen $U_1, U_2, \ldots$ von $\mathfrak{G}$ endlich viele $V_1, \ldots, V_\alpha$ und $W_1, \ldots, W_\beta$ derart, daß $A < V_1 + \ldots + V_\alpha$ und $B < W_1 + \ldots + W_\beta$ und $V_1 + \ldots + V_\alpha$ fremd ist gegen $W_1 + \ldots + W_\beta$.

Beweis. Zu je zwei Punkten $a < A$ und $b < B$ gibt es Umgebungen $U_a > a$, $U_b > b$ mit $\mathfrak{D}(U_a, U_b) = 0$. Wir halten zunächst a fest und lassen b alle Punkte von B durchlaufen, dann ändern sich U_a und U_b; auf Grund des Überdeckungssatzes läßt sich B mit endlich vielen dieser U_b überdecken, die wir $U_1^a, \ldots, U_\lambda^a$ nennen. Jedem dieser U entspricht ein zu ihm fremdes U_a, und im Durchschnitt dieser endlich vielen U_a gibt es eine Umgebung von a namens V_a, die also gegen $U_1^a, \ldots, U_\lambda^a$ fremd ist. Nun lassen wir a alle Punkte von A durchlaufen; dann ändert sich sowohl V_a als auch das B überdeckende und zu V_a fremde System $U_1^a, \ldots, U_\lambda^a$; mit endlich vielen der dabei entstehenden V_a läßt sich auf Grund des Überdeckungssatzes A überdecken, wir nennen sie $V_1, \ldots, V_\alpha$. Zu jedem dieser V_ν $(\nu = 1, \ldots, \alpha)$ gehört ein B überdeckendes und gegen V_ν fremdes System $U_1^\nu, \ldots, U_{\lambda_\nu}^\nu$. Im Durchschnitt derjenigen unter den $U_1^\nu, \ldots, U_{\lambda_\nu}^\nu$ $(\nu = 1, \ldots, \alpha)$, in denen der Punkt $b < B$ liegt, gibt es eine Umgebung W_b von b, die also gegen alle V_ν fremd ist. Auf Grund des Überdeckungssatzes läßt sich B mit endlich vielen dieser W_b überdecken, die wir nun $W_1, \ldots, W_\beta$ nennen, und die gegen alle V_ν fremd sind. Die so hergestellten $V_1, \ldots, V_\alpha$ und $W_1, \ldots, W_\beta$ leisten das vom Hilfssatz Verlangte.

Von nun an wollen wir $\mathfrak{G}$ als *im Kleinen kompakt* voraussetzen, d. h. wir wollen annehmen, daß die abgeschlossenen Hüllen der $\mathfrak{G}$ erzeugenden Umgebungen U kompakt sind. Wir beweisen dann ohne Metrisierung folgenden

Hilfssatz 2. Unter den Umgebungen U_ν von $\mathfrak{G}$ gibt es eine $\mathfrak{G}$ überdeckende Folge $V_1, V_2, \ldots$ derart, daß jedes der V_ν gegen fast alle $\overline{V}_\nu$ fremd ist und also auch jeder Punkt in nur endlich vielen $\overline{V}_\nu$ enthalten ist.

Beweis. Wir führen die Konstruktion der V_ν induktionsmäßig durch. Wir setzen:

$$L_1 = U_1 = V_1 = K_1,$$

$$L_2 = \mathfrak{R}(K_1) + (U_2 - \mathfrak{D}(U_2, K_1)).$$

Wegen der Kompaktheit im Kleinen von $\mathfrak{G}$ ist L_2 kompakt; $\bar{L}_2$ läßt sich durch endlich viele Umgebungen überdecken, die wir $V_2, \ldots, V_{\lambda_2}$ nennen.

$$L_2 < V_2 + \ldots + V_{\lambda_2} = K_2.$$

Damit haben wir L_2, K_2 und $V_2, \ldots, V_{\lambda_2}$ angegeben. Wir setzen nun

$$L_3 = \mathfrak{R}(K_1 + K_2) + (U_3 - \mathfrak{D}(U_3, K_1 + K_2)),$$

und wir bemerken wieder, daß wegen der Kompaktheit im Kleinen von $\mathfrak{G}$ unser L_3 kompakt ist, da auch K_2 kompakt war. Ferner ist

$$\mathfrak{R}(K_1) < L_2 < K_2,$$

also

$$\bar{K}_1 < K_1 + K_2 \tag{1}$$

außerdem, weil $K_1 + K_2$ offen ist,

$$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, \mathfrak{R}(K_1 + K_2)) = 0. \tag{2}$$

Schließlich ist

$$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, U_3 - \mathfrak{D}(U_3, K_1 + K_2)) = 0$$

und, weil $K_1 + K_2$ offen ist,

$$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, \overline{U_3 - \mathfrak{D}(U_3, K_1 + K_2)}) = 0. \tag{3}$$

Also gilt auch nach (2) und (3)

$$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, \bar{L}_3) = 0$$

und nach (1)

$$\mathfrak{D}(\bar{K}_1, \bar{L}_3) = 0.$$

Nach dem ersten Hilfssatz gibt es dann ein Überdeckungssystem von $\bar{L}_3$, das gegen $\bar{K}_1$ fremd ist; wir nennen seine Umgebungen $V_{\lambda_2+1}, \ldots, V_{\lambda_3}$ und schreiben

$$\bar{L}_3 < V_{\lambda_2+1} + \ldots + V_{\lambda_3} = K_3.$$

Damit haben wir L_3, K_3 und $V_{\lambda_2+1}, \ldots, V_{\lambda_3}$ hergestellt und fahren nunmehr genau so fort. Wir nehmen an, die Herstellung sei ebenso wie für den Index 3 bis L_ν, K_ν, $V_{\lambda_{\nu-1}+1}, \ldots, V_{\lambda_\nu}$ gediehen und werden sie noch für $L_{\nu+1}$, $K_{\nu+1}$, $V_{\lambda_\nu+1}, \ldots, V_{\lambda_{\nu+1}}$ durchführen. Wir setzen

$$L_{\nu+1} = \mathfrak{R}(K_1 + \ldots + K_\nu) + (U_{\nu+1} - \mathfrak{D}(U_{\nu+1}, K_1 + \ldots + K_\nu))$$

und wir bemerken wieder, daß $L_{\nu+1}$ kompakt ist. Ferner ist

$$\mathfrak{R}(K_1 + \ldots + K_{\nu-1}) < L_\nu < K_\nu,$$

also

$$(1^*) \qquad \overline{K_1+\ldots+K_{\nu-1}} \subset K_1+\ldots+K_\nu,$$

außerdem, weil $K_1+\ldots+K_\nu$ offen ist,

$$(2^*) \qquad \mathfrak{D}(K_1+\ldots+K_\nu, \mathfrak{R}(K_1+\ldots+K_\nu)) = 0.$$

Schließlich ist

$$\mathfrak{D}(K_1+\ldots+K_\nu, U_{\nu+1} - \mathfrak{D}(U_{\nu+1}, K_1+\ldots+K_\nu)) = 0$$

und, weil $K_1+\ldots+K_\nu$ offen ist,

$$(3^*) \qquad \mathfrak{D}(K_1+\ldots+K_\nu, \overline{U_{\nu+1} - \mathfrak{D}(U_{\nu+1}, K_1+\ldots+K_\nu)}) = 0.$$

Also gilt nach (2*) und (3*)

$$\mathfrak{D}(K_1+\ldots+K_\nu, \bar{L}_{\nu+1}) = 0$$

und nach (1*)

$$\mathfrak{D}(\overline{K_1+\ldots+K_{\nu-1}}, \bar{L}_{\nu+1}) = 0.$$

Nach dem ersten Hilfssatz gibt es dann ein Überdeckungssystem von $\bar{L}_{\nu+1}$, das gegen $\overline{K_1+\ldots+K_{\nu-1}}$ fremd ist; wir nennen seine Umgebungen $V_{\lambda_{\nu+1}}, \ldots, V_{\lambda_{\nu+1}}$ und schreiben

$$\bar{L}_{\nu+1} \subset V_{\lambda_{\nu+1}}+\ldots+V_{\lambda_{\nu+1}} = K_{\nu+1}.$$

Damit sind nun auch $L_{\nu+1}$, $K_{\nu+1}$, $V_{\lambda_{\nu+1}}, \ldots, V_{\lambda_{\nu+1}}$ hergestellt.

Wir müssen uns jetzt davon überzeugen, daß die angegebene Folge V wirklich den Anforderungen des zu beweisenden Satzes genügt. Wir bemerken zunächst, daß K_1 gegen das Überdeckungssystem von $\bar{L}_3$, also gegen K_3 fremd ist, ebenso gilt

$$\mathfrak{D}(K_1+\ldots+K_{\nu-1}, K_{\nu+1}) = 0.$$

Wir betrachten irgendeins der V, das z. B. in K_μ enthalten sei, und wollen von ihm zeigen, daß es nur mit endlich vielen $\overline{V}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Es ist

$$V \subset K_\mu \subset K_1+\ldots+K_{\mu+\alpha},$$

$$\mathfrak{D}(K_1+\ldots+K_{\mu+\alpha}, K_{\mu+\alpha+2}) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0,$$

also

$$\mathfrak{D}(V, K_{\mu+\alpha+2}) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0,$$

also

$$\mathfrak{D}(V, K_{\mu+\alpha+2}+K_{\mu+\alpha+3}+\ldots) = 0$$

und, weil die V offen sind

$$\mathfrak{D}(V, \overline{K_{\mu+\alpha+2}+K_{\mu+\alpha+3}+\ldots}) = 0.$$

Da in $\overline{K_{\mu+\alpha+2}+K_{\mu+\alpha+3}+\ldots}$ fast alle $\overline{V}$ enthalten sind, haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Ferner haben wir zu zeigen, daß die angegebene Folge V unsern Raum $\mathfrak{G}$ überdeckt, d. h. daß jeder Punkt in wenigstens einem V enthalten ist. In der Tat, sei der zu untersuchende Punkt in U_ν enthalten und ν möglichst klein gewählt. Dann ist er entweder in $K_1 + \ldots + K_{\nu-1}$ oder in L_ν enthalten, sicherlich also in $K_1 + \ldots + K_\nu$, gehört also einem V_μ mit $\mu \leqq \lambda_\nu$ an.

Damit ist der zweite Hilfssatz vollständig bewiesen.

Von nun an wollen wir $\mathfrak{G}$ als *zusammenhängend* und *im Kleinen zusammenhängend* voraussetzen, d. h. wir wollen annehmen, daß sowohl $\mathfrak{G}$ als auch die $\mathfrak{G}$ erzeugenden Umgebungen U zusammenhängend sind[13]). Die Voraussetzung über die Kompaktheit im Kleinen behalten wir bei. Aus ihr folgt die Äquivalenz unserer Definition des Zusammenhangs im Kleinen mit der üblichen, worauf wir aber nicht näher eingehen wollen.

Wir werden nun ein Verfahren zur Herstellung der Endpunkte von $\mathfrak{G}$ angeben.

Wir setzen für alle $\gamma \geqq 1$

$$M_\gamma = V_{\gamma+1} + V_{\gamma+2} + \cdots,$$

dabei haben die V die ihnen vom Hilfssatz zugeschriebene Bedeutung. Es ist

$$\mathfrak{R}(M_\gamma) < V_1 + \ldots + V_\gamma. \tag{4}$$

Wir betrachten die Komponenten, d. h. die größten zusammenhängenden Teilmengen von M_γ; jedes V_ν $(\nu \geqq \gamma + 1)$, ist nach der Voraussetzung über den Zusammenhang im Kleinen vollständig in einer Komponente von M_γ enthalten. In einer in $V_1 + \ldots + V_\gamma$ enthaltenen Umgebung eines Randpunktes einer Komponente von M_γ liegen nach Hilfssatz 2 Punkte nur endlich vieler in dieser Komponente enthaltener V_ν; jeder Randpunkt einer Komponente von M_γ ist also Randpunkt von mindestens einem in ihr enthaltenen V_ν. Nach Hilfssatz 2 liefern nur endlich viele $\overline{V}_\nu$ Beiträge zum Rande von M_γ. Andererseits besitzt wegen des Zusammenhangs von $\mathfrak{G}$ jede Komponente Randpunkte, sobald nur $M_\gamma \neq \mathfrak{G}$ ist. Daher besitzt M_γ nur endlich viele Komponenten.

Wir sehen weiter, daß jede Komponente ein Gebiet und wegen (4) kompakt berandet ist, und daß für jedes γ jede Komponente von $M_{\gamma+1}$ Teilmenge einer Komponente von M_γ ist. Die kompakten Komponenten lassen wir außer acht und benennen die übrigen mit $H_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\gamma}$ und zwar so, daß für jedes γ

$$H_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\gamma} > H_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{\gamma+1}}$$

---

[13]) In diesem Kapitel genügt, wie man leicht sieht, sogar die Annahme, daß die V und $\mathfrak{G}$ selbst höchstens endlich viel Komponenten besitzen.

gilt. Dabei ist, wie wir sahen, ν_γ nur endlich vieler Werte fähig. Die H sind Gebiete mit kompakter Berandung und selbst nicht kompakt, haben also die Eigenschaften, die wir früher von einem G verlangten.

Eine Folge

$$H_{\nu_1} \supset H_{\nu_1 \nu_2} \supset \cdots \supset H_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\gamma} \supset \cdots$$

stellt einen Endpunkt von $\mathfrak{G}$ dar; denn sei irgendein Punkt gegeben, so gibt es nach dem Hilfssatz 2 ein $\overline{V}_\gamma$ mit möglichst großem γ, das ihn enthält. Dieser Punkt ist nicht in $\overline{M}_\gamma$ enthalten, also auch in keinem $\overline{H}$ mit γ oder mehr Indizes. Also gilt in der Tat

$$\mathfrak{D}(\overline{H}_{\nu_1}, \overline{H}_{\nu_1 \nu_2}, \ldots, \overline{H}_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\gamma}, \ldots) = 0.$$

Ich ergänze nun $\mathfrak{G}$ durch Hinzunahme der so entstandenen Endpunkte zu einem Raum $\overline{\mathfrak{G}}$, indem ich die einen Endpunkt erzeugenden H einschließlich ihrer[14]) Endpunkte zu seinen Umgebungen ernenne. Ich habe mich aber noch davon zu überzeugen, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ wirklich den Hausdorffschen Axiomen genügt. Einer besonderen Nachprüfung bedarf dabei aber nur das Trennungsaxiom und dies auch nur für den Fall, daß einer der beiden Punkte Endpunkt und der andere Punkt von $\mathfrak{G}$ ist. Nach Hilfssatz 2 ist der Punkt von $\mathfrak{G}$ in einem V_γ mit möglichst großem γ enthalten; unter den H mit γ Indizes gibt es aber auch eine Umgebung des Endpunktes, und sie ist fremd gegen die Umgebung des Punktes von $\mathfrak{G}$.

Wir können uns ferner davon überzeugen, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ kompakt ist. Jede unendliche Menge von $\mathfrak{G}$ ohne Häufungspunkt hat nämlich für jedes γ außerhalb M_γ nur endlich viele Punkte, also fast alle Punkte innerhalb. Da es nur endlich viel H mit γ Indizes gibt, enthält also mindestens eins unendlich viel Punkte der gegebenen Menge. Es gibt also einen Endpunkt, der in jeder seiner Umgebungen unendlich viel Punkte dieser Menge besitzt, also in $\overline{\mathfrak{G}}$ einen Häufungspunkt dieser Menge. Aber auch jede unendliche Menge von Endpunkten besitzt in $\overline{\mathfrak{G}}$ einen Häufungspunkt, denn für jedes γ gibt es ihrer unendlich viele, die von demselben H mit γ Indizes erzeugt werden.

Ehe wir beweisen, daß wir mit dem oben geschilderten Verfahren alle Endpunkte von $\mathfrak{G}$ erschöpfen, wollen wir uns beschäftigen mit dem folgenden

Hilfssatz 3. Notwendig und hinreichend, damit ein C einen Endpunkt $H^1 \supset H^2 \supset \ldots$ enthält im Sinne der Definition aus § 1, ist, daß das in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommene $\overline{C}$ ihn enthält.

Beweis. Wenn C den Endpunkt enthält, so gibt es ein ν' mit $H^\nu \subset C$ für $\nu \geqq \nu'$, also $\overline{H}^\nu \subset \overline{C}$ für $\nu \geqq \nu'$. Der Endpunkt ist in dem in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommenen $\overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{D}}}(\overline{H}^\nu)$, also in $\overset{\infty}{\underset{\nu=\nu'}{\mathfrak{D}}}(\overline{H}^\nu)$, also in $\overline{C}$ enthalten.

---

[14]) Im Sinne von Definition „$e \subset C^u$", S. 695.

Wenn umgekehrt der Endpunkt im Sinne von $\overline{\mathfrak{G}}$ in $\overline{C}$ enthalten ist, so ist er Häufungspunkt von $\overline{C}$; es gibt also in jeder Umgebung $\overline{H}^\nu$ des Endpunktes Punkte von $\overline{C}$. Die in $\mathfrak{G}$ zur Berandung von C gehörenden Punkte von $\overline{H}^\nu$ bilden, wenn ν die Zahlenreihe durchläuft, eine absteigende Folge abgeschlossener kompakter Mengen. Ihr gemeinsamer Durchschnitt ist Teilmenge von $\mathfrak{D}(\overline{H}^\nu)$, also leer. Wäre keine von ihnen leer, so wäre auch ihr Durchschnitt nicht leer. Also gibt es ein ν', so daß in $\mathfrak{G}$ das $H^{\nu'}$ fremd gegen $\mathfrak{R}(C)$ ist. Andererseits enthält C Punkte von jedem H^ν. Mithin gilt für fast alle ν: $H^\nu < C$. Der Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$ ist also in C enthalten.

Daraus folgt ohne weiteres der

Hilfssatz 4. Ist ein Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$ von $\mathfrak{G}$ in C enthalten, so ist eine ganze Umgebung von ihm in dem in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommenen $\overline{C}$ enthalten.

Satz 4. *Jedes nicht kompakte $\mathfrak{G}$ besitzt Endpunkte und ihre Gesamtheit läßt sich durch ein finites Verfahren erzeugen. Mittels seiner Endpunkte läßt sich $\mathfrak{G}$ zu einem kompakten Raum $\overline{\mathfrak{G}}$ ergänzen.*

Beweis. Es fehlt nur noch der Nachweis, daß jeder Endpunkt $G^1 > G^2 > \ldots$ mit einem Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$ zusammenfällt. Das in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommene $\prod_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{D}(\overline{G}^\nu)$ ist nicht leer, enthält also einen Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$. Im Sinne von $\overline{\mathfrak{G}}$ enthält also jedes $\overline{G}^\nu$ den Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$, also enthält nach Hilfssatz 3 im Sinne von $\mathfrak{G}$ jedes G^ν diesen Endpunkt, und der G-Endpunkt enthält den H-Endpunkt, ist daher nach Satz 2 mit ihm identisch.

Definition. Unter dem *Ende* $\mathfrak{E}(C)$ von C verstehen wir die Menge der in C enthaltenen Endpunkte.

Ohne Schwierigkeit ergibt sich daraus

Satz 5. *Die Funktion $\mathfrak{E}$ bildet den Ring der C-Mengen von $\mathfrak{G}$ stetig homomorph ab auf einen Ring abgeschlossener Teilmengen des Raumes $\mathfrak{E}(\mathfrak{G})$. (Ringoperationen sind Vereinigungs- und Durchschnittbildung.) Dabei ist jeder Endpunkt in mindestens einem $\mathfrak{E}(C)$ enthalten. Einem C entspricht dann und nur dann die leere Menge, wenn es kompakt ist, und ihrer zwei haben dann und nur dann dasselbe Ende, wenn sie sich in etwas Kompaktem unterscheiden. Der Durchschnitt der Enden der Gebiete, die einen Endpunkt erzeugen, ist der Endpunkt selbst.*

Satz 6. *$\mathfrak{G}$ sei aus einem zusammenhängenden kompakten topologischen Raum $\mathfrak{H}$ entstanden durch Weglassen der abgeschlossenen Menge P. Dann gibt es eine (vielleicht in keiner Richtung eindeutige) Abbildung von $\overline{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{H}$, bei der jeder Punkt von $\mathfrak{G}$ festbleibt, jede Komponente Q von P Bild einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{F}(Q)$ von Endpunkten von $\mathfrak{G}$*

ist, jeder Endpunkt in genau einem $\mathfrak{F}(Q)$ enthalten ist und die Umgebungen von Q und $\mathfrak{F}(Q)$ wechselseitig aufeinander bezogen sind.

Beweis. Die Gesamtheit aller H mit γ Indizes heiße W_γ, $\overset{\infty}{\underset{\gamma=1}{\mathfrak{D}}}(\overline{W}_\gamma) = 0$ $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}(W_\gamma), P) = 0$. Wir schreiben

$$\mathring{W}_\gamma = W_\gamma + P.$$

P ist innere Teilmenge von $\mathring{W}_\gamma$; denn gäbe es in jeder Umgebung von P Punkte, die nicht zu $\mathring{W}_\gamma$ gehörten, so gäbe es eine in $\mathfrak{G}$ nicht kompakte Menge, die nicht in $\mathring{W}_\gamma$ enthalten wäre; das geht aber deshalb nicht, weil $\mathfrak{G} - W_\gamma$ kompakt in $\mathfrak{G}$ ist. Die Q enthaltende Komponente von $\mathring{W}_\gamma$ heiße $\mathring{V}_\gamma$; $V_\gamma = \mathfrak{D}(\mathring{V}_\gamma, \mathfrak{G})$. Q ist innere Teilmenge von $\mathring{V}_\gamma$, $\overset{\infty}{\underset{\gamma=1}{\mathfrak{D}}}(V_\gamma)$ genommen in $\mathfrak{G}$ ist leer. Also sind die $\mathring{V}_\gamma$ als Umgebungssystem von Q brauchbar. Ebenso sind nach Hilfssatz 3 und 4 die $V_\gamma + \mathfrak{E}(V_\gamma)$ als Umgebungssystem von $\overset{\infty}{\underset{\gamma=1}{\mathfrak{D}}}(\mathfrak{E}(V_\gamma))$ brauchbar.

Die im Satz angekündigte Abbildung ist folgende: Die Punkte von $\mathfrak{G}$ lassen wir sich selbst entsprechen; für die übrigen Punkte setzen wir fest, daß

$$Q < \mathring{V}_\gamma \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}(Q) < V_\gamma$$

gleichwertig sind, d. h.

$$\mathfrak{F}(Q) = \overset{\infty}{\underset{\gamma=1}{\mathfrak{D}}}(\mathfrak{E}(V_\gamma)).$$

Dann sind die Aussagen des Satzes über die Zuordnung der Umgebungen von Q und $\mathfrak{F}(Q)$ erfüllt.

Die Umgebung $H_{\nu_1 \dots \nu_\gamma} + \mathfrak{E}(H_{\nu_1 \dots \nu_\gamma})$ eines Endpunktes ist in genau einem $V_\gamma + \mathfrak{E}(V_\gamma)$ enthalten und für je zwei *verschiedene* Komponenten von P ist $\overset{\infty}{\underset{\gamma=1}{\mathfrak{D}}}(V_\gamma + \mathfrak{E}(V_\gamma))$ *verschieden.* Jeder Endpunkt ist also in genau einem $\mathfrak{F}(Q)$ enthalten.

Satz 7. *Die Abschließung von $\mathfrak{G}$ durch seine Endpunkte läßt sich gegenüber andern Abschließungen charakterisieren als Abschließung durch Hinzufügung einer abgeschlossenen Menge P mit folgenden Eigenschaften: 1. die Komponenten von P sind Punkte und zwar Häufungspunkte von $\mathfrak{G}$, 2. das Umgebungssystem von $\mathfrak{G}$ bleibt unverändert, 3. keine Umgebung eines Punktes von P wird durch die in ihr enthaltene Teilmenge von P zerlegt. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist also mit $\mathfrak{G}$ topologisch invariant verknüpft.* [15])

Beweis. Daß die Abschließung $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ diese Eigenschaften in der Tat besitzt, ist deshalb klar, weil jedes H ein Gebiet ist.

---

[15]) Bei einer Ausdehnung des Endpunktbegriffes auf im Kleinen nicht zusammenhängende Räume $\mathfrak{G}$, auf die ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen werde, lautet 3. dahin, daß kein hinzugefügter Punkt sich weiter „aufspalten" läßt.

Wir nennen $\mathfrak{H}$ eine unter den Voraussetzungen des Satzes entstehende Abschließung von $\mathfrak{G}$. Die Voraussetzungen des Satzes 6 sind dann gegeben. Jedes Q ist ein Punkt. Enthielte $\mathfrak{F}(Q)$ mehr als einen Endpunkt, z. B.

$$H_{\mu_1} > H_{\mu_1\mu_2} > \ldots > H_{\mu_1\ldots\mu_\gamma} > \ldots \quad \text{und} \quad H_{\nu_1} > H_{\nu_1\nu_2} > \ldots > H_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_\gamma} > \ldots,$$

so bestände $\mathfrak{D}(\mathring{V}_\gamma, \mathfrak{G})$ aus $H_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_\gamma}$, $H_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_\gamma}$ und etwaigen weiteren H mit γ Indizes, zerfiele also, sobald man γ so groß wählte, daß $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\gamma) \neq (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\gamma)$ ist. Also enthält $\mathfrak{F}(Q)$ einen einzigen Punkt. Nach Satz 6 sind die Endpunkte und die Punkte von P nebst ihren Umgebungen eineindeutig aufeinander bezogen; $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{H}$ sind also homöomorph.

§ 3.

Der Produktsatz.

$\mathfrak{H}$[16]) sei in diesem Paragraphen ein topologischer Raum, der denselben Anforderungen genügt, wie wir sie an $\mathfrak{G}$ gestellt haben.

Definition. Wie üblich nennen wir die Menge aller geordneten Punktepaare

$$[a, b] \text{ mit } a < \mathfrak{G} \quad \text{und} \quad b < \mathfrak{H}$$

den Produktraum $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$.

Ist $A < \mathfrak{G}$ und $B < \mathfrak{H}$, so nennen wir $[A, B]$ die Menge aller $[a, b]$ mit $a < A$ und $b < B$. Ist U eine Umgebung von a und V eine Umgebung von b, so ernennen wir $[U, V]$ zur Umgebung von $[a, b]$.

Man sieht leicht ein, daß $[A, B]$ dann und nur dann kompakt bzw. offen ist, wenn sowohl A als auch B kompakt bzw. offen ist. Ferner sieht man leicht, daß $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ denselben Anforderungen genügt, wie wir sie an $\mathfrak{G}$ gestellt haben, und daß $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ dann und nur dann kompakt ist, wenn sowohl $\mathfrak{G}$ als auch $\mathfrak{H}$ kompakt ist. Ferner ist

$$\mathfrak{R}([A, B]) = [\mathfrak{R}(A), B] + [A, \mathfrak{R}(B)] + [\mathfrak{R}(A), \mathfrak{R}(B)].$$

Satz 8. *$\mathfrak{H}$ sei nicht kompakt. Ist auch $\mathfrak{G}$ nicht kompakt, so hat $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ genau einen Endpunkt. Ist dagegen $\mathfrak{G}$ kompakt, so lassen sich die Enden von $\mathfrak{H}$ und $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ isomorph aufeinander beziehen.*

Beweis[17]). Sei C eine C-Menge von $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ und $\mathfrak{E}(C)$ nicht leer. Wir können dann schreiben

$$C = \underset{a < \mathfrak{G}}{\mathfrak{B}}([a, N_a]),$$

[16]) Hat nichts mit den $\mathfrak{H}$ aus Satz 6 und 7 zu tun.

[17]) Der Beweis ist so geführt, daß sich ein ähnlicher Satz sofort aussprechen läßt für Klassen von Räumen, in denen über die Existenz usw. von Endpunkten nichts bekannt ist.

wobei über alle verschiedenen a von $\mathfrak{G}$ zu summieren ist. Jedes N_a ist offen. Wir setzen bei festem a_0

$$L = \underset{a \subset \mathfrak{G}}{\mathfrak{B}} (\mathfrak{B}(N_a, N_{a_0}) - \mathfrak{D}(N_a, N_{a_0}))$$

und werden zeigen, daß L kompakt ist.

Sei nämlich b irgendein Punkt von L, dann gibt es ein a mit

$$b < \mathfrak{B}(N_a, N_{a_0}), \quad b \notin \mathfrak{D}(N_a, N_{a_0}).$$

Wir können annehmen, daß b in N_a, also nicht in N_{a_0} ist. Dann ist

$$[a, b] < C, \quad [a_0, b] \notin C,$$

also gibt es wegen des Zusammenhangs von $[\mathfrak{G}, b]$ ein a_1 mit

$$[a_1, b] < \mathfrak{R}(C).$$

Lassen wir b alle Punkte von L durchlaufen, so folgt aus der Kompaktheit von $\mathfrak{R}(C)$ die von L.

A sei die Menge aller a mit $\mathfrak{R}(N_a) \neq 0$. Aus

$$\underset{a \subset A}{\mathfrak{B}} ([a, \mathfrak{R}(N_a)]) < \mathfrak{R}(C)$$

folgt die Kompaktheit von A und $\mathfrak{R}(N_a)$.

Tritt unter den Mengen N_a die leere Menge auf, so nennen wir sie N_{a_c}. Dann ist wegen

$$\underset{a \subset \mathfrak{G}}{\mathfrak{B}} (N_a) = L$$

N_a kompakt, also von $\mathfrak{H}$ verschieden. Für alle $a \notin A$ ist nach Definition $\mathfrak{R}(N_a)$, also auch N_a leer, und es ist

$$C = \underset{a \subset A}{\mathfrak{B}} ([a, N_a]) < [A, \underset{a \subset A}{\mathfrak{B}} (N_a)] = [A, L].$$

C ist dann im Widerspruch zur Annahme kompakt. Infolgedessen sind alle $N_a \neq 0$, und für $a \notin A$ ist $N_a = \mathfrak{H}$.

Wir können nun schreiben

$$C = [\mathfrak{G} - A, \mathfrak{H}] + \underset{a \subset A}{\mathfrak{B}} ([a, N_a]),$$

und wir setzen

$$D = [\mathfrak{G} - A, \mathfrak{H}] + [A, N_{a_0}] \tag{1}$$

$$= [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}] - [A, \mathfrak{H} - N_{a_0}] \tag{2}$$

$$= [\mathfrak{G} - A, \mathfrak{H} - N_{a_0}] + [\mathfrak{G}, N_{a_0}]. \tag{3}$$

C und D unterscheiden sich wegen (1) in höchstens $[A, L]$, also in etwas Kompaktem.

Ist $A = 0$, so ist $D = [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ und

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]).$$

In diesem Fall sind wir bereits fertig. Wir nehmen in Zukunft an, es sei $A \neq 0$

Wir unterscheiden die beiden Möglichkeiten:

$$\text{I. } \mathfrak{G} - A \neq 0; \qquad \text{II. } \mathfrak{G} - A = 0.$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit I:

$$\mathfrak{R}(D) \supset [\mathfrak{R}(\mathfrak{G} - A), \mathfrak{H} - N_{a_0}]$$

wegen (3). $\mathfrak{R}(D)$ ist kompakt, also ist $\mathfrak{H} - N_{a_0}$ kompakt. Also unterscheidet sich wegen (2) $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ von D in etwas Kompaktem, also auch von C. Es ist daher wiederum

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]).$$

II. Wegen (3) ist

$$D = [\mathfrak{G}, N_{a_0}], \qquad D \text{ ist eine } C\text{-Menge},$$

und

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, N_{a_0}]);$$

ferner ist, weil A kompakt ist, $\mathfrak{G}$ kompakt.

Ist daher $\mathfrak{G}$ nicht kompakt, so liegt I vor, und $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ besitzt nur den einen Endpunkt

$$\mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]).$$

Ist dagegen $\mathfrak{G}$ kompakt, so bestehen die Möglichkeiten

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]) \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, N_{a_0}]).$$

Da N_{a_0} eine willkürliche C-Menge ist, besteht der im Satz behauptete Isomorphismus:

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{H}) \longleftrightarrow \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]),$$
$$\mathfrak{E}(N_{a_0}) \longleftrightarrow \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, N_{a_0}]).$$

2. Kapitel.

Die Enden der Schiebräume.

In den von uns betrachteten Räumen $\mathfrak{G}$, d. h. in den im Kleinen kompakten, zusammenhängenden, im Kleinen zusammenhängenden, topologischen Räumen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom, lassen sich je zwei Punkte durch ein kompaktes Kontinuum verbinden.

Darüber hinaus sei $\mathfrak{G}$ von nun an ein *Schiebraum*. Das soll heißen: Es gibt eine einfach transitive Schar bis auf die Identität fixpunktfreier topologischer Transformationen von $\mathfrak{G}$ in sich mit dem Bild eines festen Punktes e als Parameter; jeder der drei Punkte: Parameter, Original und Bild ist stetig von den beiden andern zusammen abhängig.

Wir schreiben das Bild als geordnetes Produkt von Parameter und Original. Dann ist

$$ea = ae = a$$

und aus der Existenz je zweier der drei Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a, \quad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = b, \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu b_\nu = ab \quad (\nu = 1, 2, \ldots$$

folgt die des dritten.

Unter MN verstehen wir die Menge aller Punkte mn mit $m < M$ und $n < N$. Mit je zweien der drei Mengen

$$M, \quad N, \quad MN$$

ist auch die dritte kompakt.

aC bzw. aG ist eine C- bzw. G-Menge, desgleichen Ca bzw. Ga. Es ist $\mathfrak{R}(aC) = a\mathfrak{R}(C)$ usw.

Satz 9. $\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}(aC) = \mathfrak{E}(Ca)$.

Beweis. Im Falle $\mathfrak{E}(C) = 0$ ist der Satz klar. Wir nehmen also an $\mathfrak{E}(C) \neq 0$. Sei $\mathfrak{E}(C) \neq \mathfrak{E}(aC)$. Dann gibt es entweder in C eine gegen aC oder in aC eine gegen C fremde nicht kompakte Menge $c_1, c_2, \ldots$. Wir verbinden e mit a durch ein kompaktes Kontinuum A. Dann ist z. B.

$$c_\nu \nsubset aC \quad \text{und} \quad ac_\nu < aC, \quad \text{also} \quad \mathfrak{D}(A, \mathfrak{R}(aC)) \neq 0.$$

Es gibt also zu jedem ν ein $a_\nu < A$ mit

$$a_\nu c_\nu < \mathfrak{R}(aC).$$

Die Mengen a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und $\mathfrak{R}(aC)$ sind kompakt, also ist im Widerspruch zur Annahme die Menge c_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ kompakt. Also ist

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}(aC).$$

Ebenso beweist man

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}(Ca).$$

Satz 10. *Sei* $\mathfrak{E}(C) \neq 0$ *und* $c_1, c_2, \ldots$ *eine divergente Folge aus* C. *Dann liegen fast alle* ac_ν *und fast alle* $c_\nu a$ *in* C.

Beweis. Nach Satz 9 unterscheidet sich $\mathfrak{D}(C, aC)$ von aC in einer kompakten Menge. Alle ac_ν sind in aC, also fast alle in $\mathfrak{D}(C, aC)$ und daher auch in C. Ebenso folgt der zweite Teil des Satzes.

Satz 11. *M sei kompakt. Ferner sei $c_1, c_2, \ldots$ eine divergente Folge aus C. Dann liegen fast alle $c_\nu M$ und fast alle Mc_ν in C.*

Beweis. m sei ein Punkt von $\overline{M}$ und U_m eine seiner Umgebungen. Nach Satz 10 gibt es ein ν'_m mit

$$c_\nu m < C \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu'_m.$$

Wäre für unendlich viele ν

$$c_\nu U_m \nsubset C,$$

so gäbe es wegen des Zusammenhangs von U_m eine Teilfolge μ_ν und Punkte $q_{\mu_\nu} < U_m$ mit

$$c_\nu q_{\mu_\nu} < \mathfrak{R}(C).$$

Die Mengen q_{μ_ν} und $\mathfrak{R}(C)$ wären kompakt, also im Widerspruch zur Voraussetzung auch die Menge $c_1, c_2, \ldots$. Darum gibt es ein ν_m'' mit $c_\nu U_m \subset C$ für $\nu \geqq \nu_m''$. Mit endlich vielen U_m läßt sich M überdecken; unter den Zahlen ν_m'' gibt es eine größte ν''. Für $\nu \geqq \nu''$, also für fast alle ν ist $c_\nu M \subset C$. Ebenso folgt der zweite Teil des Satzes.

Aus diesen drei Sätzen geht unmittelbar der folgende Satz hervor:

Satz 12. *Unsere Transformationsschar läßt sich von $\mathfrak{G}$ stetig auf $\overline{\mathfrak{G}}$ fortsetzen. Die Endpunkte sind Fixpunkte. Jede in $\mathfrak{G}$ kompakte Menge läßt sich durch Transformationen der Schar in jede Umgebung jedes Endpunktes hineinziehen.*

Satz 13. *Zu jedem G gibt es ein G^* mit $\mathfrak{E}(\mathfrak{D}(G, G^*)) = 0$ und $G + G^* = \mathfrak{G}$.*

Beweis. Wir überdecken $\mathfrak{R}(G)$ mittels endlich vieler V (Hilfssatz 2). Die endlich vielen Komponenten der Überdeckungsmenge verbinden wir durch kompakte Kontinua mit einer von ihnen und überdecken diese Kontinua gleichfalls mit endlich vielen V. Die gesamte Überdeckungsmenge ist zusammenhängend bzw. kompakt wegen des Zusammenhangs bzw. der Kompaktheit im Kleinen von $\mathfrak{G}$. Wir vereinigen sie mit $\mathfrak{G} - G$ und erhalten das gewünschte G^*, das, wie man sofort sieht, allen Anforderungen genügt

Satz 14. *Es sei $\mathfrak{E}(G_2) \not\subset \mathfrak{E}(G_1)$. Ferner sei $c_1, c_2, \ldots$ eine divergente Folge aus G_1. Dann gibt es ein ν' mit $c_\nu G_2^* \subset G_1$ für $\nu \geqq \nu'$.*

Beweis. Nach Satz 11 gibt es ein ν' mit

$$c_\nu \mathfrak{R}(G_2^*) \subset G_1 - \mathfrak{D}(G_1, G_1^*) \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu'.$$

Demnach besitzt $c_\nu G_2^*$ außerhalb $G_1 - \mathfrak{D}(G_1, G_1^*)$, d. h. innerhalb G_1^* keine Randpunkte. Besäße es dort überhaupt Punkte, so enthielte es G_1^*, und es wäre

$$\mathfrak{E}(G_1^*) \subset \mathfrak{E}(c_\nu G_2^*) \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu'.$$

Nach Satz 9 wäre dann

$$\mathfrak{E}(G_1^*) \subset \mathfrak{E}(G_2^*),$$

also

$$\mathfrak{E}(G_2) \subset \mathfrak{E}(G_1),$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Daher ist $\mathfrak{D}(G_1^*, c_\nu G_2^*) = 0$ und $c_\nu G_2^* \subset G_1$ für $\nu \geqq \nu'$.

Satz 15. *$\mathfrak{G}$ besitzt höchstens zwei gegeneinander fremde Enden, also höchstens zwei verschiedene Endpunkte.*

Beweis. Wir nehmen die Existenz von drei paarweise fremden nicht leeren Enden $\mathfrak{E}(G_1)$, $\mathfrak{E}(G_2)$, $\mathfrak{E}(G_3)$ an[18]; wir können voraussetzen, daß

[18]) Daß hier mit G statt C gearbeitet wird, ist nicht wesentlich; siehe auch Fußnote [15]), S. 702.

die G_ν paarweise fremd sind. Nach Satz 14 gibt es ein a mit

$$aG_2^* \subset G_1.$$

Daraus folgt nach Satz 9

$$\mathfrak{E}(G_2^*) \subset \mathfrak{E}(G_1).$$

Ferner ist

$$G_1 + G_3 \subset G_2^*,$$

also

$$\mathfrak{E}(G_1) + \mathfrak{E}(G_3) \subset \mathfrak{E}(G_2^*) \subset \mathfrak{E}(G_1).$$

Das ergibt

$$\mathfrak{D}(G_1, G_3) \neq 0 \quad (\text{wegen } \mathfrak{E}(G_3) \neq 0),$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Also war unsere Annahme falsch, und der Satz ist bewiesen.

Wir verstehen im folgenden unter G' bzw. G'' die Menge aller g' bzw. g'' mit $gg' = a$ bzw. $g''g = a$, wenn $g \subset G$ und a ein fester Punkt ist.

Satz 16. $\mathfrak{E}(G_1') = \mathfrak{E}(G_1'') = \mathfrak{E}(G_2)$ *und* $\mathfrak{E}(G_2') = \mathfrak{E}(G_2'') = \mathfrak{E}(G_1)$.

Beweis. Wäre

$$\mathfrak{E}(G_1') \neq \mathfrak{E}(G_2),$$

so wäre nach Satz 15

$$\mathfrak{E}(G_1') = \mathfrak{E}(G_1) = \mathfrak{E}(G_2^*).$$

In $\mathfrak{D}(G_2^*, G_1)$ gäbe es also eine Menge ohne Häufungspunkt $c_1, c_2, \ldots$, der art, daß auch $c_1', c_2', \ldots$ in $\mathfrak{D}(G_2^*, G_1)$ enthalten wäre. Nach Satz 14 gäb es ein c_ν mit

$$c_\nu G_2^* \subset G_1.$$

Dann wäre auch $c_\nu c_\nu' = a \subset G_1$, wir können aber G_1 von vornherein s wählen, daß es a nicht enthält. Unsere Annahme führt zum Widerspruch also ist $\mathfrak{E}(G_1') = \mathfrak{E}(G_2)$. Ebenso folgen die übrigen Behauptungen de Satzes.

Satz 17. *Jeder geschlossene Weg W in $\mathfrak{G}$ läßt sich unter Festhaltun eines Punktes stetig überführen in einen Weg $W_2 = A + W_1 - A$. Dabe bedeutet W_1 einen ganz in einem beliebigen C mit $\mathfrak{E}(C) \neq 0$ verlaufende geschlossenen Weg und A einen in dem festgehaltenen Punkt beginnende und in C endenden Weg. Ist daher irgendeine Umgebung irgendeine Endpunktes von $\mathfrak{G}$ einfachzusammenhängend, so ist $\mathfrak{G}$ einfachzusammen hängend. — Ferner läßt sich in $\mathfrak{G}$ jede in $\mathfrak{G}$ kompakte Menge stetig au einen Punkt zusammenziehen.*

Beweis[19]). Nach Satz 11 gibt es ein a mit $W_1 = aW \subset C$. Wir ver binden e mit a durch den Weg $A = a_\tau$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ und verstehen unte

[19]) Die im Beweis benutzte Tatsache der Verbindbarkeit zweier Punkte durc eine Kurve ist leicht zu beweisen und z. B. aus Sätzen von Hahn und Mazurkiewi (siehe etwa Sitzungsberichte Wien 123 (1914), S. 2433) abzuleiten.

A_σ das Stück von a_τ für $0 \leqq \tau \leqq \sigma$. Wir können annehmen, daß der festgehaltene Punkt e ist. Die gewünschte Überführung lautet $A_\tau + a_\tau W - A_\tau$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$.

Der zweite Teil des Satzes folgt unmittelbar aus Satz 11.

Satz 18. *$\hat{\mathfrak{G}}$ sei eine Unterschar von $\mathfrak{G}$ und genüge denselben Anforderungen, wie wir sie an $\mathfrak{G}$ gestellt haben. $\hat{\mathfrak{G}}$ sei abgeschlossen und habe genau ein Ende. Dann hat auch $\mathfrak{G}$ genau ein Ende.*

Beweis. Hätte $\mathfrak{G}$ kein Ende, so wäre es kompakt; dann wäre auch $\hat{\mathfrak{G}}$ kompakt, was einen Widerspruch zur Voraussetzung ergibt.

Hätte $\mathfrak{G}$ zwei Enden, so gäbe es nach Satz 16 ein G mit $\mathfrak{E}(G) \neq \mathfrak{E}(G')$ und $\mathfrak{D}(G, G') = 0$.[20]) Es sei $\hat{G} = \mathfrak{D}(\hat{\mathfrak{G}}, G)$, dann ist $\hat{G}' = \mathfrak{D}(\hat{\mathfrak{G}}, G')$. $\mathfrak{E}(\hat{G})$ und $\mathfrak{E}(\hat{G}')$ erschöpfen $\mathfrak{E}(\hat{\mathfrak{G}})$, denn andernfalls gäbe es in $\hat{\mathfrak{G}}$, also in $\mathfrak{G}$ eine zu $G + G'$ fremde nicht kompakte Menge. Da $\hat{\mathfrak{G}}$ nicht kompakt ist, so gilt $\mathfrak{E}(\hat{G}) \neq 0$ und nach Voraussetzung

$$\mathfrak{E}(\hat{G}) = \mathfrak{E}(\hat{G}').$$

Das ergibt $\mathfrak{D}(\hat{G}, \hat{G}') \neq 0$, $\mathfrak{D}(G, G') \neq 0$ im Widerspruch zur Annahme. Mithin ist $\mathfrak{E}(G) = \mathfrak{E}(G')$, $\mathfrak{G}$ hat also genau ein Ende.

3. Kapitel.

Die Enden topologischer Gruppen.

$\mathfrak{G}$ sei von nun an eine topologische Gruppe. Das soll heißen: Zwischen den Punkten von $\mathfrak{G}$ existiert eine den bekannten Gruppengesetzen genügende verbindende Relation (zu den Forderungen des 2. Kapitels kommt also noch die der Gültigkeit des assoziativen Gesetzes), und aus der Existenz von

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = b \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

folgt die von

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu^{-1} = a^{-1} \quad \text{und von} \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu b_\nu = ab \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Die Identität bezeichnen wir mit e und befleißigen uns auch im übrigen der von der Produktbildung aus dem 2. Kapitel her gewohnten Bezeichnungen.

$\mathfrak{G}$ ist dann auch ein Schiebraum, und wir können ohne weiteres die Sätze 9 bis 18 auch für die topologische Gruppe $\mathfrak{G}$ aussprechen. In diesem Zusammenhang wollen wir sie als 9^* bis 18^* bezeichnen. Für G' und G'' werden wir, da die Annahme $a = e$ unwesentlich ist, G^{-1} schreiben, und entsprechend erklären wir allgemein das Zeichen M^{-1}. Satz 16^* lautet dann dahin, daß in einem $\mathfrak{G}$ mit zwei verschiedenen Enden diese zueinander invers sind.

[20]) Das zur Erzeugung von G' nötige a wähle man aus $\hat{\mathfrak{G}}$.

Als Gruppenkriterien im Sinne der Einleitung dürften von den bewiesenen Sätzen am brauchbarsten Satz 15 und 17 sein. In der Tat führen diese im Fall der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten recht weit (im zweidimensionalen Fall ist man nicht auf unsere Sätze angewiesen).

Definition. $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ in dem „Wirkungsraum“ $\mathfrak{W}$, wenn jedem Punkt a von $\mathfrak{G}$ eine eineindeutige Transformation $f_a(\mathfrak{W})$ von $\mathfrak{W}$ in sich zugeordnet ist mit

$$f_{ab}(x) = f_a(f_b(x)).^{21})$$

Die Punkte bzw. Mengen von $\mathfrak{W}$ bezeichnen wir durch x, y, z bzw. X, Y, Z. Über $\mathfrak{W}$ machen wir dieselben Voraussetzungen, wie wir sie über $\mathfrak{G}$ gemacht haben, d. h. $\mathfrak{W}$ soll ein topologischer Raum mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom sein, zusammenhängend, im Kleinen zusammenhängend und im Kleinen kompakt.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt einstufig, wenn aus $a \neq b$ $f_a(x) \equiv f_b(x)$ folgt.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt transitiv, wenn es zu je zwei Punkten x, y von $\mathfrak{W}$ ein a aus $\mathfrak{G}$ gibt mit $f_a(x) = y$.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt stetig, wenn aus der Existenz von

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} x_\nu = x \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

die von

$$\lim_{\nu=\infty} f_{a_\nu}(x_\nu) = f_a(x)$$

folgt.

Wir verstehen unter $f_A(X)$ die Menge aller $f_a(x)$ mit $a \subset A$ und $x \subset X$.

Satz 9a. $\mathfrak{E}(f_a(X)) = \mathfrak{E}(X)$, *bei stetigem* $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$.

Beweis. Genau wie der von Satz 9.

Satz 19. $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ *sei eine transitive stetige Darstellung von* $\mathfrak{G}$ *in* $\mathfrak{W}$. *Es sei* $f_a(x_0) = x$. *Dann gibt es zu jeder Umgebung* Z_x *von* x *eine Umgebung* U_a *von* a *mit*

$$f_{U_a}(x_0) \subset Z_x$$

und zu jeder Umgebung U_a *von* a *eine Umgebung* Z_x *von* x *mit*

$$f_{U_a}(x_0) \supset Z_x.$$

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus der Stetigkeit von $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$. Wir werden den ganzen Beweis führen, ohne von dem Zusammenhang von $\mathfrak{G}$ Gebrauch zu machen; von $\mathfrak{W}$ werden wir an topologischen Eigenschaften nur benutzen, daß es ein topologischer Raum ist.

Es genügt, den zweiten Teil des Satzes für $a = e$ zu beweisen, weil aU_e eine Umgebung von a vertritt.

---

[21]) Z. B. $\mathfrak{G}$ = dreidimensionaler projektiver Raum, $\mathfrak{W}$ = zweidimensionale Kugel, $f_a(\mathfrak{W})$ = Kugeldrehungen.

Nach Hilfssatz 1 läßt sich e von dem kompakten $\mathfrak{R}(U_e)$ durch eine Umgebung abtrennen, die in U_e enthalten und gegen eine Umgebung von $\mathfrak{R}(U_e)$ fremd ist, deren abgeschlossene Hülle also in U_e enthalten ist. Es genügt daher, den zweiten Teil des Satzes mit $\overline{U}_e$ statt U_a zu beweisen.

Zunächst eine Vorbemerkung: $B_1, B_2, \ldots$ sei eine Folge abgeschlossener Mengen von $\mathfrak{G}$ ohne innere Punkte. Wir machen die Annahme,

$$B = \overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{V}}}(B_\nu)$$

enthielte einen inneren Punkt b_1 und seine abgeschlossene Umgebung $\overline{V}_{b_1}$, und werden aus der Annahme einen Widerspruch herleiten.

$V_{b_1} - \mathfrak{D}(V_{b_1}, B_1)$ ist offen, enthält b_2 und $\overline{V}_{b_2}$,

$V_{b_\nu} - \mathfrak{D}(V_{b_\nu}, B_1 + \ldots + B_\nu)$ ist offen, enthält $b_{\nu+1}$ und $\overline{V}_{b_{\nu+1}}$.

Dann gilt

$$\overline{V}_{b_\nu} < \overline{V}_{b_1} < B. \tag{1}$$

Ferner ist

$$\mathfrak{D}(\overline{V}_{b_\nu}, B_1 + \ldots + B_{\nu-1}) = 0, \tag{2}$$

$$0 + \overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{D}}}(\overline{V}_{b_\nu}) > b = \lim b_\nu, \tag{3}$$

weil $\mathfrak{G}$ im Kleinen kompakt ist und jedes $\overline{V}_{b_\nu}$ das nachfolgende enthält.

$$b \not< \overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{V}}}(B_\nu) \qquad \text{wegen (2)},$$

$$b < \overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{V}}}(B_\nu) \qquad \text{wegen (1) und (3)}.$$

Damit ist der Widerspruch aufgewiesen. B enthält also keinen inneren Punkt.

Nun zum Beweise unseres Satzes. $\mathfrak{G}$ läßt sich mit abzählbar vielen $d_\nu \overline{V}_e$ überdecken, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Enthielte $f_{\overline{V}_e}(x)$ keinen inneren Punkt, so gälte das gleiche für

$$f_{d_\nu \overline{V}_e}(x_0) = f_{d_\nu}(f_{\overline{V}_e}(x_0))$$

und nach der Vorbemerkung auch für

$$\overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{V}}}(f_{d_\nu \overline{V}_e}(x_0)) = f_{\mathfrak{V}(d_\nu \overline{V}_e)}(x_0) = f_{\mathfrak{G}}(x_0) = \mathfrak{W}.$$

Das ist aber unmöglich. Somit enthält $f_{\overline{V}_e}(x_0)$ einen inneren Punkt y und seine Umgebung Z_y. Dann gibt es ein $b < \overline{V}_e$ mit

$$f_b(x_0) = y.$$

$$f_{b^{-1}\overline{V}_e}(x_0) = f_{b^{-1}}(f_{\overline{V}_e}(x_0))$$

enthält x_0 als inneren Punkt, also auch eine Umgebung Z_{x_0} von x_0. Man braucht daher $\overline{V}_e$ nur so zu wählen, daß

$$\overline{V}_e^{-1}\overline{V}_e \subset \overline{U}_e$$

gilt. Dann folgt

$$f_{\overline{U}_e}(x_0) \supset f_{\overline{V}_e^{-1}\overline{V}_e}(x_0) \supset Z_{x_0},$$

wie gewünscht.

Satz 20. *$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ sei eine stetige einstufige transitive Darstellung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{W}$. $\hat{\mathfrak{G}}$ sei die Menge aller a mit $f_a(x_0) = x_0$. $\hat{\mathfrak{G}}$ sei kompakt. Dann haben $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{W}$ gleich viel Enden.*

Beweis. Im I. Teil des Beweises werden wir eindeutig jedem Ende von $\mathfrak{G}$ ein Ende von $\mathfrak{W}$ zuordnen, im II. Teil umgekehrt jedem Ende von $\mathfrak{W}$ ein Ende von $\mathfrak{G}$; im III. Teil werden wir die Gleichwertigkeit beider Zuordnungen nachweisen.

I. C sei eine C-Menge von $\mathfrak{G}$. C ist offen, also ist nach dem zweiten Teil von Satz 19 $f_C(x_0)$ offen; $\mathfrak{R}(C)$ ist kompakt, also ist wegen der Stetigkeit der Darstellung $\mathfrak{R}(f_C(x_0))$ kompakt.

$$Y = f_C(x_0)$$

ist demnach eine C-Menge von $\mathfrak{W}$.

Ist C kompakt, so ist wegen der Stetigkeit der Darstellung Y kompakt. Aus

$$\mathfrak{E}(C) = 0 \qquad \text{folgt} \quad \mathfrak{E}(Y) = 0,$$

aus

$$\mathfrak{E}(C_1) = \mathfrak{E}(C_2) \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{E}(Y_1) = \mathfrak{E}(Y_2).$$

II. Wir vergessen die Bedeutung von C und Y aus (I) und nehmen an, Y sei eine beliebige C-Menge von $\mathfrak{W}$. Die Menge aller c mit $f_c(x_0) \subset Y$ heiße C. $Y = f_C(x_0)$ ist offen, also ist nach dem ersten Teil von Satz 19 C offen. Wir wollen nachweisen, daß $\mathfrak{R}(C)$ kompakt ist, d. h. wir wollen zeigen, daß eine beliebige unendliche Teilmenge M von $\mathfrak{R}(C)$ einen Häufungspunkt besitzt.

$$f_M(x_0) \subset \mathfrak{R}(Y),$$

also kompakt. Es gibt also eine konvergente Teilfolge $x_1, x_2, \ldots,$ von $f_M(x_0)$; ihr Grenzwert heiße

$$\begin{aligned} f_{l}(x_0) &= x, \\ f_{k_\nu}(x_0) &= x_\nu \qquad (k_\nu \subset M). \\ f_{l_\nu}(x_0) &= x_\nu \end{aligned}$$

läßt sich nach Satz 19, 2. Teil, mit $\lim l_\nu = l$ erreichen,

$$\begin{aligned} f_{k_\nu^{-1} l_\nu}(x_0) &= x_0, \\ k_\nu^{-1} l_\nu &\subset \hat{\mathfrak{G}} \qquad \text{kompakt.} \end{aligned}$$

Mithin hat die Folge k_ν, also auch M einen Häufungspunkt, und $\mathfrak{R}(C)$ ist kompakt. C ist daher eine C-Menge.

Genau so zeigt man, daß die Kompaktheit von Y die von C nach sich zieht, d. h.

$$\text{aus} \quad \mathfrak{E}(Y) = 0 \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{E}(C) = 0,$$

$$\text{aus} \quad \mathfrak{E}(Y_1) = \mathfrak{E}(Y_2) \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{E}(C_1) = \mathfrak{E}(C_2).$$

III. Wir konstruieren nach (II) zu einem Y sein C und nach (I) zu diesem C sein Y, das mit dem Ausgangs-Y identisch ist, ebenso nach (I) zu einem C sein Y und nach (II) zu diesem Y sein C, das aus dem Ausgangs-C auch durch hintere Multiplikation mit $\hat{\mathfrak{G}}$ entsteht, dessen Ende also nach Satz 9 und 11 mit dem von C zusammenfällt.

Daß Satz 20 ohne die Kompaktheit von $\hat{\mathfrak{G}}$ nicht zu gelten braucht, zeigt folgendes

Beispiel. $\mathfrak{W}$ sei die Gerade, x die Koordinate eines Punktes von $\mathfrak{W}$ (kleine lateinische Buchstaben bedeuten im folgenden reelle Zahlen). $\mathfrak{G}$ sei die Menge aller Transformationen

$$x' = ax + b, \quad a > 0,$$

ist also der Euklidischen Ebene homöomorph. $\hat{\mathfrak{G}}$ ist der Geraden homöomorph, also nicht kompakt, $\mathfrak{G}$ hat einen Endpunkt, $\mathfrak{W}$ hat deren zwei.

Berlin, Januar 1930.

(Eingegangen am 29. März 1930.)

Über die komplementäre Klasse bei den hypozykloidischen Funktionssystemen.

Von

Hermann Schmidt in Jena.

Einleitung.

Betrachtet man die *Integralperioden einer Klasse k* in der schlichten Ebene *multiplikativer Funktionen* mit von einem Parameter z abhängigen Verzweigungspunkten als Funktionen von z, so genügen sie bekanntlich in vielen Fällen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Nach Nekrassoff[1]) ist das insbesondere dann der Fall, wenn der Integrand die Form hat

$$f_1^{\alpha_1}(\tau, z)\, f_2^{\alpha_2}(\tau, z) \dots f_r^{\alpha_r}(\tau, z),$$

wo die $f_\varrho(\tau, z)$ Polynome in τ, z vom Grade n_ϱ in τ sein sollen, für die die Diskriminante von $f_1 f_2 \dots f_r$ hinsichtlich τ nicht identisch in z verschwindet, während die α_ϱ und $\sum n_\varrho \alpha_\varrho$ nicht ganzzahlig, sonst beliebig komplex sein mögen. Die Perioden genügen dann einer Fuchsschen Differentialgleichung der Ordnung $n = \left(\sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho\right) - 1$; ein Fundamentalsystem derselben bildet zusammen mit seinen $n-1$ ersten Ableitungen die Basis einer *Klasse K Riemannscher Funktionssysteme*. K ändert sich nicht bei Abänderung der α_ϱ um ganze Zahlen als Summanden, wobei ja die Klasse k dieselbe bleibt; ersetzt man dagegen alle α_ϱ durch α'_ϱ, wo $\alpha_\varrho + \alpha'_\varrho$ ganz, d. h. also, geht man zur reziproken multiplikativen Klasse über, so entsteht eine Klasse K', deren Zusammenhang mit K neuerdings Herr Schlesinger[2]) im Falle der höheren hypergeometrischen Integrale studiert

[1]) Über lineare Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integriert werden, Math. Annalen 38 (1891), S. 509—560, insbes. S. 535.

[2]) Über die hypergeometrischen Differentialsysteme, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 505—518, insbes. S. 511—512.

hat (wenn auch nicht in der hier benutzten Formulierung). Dem bekannten [3]) Fall $n = 2$ ließen sich auch einordnen eine Relation von Schläfli [4]) für die allgemeinen Legendreschen und eine bei Nielsen [5]) für die metasphärischen Funktionen. Und zwar kann man das Ergebnis dahin aussprechen, daß die Monodromiegruppe $\mathfrak{G}'$ von K' durch Transformation mit einer konstanten Matrix G aus der Gruppe $\mathfrak{G}$ der zu K komplementären Klasse $\bar{K}$ hervorgeht [6]), daß also

$$\mathfrak{G}' = G^{-1}\,\bar{\mathfrak{G}}\,G. \tag{1}$$

Da ein allgemeiner Satz in dieser Richtung nicht bekannt scheint [6a]), mag es gestattet sein, hier noch einen weiteren Sonderfall, den der hypozykloidischen Funktionssysteme [7]) [8]) im einzelnen durchzuführen. Es ist hier

$$f_1(\tau, z) = \tau;\ f_2(\tau, z) = \tau^n - nz\tau + n - 1 \quad \left(\begin{matrix}\text{unten } f,\ \alpha,\ \beta \\ \text{für } f_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2\end{matrix}\ \text{geschrieben}\right).$$

Die Legendreschen und Nielsenschen Funktionen sind enthalten [9]) (nicht die allgemeinen hypergeometrischen Funktionen $n \geqq 2$). In der Tat läßt sich hier die Gültigkeit einer Beziehung der Form (1) erweisen.

Im einzelnen wird in § 1 durch direkte Betrachtung linearer Gleichungssysteme eine Matrix G ermittelt, die (1) erfüllt (Hilfssatz 1) und infolgedessen *ein* und damit alle Systeme von K' in solche von $\bar{K}$ transformiert (Satz 1). Es stellt sich heraus, daß diese Transformation auch erhalten wird, indem man die in k benutzten Fundamentalintegrationswege C_j durch

---

[3]) Ohne volle Durchführung Klein, Über die hypergeometrische Funktion, Aut. Vorl. Göttingen 1894/1906, S. 195/196.

[4]) Über die zwei Heineschen Kugelfunktionen, Bern 1881.

[5]) Theorie des fonctions metasphériques, Paris 1911, S. 67, insbes. Gl. (4).

[6]) Wir legen den R. Königschen Klassenbegriff zugrunde, der mit dem Poincaré-Schlesingerschen Art- (nicht Klassen-)begriff so zusammenhängt: Ist (y_{ik}) eine bestimmt gewählte Integralmatrix des Differentialsystems $\frac{dV}{dz} = VA$ der Art, so durchläuft die Summe $\Sigma\, y_{ik}\, r_k$ mit rationalen Funktionen $r_k(z)$ alle Funktionssysteme der Klasse. Ist C eine konstante Matrix mit $|C| \neq 0$, so ist $Z = CY$ wieder eine Integralmatrix des gleichen Differentialsystems, aber die Spalten brauchen nicht mehr Funktionssysteme der gleichen Klasse zu sein. (Indexbezeichnung wie bei Schlesinger.)

[6a]) Anmerkung bei der Korrektur. Inzwischen wurde vom Verfasser mit anderen Hilfsmitteln ein solcher aufgestellt. Jenaer Habilitationsschrift 1930.

[7]) Hermann Schmidt, Neue Verallgemeinerung der Legendreschen Funktionen, Jahresber. der D. M. V. 1929, S. *40/41* (Vortragsauszug).

[8]) R. König und Herm. Schmidt, Über Polynom- und allgemeinere Funktionssysteme, die aus der hypozykloidischen Abbildung entspringen, Journal f. r. u. a. Math. **162** (1930), S. 69—113.

[9]) $n = 2$ ist für unseren Ausgangspunkt (Integraldarstellung) trivial durch $\tau \left| \frac{1}{\tau} \right.$ zu behandeln.

passende andere Wege $\breve{C}_j$ für $\breve{k}$ ersetzt (Satz 2). — In § 2 wird zunächst für eine geeignete Klassenbasis V von K ein Differentialsystem hergeleitet und die Beziehung der dem adjungierten Differentialsystem genügenden komplementären Basis $\breve{V}$ von $\breve{K}$ zu der in § 1 bestimmten Basis von $\breve{K}$ ermittelt. Bei geeigneter Wahl von α', β' gehen beide Basismatrizen durch Rechtsmultiplikation mit einer von z unabhängigen Matrix auseinander hervor (Satz 3). Zur vollständigen Bestimmung derselben bedienen wir uns der in [8]) aus einer allgemeinen asymptotischen Formel von Herrn Perron gewonnenen asymptotischen Werte für $\Re(\alpha) \to +\infty$, sowie der Jacobischen Formel für die Determinante einer Integralmatrix und des Heymannschen Analogons für Differenzengleichungen.

§ 1.

Die komplementäre Klasse, gewonnen durch Übergang zur komplementären multiplikativen Klasse im Integranden.

Gegeben ist die Klasse K der hypozykloidischen Funktionssysteme [7]) [8]), die man folgendermaßen enthält. Es sei

$$v_{j,\alpha}^{\beta}(z) = \int_{C_j} \tau^{\alpha} f^{\beta}(\tau, z)\, d\tau \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei ist gesetzt $f(\tau, z) = \tau^n - nz\tau + n - 1$; $f(t_j, z) = 0$; $C_j =$ Doppelschleife $(t_j^+ 0^+ t_j^- 0^-)$. (Die komplexen Konstanten α, β waren in [8]) mit $\lambda + l$, $\mu + m$ bezeichnet.) Es liege ferner, wie in [8]), II. Abschn., § 1, z in einem beschränkten Teilgebiet $\overline{\mathfrak{E}}$ des von 0 aus konstruierten Sterns $\mathfrak{E}$ von $\frac{1}{z^n - 1}$. In je einem Winkelraum $(n-j)\frac{2\pi}{n} < \arc \tau < (n-j+1)\frac{2\pi}{n}$ vom Scheitel 0 und der Öffnung $\frac{2\pi}{n}$ befindet sich dann genau eine Wurzel t_j von $f(t, z) = 0$ und die Beträge der t_j sind nach unten beschränkt. Wählt man eine (nicht positiv-reelle) Zahl τ_0 mit $0 < |\tau_0| < |t_j|$ fest, so sind, wie a. a. O. genauer ausgeführt, nach Aufschneidung der Ebene längs der Strahlen $(t_j \infty)$; $(0, +\infty)$ (die Verlängerungen der ersteren mögen etwa auch durch 0 gehen) und nach Festlegung des Anfangswerts $\tau_0^{\alpha} f^{\beta}(\tau_0, z)$ *eindeutig* definierbar die *Schleifenintegrale*

$$(2) \quad J_j^+ = \int_{(\tau_0 t_j^+ \tau_0)} \tau^{\alpha} f^{\beta}(\tau, z)\, d\tau; \quad J_j^- = \int_{(\tau_0 t_j^- \tau_0)}; \quad J_0^+ = \int_{(\tau_0 0^+ \tau_0)}; \quad J_0^- = \int_{(\tau_0 0^- \tau_0)}.$$

Es sind dann die *Doppelschleifenintegrale*

$$(3) \qquad \int_{C_j} = (1 - e^{2\pi i \alpha}) J_j^+ - (1 - e^{2\pi i \beta}) J_0^+$$

ebenfalls eindeutig definiert und in $\overline{\mathfrak{E}}$ reguläre Funktionen von z, dagegen von der Wahl von τ_0 unabhängig, wofern man natürlich bei etwaiger Abänderung des Anfangspunktes und damit des Integrationswegs den Anfangswert $\tau_0^{\alpha} f^{\beta}(\tau_0, z)$ (bei festem z) als Funktion von τ_0 analytisch fortsetzt

und ihm nicht etwa sprungweise Faktoren $e^{p\cdot 2\pi i\alpha}$; $e^{q\cdot 2\pi i\beta}$ (p, q ganz) beigibt. Die v sind also als analytische Funktionen von τ_0 Konstante.

Wir beschränken uns hier auf den „allgemeinen Fall"

$$(4)\quad e^{2\pi i\alpha} = \Lambda \neq 1; \quad e^{2\pi i\beta} = \mathsf{M} \neq 1; \quad e^{2\pi i(\alpha+n\beta)} = \Lambda \mathsf{M}^n \neq 1.$$

Es sind dann nach[8]), II. Abschn., insbesondere Satz 8, die n Funktionen $v^{\beta}_{j,\alpha}(z)$ ein Fundamentalsystem einer gewissen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung vom Fuchsschen Typ mit den singulären Punkten $\varepsilon_h = e^{\frac{2\pi i h}{n}}$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) im Endlichen. Die Klasse K wird dann erzeugt durch eine Basis, bestehend aus den n Spalten der Matrix

$$\left(\frac{d^{k-1} v^{\beta}_{j\,\alpha}}{dz^{k-1}}\right)_{j,k=1,2,\ldots,n},$$

wofür aber auch genommen werden kann (Satz 11, 12 a. a. O.)

$$V = (v^{\beta}_{j,\alpha+k-1})_{j,k=1,2,\ldots,n}.$$

(Der erste Index j numeriert die Zeilen, der zweite k die Spalten.)

Die v_j erleiden an den singulären Punkten ε_h die *Umlaufsubstitutionen*

$$(\theta_h v^{\beta}_{j,\alpha}) = M_h(v^{\beta}_{j,\alpha}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

(Die Klammern bedeuten die Bildung einer einspaltigen Matrix; θ_h ist Operator der analytischen Fortsetzung um ε_h im positiven Sinne.) Die Matrizen M_h erzeugen die Gruppe von K und haben nach [8]), Satz 7 folgende Werte

$$M_h = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & \mathsf{M} & 1-\mathsf{M} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad h = 1, 2, \ldots, n-1,$$

dagegen

$$M_n = \begin{pmatrix} 1-\mathsf{M} & & & \Lambda\mathsf{M} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \Lambda^{-1} & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(s. Bem. S. 719, Z. 18 v. u.)}$$

Nunmehr stellen wir uns zunächst die Aufgabe, irgendein linear unabhängiges Funktionssystem u_j der *komplementären Klasse* $\bar{K}$ aufzustellen, das aber nicht etwa durch Determinantenquotienten aus den v_j, sondern

selbst durch bestimmte Integrale der ursprünglichen Gestalt dargestellt sein soll. Hat man ein solches System, so ist bekanntlich[10]) z. B. $\left(\frac{d^{k-1}u_j}{dz^{k-1}}\right)_{j,k=1,2,\cdots,n}$ eine Basismatrix für die komplementäre Klasse, da ja die Determinante $\left|\frac{d^{k-1}u_j}{dz^{k-1}}\right|$ wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der u_j nicht identisch verschwindet. Mit dem System u_j beherrscht man also die Klasse $\check{K}$ vollständig. Um aber ein u_j von der in Aussicht genommenen Gestalt zu ermitteln, gehen wir von der Gruppe aus.

Die *Gruppe* der Klasse $\check{K}$ hat zu Erzeugenden die komplementären Matrizen $\check{M}_h$ von M_h, wo $\overline{M}_h \check{M}_h = E$ (E Einheitsmatrix, $\overline{M}$ transponierte Matrix von M). Es ist also

$$(5)\quad \check{M}_h = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1-M^{-1} & 1 & & \\ & & & M^{-1} & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}_{h=1,2,\ldots,n-1}; \qquad \check{M}_n = \begin{pmatrix} 0 & & & \Lambda^{-1}M^{-1} \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \Lambda & & & 1-M^{-1} \end{pmatrix}$$

Jetzt seien α', β' irgend zwei Zahlen für die $\alpha+\alpha'$, $\beta+\beta'$ beide ganzzahlig. (In § 2 werden wir solche α', β' in *bestimmter* Weise auswählen.)

$$(4')\qquad \left.\begin{aligned} e^{2\pi i\alpha'} &= \Lambda^{-1} \\ e^{2\pi i\beta'} &= M^{-1} \end{aligned}\right\}$$

sind dann die der komplementären multiplikativen Klasse $\check{k}$ für die endlichen Verzweigungspunkte zugeordneten Multiplikatoren. Die Umlaufsmatrizen, die zu den $v^{\beta'}_{j,\alpha'}$ gehören, also die Gruppe $\mathfrak{G}'$ der von ihnen erzeugten Klasse K' erzeugen, sind

$$(6)\quad M'_h = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & M^{-1} & 1-M^{-1} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}_{h=1,2,\ldots,n-1}; \qquad M'_n = \begin{pmatrix} 1-M^{-1} & & & \Lambda^{-1}M \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \Lambda & & & 0 \end{pmatrix}$$

[10]) Vgl. etwa R. König, Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme in der Ebene, Journal f. r. u. a. Math. 148, S. 154, Satz 1.

Man sieht sofort, daß $\breve{M}_h$ und M_h' einzeln ähnlich sind, und zwar gilt

$$\breve{M}_h = A_h^{-1} M_h' A_h,$$

wenn man etwa setzt $A_h = E_1^{(h)} E_3^{(h)}$, wo

$$E_1^{(h)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}_{h \neq n}; \qquad E_3^{(h)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & 0 & \mathsf{M} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_{h \neq n};$$

$$E_1^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}; \qquad E_3^{(n)} = \begin{pmatrix} \Lambda^2 \mathsf{M} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(An leeren Stellen der Hauptdiagonale steht 1, an anderen leeren Stellen 0.)

Weitergehend gilt indes

Hilfssatz 1. Es gibt eine konstante Matrix $G = (g_{\varkappa\nu})$ mit nicht verschwindender Determinante, derart, daß für $h = 1, 2, 3, \ldots, n$ gleichzeitig

$$\breve{M}_h = G M_h' G^{-1},$$

und zwar ist G bis auf einen Faktor *eindeutig* bestimmt. (Für irgendeine Matrix N der durch die M_h erzeugten Gruppe gilt dann natürlich auch $\breve{N} = G N' G^{-1}$, z. B. wenn N eine zu $z = \infty$ gehörige Umlaufsmatrix ist.)

Beweis durch wirkliche Herstellung.

Die n Matrizengleichungen

$$\breve{M}_h G = G M_h'$$

oder gleichwertig

$$(\breve{M}_h - E) G = G (M_h' - E) \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

liefern wegen (5), (6) für $h \neq n$

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\alpha) \quad g_{hh} = g_{h+1,h+1} \\ &\beta) \quad (1 - \mathsf{M}) g_{hh} + g_{h,h+1} - \mathsf{M} g_{h+1,h} = 0 \\ &\gamma) \quad g_{h\nu} - \mathsf{M} g_{h+1,\nu} = 0 \\ &\delta) \quad g_{\nu,h+1} - \mathsf{M} g_{\nu h} = 0 \end{aligned} \qquad (\nu \neq h, h+1)$$

und weiter für $h = n$

$$(7)' \qquad \begin{aligned} &\alpha)' \quad g_{nn} = g_{11} \\ &\beta)' \quad (1 - \mathsf{M})\, g_{nn} + \Lambda^{-1} g_{n1} - \Lambda \mathsf{M} g_{1n} = 0 \\ &\gamma)' \quad g_{n\nu} - \Lambda \mathsf{M} g_{1\nu} = 0 \\ &\delta)' \quad g_{\nu 1} - \Lambda \mathsf{M} g_{\nu n} = 0 \end{aligned} \qquad (\nu + 1, n$$

Aus $(7)\,\alpha)\,\alpha)'$ folgt

$$(8) \qquad \underline{g_{11} = g_{22} = \ldots = g_{nn} = g.}$$

Aus $\gamma)$ ergibt sich zunächst für ein festes $\nu = 2, 3, \ldots$ oder n un $h = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ durch schrittweise Zurückführung von $h + 1$ auf $h + 2$ usw

$$g_{h\nu} = \mathsf{M}^{\nu - h - 1} g_{\nu - 1, \nu},$$

wofür wir schreiben können

$$(9) \qquad g_{\nu h} = \mathsf{M}^{h - \nu - 1} g_{h-1, h} \qquad \begin{matrix} (\nu = 1, 2, \ldots, n - 1), \\ (h = \nu + 1, \nu + 2, \ldots, n \end{matrix}$$

Ebenso gibt $\delta)$ durch Zurückschieben von $h + 1$ auf h

$$(10) \qquad g_{\nu h} = \mathsf{M}^{h - \nu - 1} g_{\nu, \nu + 1} \qquad \begin{matrix} (\nu = 1, 2, \ldots, n - 1 \\ (h = \nu + 1, \ldots, n). \end{matrix}$$

Vergleich von (9), (10) liefert

$$g_{12} = g_{23} = \ldots = g_{n-1, n} = a$$

und damit

$$(11) \qquad \underline{g_{\nu h} = \mathsf{M}^{h - \nu - 1} a} \qquad \begin{matrix} (\nu = 1, 2, \ldots, n - 1 \\ (h = \nu + 1, \ldots, n), \end{matrix}$$

wodurch alle Elemente des Dreiecks rechts oberhalb der Hauptdiagonal bestimmt sind.

Andererseits liefert $\gamma)$ durch Zurückführung von $h + 1$ auf h für ei festes $\nu = 1, 2, \ldots$ oder $n - 1$ und $h = \nu + 1, \ldots, n$

$$g_{h\nu} = \mathsf{M}^{-(h - \nu - 1)} g_{\nu + 1, \nu}.$$

Statt dessen schreiben wir

$$(12) \qquad g_{\nu h} = \mathsf{M}^{-(\nu - h - 1)} g_{h, h+1} \qquad \begin{matrix} (\nu = 2, 3, \ldots, n), \\ (h = 1, 2, \ldots, \nu - 1 \end{matrix}$$

und endlich schließt man aus $\delta)$ durch Reduktion von h auf $h + 1$

$$(13) \qquad g_{\nu h} = \mathsf{M}^{-(\nu - h - 1)} g_{\nu, \nu - 1} \qquad \begin{matrix} (\nu = 2, 3, \ldots, n), \\ (h = 1, 2, \ldots, \nu - 1 \end{matrix}$$

also durch Vergleich von (12), (13) auch

$$g_{21} = g_{32} = \ldots = g_{n, n-1} = b$$

und daher ist mit

$$(14) \qquad \underline{g_{\nu h} = \mathsf{M}^{-(\nu - h - 1)} b} \qquad \begin{matrix} (\nu = 2, 3, \ldots, n), \\ (h = 1, 2, \ldots, \nu - 1 \end{matrix}$$

das Dreieck links unterhalb der Hauptdiagonale ausgefüllt. Jetzt erst ziehen wir $\gamma)' \delta)'$ heran, die übereinstimmend liefern $b = \Lambda \mathsf{M}^{n-2} a$, worauf sich schließlich die Gleichungen $\beta)\beta)'$ auf $(1 - \mathsf{M})g + (1 - \Lambda \mathsf{M}^{n-1})a = 0$ reduzieren; damit ist mit

$$(15) \qquad \left| \begin{array}{l} g = c(1 - \Lambda \mathsf{M}^{n-1}), \\ a = -c(1 - \mathsf{M}), \\ b = -c\Lambda \mathsf{M}^{n-2}(1 - \mathsf{M}) \end{array} \right.$$

die Lösung fertig; denn (8), (11), (14), (15) geben endgültig

$$(16) \qquad \begin{array}{ll} g_{\varkappa\varkappa} = c(1 - \Lambda \mathsf{M}^{n-1}), & \\ g_{\varkappa\nu} = -c\,\mathsf{M}^{\nu-\varkappa-1}(1 - \mathsf{M}) & (\nu \geqq \varkappa + 1) \\ g_{\varkappa\nu} = -c\Lambda \mathsf{M}^{n+\nu-\varkappa-1}(1 - \mathsf{M}) & (\nu \leqq \varkappa - 1) \end{array} \quad (c \text{ beliebig}).$$

Daß diese Werte das System (7) erfüllen, wäre leicht zu verifizieren gewesen; wir wissen indes jetzt, daß es die einzigen Lösungen sind.

Zum Abschluß des Beweises von Hilfssatz 1 ist zu zeigen, daß für $c \neq 0$ die Determinante $|G| \neq 0$ wird. Sei etwa $c = 1$. Addiert man der Reihe nach für $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$ zur $\varkappa$-ten Zeile die $\varkappa + 1, \varkappa + 2, \ldots, n$-te, nachdem dies geschehen, daß Λ-fache der ersten Zeile zu den übrigen, so erhält man

$$|G| = (1 - \Lambda) \begin{vmatrix} 1 & , \mathsf{M} & , \mathsf{M}^2 & , \ldots, & \mathsf{M}^{n-1} \\ \Lambda \mathsf{M}^{n-1}, & 1 & , \mathsf{M} & , \ldots, & \mathsf{M}^{n-2} \\ \Lambda \mathsf{M}^{n-2}, & \Lambda \mathsf{M}^{n-1}, & 1 & , \ldots, & \mathsf{M}^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Lambda \mathsf{M} & , \Lambda \mathsf{M}^2 & , \Lambda \mathsf{M}^3, & \ldots, & \Lambda \mathsf{M}^{n-1}, \quad 1 \end{vmatrix},$$

und wenn man jetzt der Reihe nach das M-fache der $\varkappa + 1$-ten Zeile von der $\varkappa$-ten abzieht, so reduziert sich die Determinante auf die Hauptdiagonale, und daraus folgt

$$(17) \qquad |G| = (1 - \Lambda)(1 - \Lambda \mathsf{M}^n)^{n-1},$$

$\neq 0$ nach Vor. (4) S. 717.

Wir leiten aus Hilfssatz 1 jetzt noch eine später zu benutzende Tatsache her.

Hilfssatz 2. Es gibt keine von cE verschiedene Matrix X mit $|X| \neq 0$, so daß $M_h = X M_h X^{-1}$ wäre für *alle* $h = 1, 2, \ldots, n$ (c = Zahlfaktor).

Sei nämlich X irgendeine Matrix der gedachten Eigenschaft. Aus Hilfssatz 1 folgt durch Übergang zu den komplementären Matrizen

$$M_h = \breve{G} \breve{M}_h' \breve{G}^{-1},$$

also auch

$$M_h = X \breve{G} \breve{M}_h' (X \breve{G})^{-1}.$$

Daraus folgt aber, da nach dem gleichen Hilfssatz die Matrizen H mit $M_h = H \breve{M}_h' H^{-1}$ bis auf einen Faktor bestimmt sind, $X = c\,E$, w. z. b. w.

Bemerkung. Man hätte natürlich auch Hilfssatz 2 direkt beweisen können, etwa durch Betrachtung linearer Gleichungssysteme, woraus dann umgekehrt die *Eindeutigkeit* für G des Hilfssatzes 1 folgt. Dann hätte es genügt, die Werte (16) anzugeben und (7) zu verifizieren.

Es ist klar, daß nunmehr das System

$$(u_j) = G(v_{j,\alpha'}^{\beta'})$$

zu $\breve{K}$ gehört; denn man hat

$$(\Theta_h u_j) = G\,M_h'(v_{j,\alpha'}^{\beta'}) = G\,M_h' G^{-1}(u_j) = \breve{M}_h(u_j)$$

nach Hilfssatz 1, und die lineare Unabhängigkeit von u_j folgt aus derjenigen von $v_{j,\alpha'}^{\beta'}$ wegen $|G| \neq 0$. Wir haben also unser erstes Ziel erreicht und formulieren

Satz 1. *Ersetzt man in dem durch bestimmte Integrale dargestellten Lösungssystem*

$$v_{j,\alpha}^{\beta} = \int_{C_j} \tau^{\alpha}(\tau^n - n z \tau + n - 1)^{\beta}\, d\tau$$

der hypozykloidischen Differentialgleichung α bzw. β durch irgendein Wertepaar α', β' mit $\alpha + \alpha', \beta + \beta'$ ganz, so ist das System der Linearkombinationen

$$(u_j) = G(v_{j,\alpha'}^{\beta'})$$

ein linear-unabhängiges System der Klasse $\breve{K}$ (G die Matrix (16)).

Es erscheint nun bemerkenswert, daß man genau diese Kombination der $v_{j,\alpha'}^{\beta'}$ auch erhält, indem man beim Übergang von k zu $\bar{k}$ gleichzeitig *die Wege C_j durch passende Wege $\breve{C}_j$ ersetzt.* Es gilt nämlich

Satz 2. *Es sei mit $\breve{C}_h$ der Integrationsweg bezeichnet*

$$(t_{h+1}^{-} t_{h+2}^{-} \dots t_n^{-} 0^{-} t_1^{-} \dots t_{h-1}^{-})\, t_h^{-}\, (t_{h-1}^{+} \dots t_1^{+} 0^{+} t_n^{+} \dots t_{h+1}^{+})\, t_h^{+} \quad (h = 1, 2, \dots, n-1)$$

entsprechend

$$\breve{C}_n = (0^{-} t_1^{-} \dots t_{n-1}^{-})\, t_n^{-}\, (0^{+} t_1^{+} \dots t_{n-1}^{+})\, t_n^{+}.$$

Dann ist das System u_h des Satzes 1 *bis auf einen von z unabhängigen Faktor identisch mit*

$$\int_{\breve{C}_h} \tau^{\alpha'} f^{\beta'}(\tau, z)\, d\tau \qquad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Zum Beweis greifen wir auf eine S. 716, (2) eingeführte Bezeichnung zurück und setzen entsprechend

$$J_j'^{\pm} = \int_{(\tau_0 t_j^{\pm} \tau_0)} \tau^{\alpha'} f^{\beta'}\, d\tau; \qquad J_0'^{\pm} = \int_{(\tau_0 0^{\pm} \tau_0)} \tau^{\alpha'} f^{\beta'}\, d\tau.$$

Alle Funktionen von $\breve{k}$ gehen bei analytischer Fortsetzung längs $\breve{C}_h$ in sich über, und die Integrale von Satz 2 sind offenbar wieder von τ_0 unabhängig (was übrigens zum Beweis, in dem τ_0 fest bleibt, nicht gebraucht wird, und sich hinterher aus der Relation des Satzes entnehmen läßt!). — Wegen der Werte (16) und mit Rücksicht auf (2), (3), (4)′ S. 716, 718 wird nach Satz 1

$$(18)\quad u_h = c(1-\Lambda^{-1})\{-\Lambda \mathsf{M}^{n-h-1}(1-\mathsf{M})J_0'^{+} - \Lambda(1-\mathsf{M})\sum_{j=1}^{h-1}\mathsf{M}^{n-h-1+j}J_j'^{+} + (1-\Lambda\mathsf{M}^{n-1})J_h'^{+} - (1-\mathsf{M})\sum_{j=h+1}^{n}\mathsf{M}^{j-h-1}J_j'^{+}\}$$

Anderseits erkennt man aber, wenn man den Weg $\breve{C}_h$ schrittweise verfolgt, daß

$$(19)\quad \int_{\breve{C}_h} dv_{\alpha'}^{\beta'} = \sum_{j=h+1}^{n}\mathsf{M}^{j-h-1}J_j' + \mathsf{M}^{n-h}J_0'^{-} + \Lambda\sum_{j=1}^{h-1}\mathsf{M}^{n-h-1+j}J_j' + \Lambda\mathsf{M}^{n-1}J_h' + \Lambda\sum_{j=1}^{h-1}\mathsf{M}^{n-j+1}J_{h-j}'^{+} + \Lambda\mathsf{M}^{n-h+1}J_0'^{+} + \sum_{j=n+1}^{n}\mathsf{M}^{n-j+2}J_{n+h-j+1}'^{+} + \mathsf{M}J_h'^{+}$$

Beachtet man noch, daß

$$J_j'^{-} = -\mathsf{M}J_j'^{+}; \qquad J_0'^{-} = -\Lambda J_0'^{+},$$

so sieht man durch Zusammenfassung in (19) und Vergleich mit (18), daß in der Tat

$$\int_{\breve{C}_h} dv_{\alpha'}^{\beta'} = \frac{\mathsf{M}}{1-\Lambda^{-1}}\frac{u_h}{c},$$

wie behauptet. Wir sehen uns dadurch veranlaßt, die Konstante c in (16) gleich $\frac{-\Lambda\mathsf{M}}{1-\Lambda}$ zu nehmen, so daß

$$u_h = \int_{\breve{C}_h} dv_{\alpha'}^{\beta'}$$

und die Determinante (17)

$$(20)\quad |G| = (-1)^n \Lambda^n \mathsf{M}^n \left(\frac{1-\Lambda\mathsf{M}^n}{1-\Lambda}\right)^{n-1}$$

wird.

Bemerkung. Der Umlauf

$$(t_{h+1}^{-}\dots t_n^{-}\,0^{-}\,t_1^{-}\dots t_{h-1}^{-}t_h^{-}) = (\infty^{+})_h$$

bzw.

$$(0^{-}t_1^{-}\dots t_n^{-}) = (\infty^{+})_n$$

kann wegen der S. 716 geschilderten Lage der t_j in der τ-Ebene als positiver Umlauf um ∞ gedeutet werden, nur daß bei $h \neq n$, im Gegensatz zu der Festsetzung [8]), S. 80 (der der Weg $(\infty^{+})_n$ genügt), der Schnitt

$t_{h+1}\,\infty$ zuerst überschritten wird. Mit dieser Bezeichnung kann man dann auch schreiben

$$\bar{C}_h = (\infty_h^+\, t_h^-\, \infty_h^-\, t_h^+)$$

als Gegenstück zu

$$C_h = (t_h^+\, 0^+\, t_h^-\, 0^-).$$

§ 2.

Die Beziehung zum adjungierten Differentialsystem.

Es werde jetzt geschrieben

$$(u_{jk}) = G\,(v^{\beta'}_{j,\alpha'+k-1}) = U = G\,V'$$

und mit $\breve{V} = (v^{\beta}_{j,\alpha+k-1})^{\breve{}}$ die zu V komplementäre Matrix bezeichnet. Als dann bilden die Spalten von $\breve{V}$ eine Basis von $\breve{K}$, ebenso aber auch nach Satz 1 und [8]), Abschn. II, Satz 11 die n Spalten von U. Es gibt daher eine Matrix Q rationaler Funktionen von z mit $|Q| \neq 0$ und der Eigenschaft, daß

$$UQ = \breve{V}. \tag{21}$$

Wir wollen zeigen, daß man für passende Wahl von α', β' eine *konstante* Matrix Q erhält, und diese bestimmen. Für jede andere Wahl von α', β' ergibt sich das zugehörige Q dann leicht vermöge [8]), Satz 1, 3 und der Differenzengleichung (ebendort S. 79 (1)), die wir, da sie gleich gebraucht wird, hierher setzen:

$$(\alpha+1+n(\beta+1))\,v_{\alpha+n} - n(\alpha+1+\beta+1)\,z\,v_{\alpha+1} + (n-1)(\alpha+1)\,v_\alpha = 0 \tag{22}$$

Um Q zu bestimmen, leiten wir zunächst ein *Differentialsystem* für die $v_{\alpha+k-1}$ her (in [8]) war mit Differentialgleichungen n-ter Ordnung gearbeitet). Alsdann geht die Betrachtung zunächst ähnlich weiter, wie bei Herrn Schlesinger [2]) in dem in dieser Hinsicht allerdings einfacheren Fall der hypergeometrischen Differentialsysteme.

Nach [8]), Satz 5 und Formel (19), (14) (S. 76 a. a. O.) gilt

$$(n-1)(z^n-1)\frac{dv^\beta_{\alpha+n-1}}{dz} = -(n-1)(\alpha+1)\,v^\beta_\alpha + \sum_{\nu=1}^{n-1}(\alpha+1+\nu+n\beta)\,z^\nu\,v^\beta_{\alpha+\nu}$$

Ersetzt man hier α durch $\alpha-1$ und drückt dann das erste Glied rechts vermöge (22) in der Form

$$-(n-1)\,\alpha\,v^\beta_{\alpha-1} = -n(\alpha+\beta+1)\,z\,v^\beta_\alpha + (\alpha+n(\beta+1))\,v^\beta_{\alpha+n-1}$$

durch solche mit höherem Index aus, so ergibt sich durch Zusammenfassen

$$\begin{aligned}(n-1)(z^n-1)\frac{d}{dz}v^\beta_{\alpha+n-2}\\ = -(n-1)(\alpha+1)\,z\,v^\beta_\alpha + \sum_{\nu=1}^{n-2}(\alpha+1+\nu+n\beta)\,z^{\nu+1}\,v^\beta_{\alpha+\nu}\\ +(\alpha+n+n\beta)\,v^\beta_{\alpha+n-1}.\end{aligned}$$

Setzt man das Verfahren fort, so gelangt man leicht zu

$$(23)\qquad (n-1)(z^n-1)\frac{d}{dz}v_{\alpha+k-1}^{\beta}$$

$$= -(n-1)(\alpha+1)z^{n-k}v_{\alpha}^{\beta}+\sum_{\nu=1}^{k-1}(\alpha+1+\nu+n\beta)z^{n-k+\nu}v_{\alpha+\nu}^{\beta}$$

$$+\sum_{\nu=k}^{n-1}(\alpha+1+\nu+n\beta)z^{\nu-k}v_{\alpha+\nu}^{\beta}\qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

womit das in Aussicht genommene Differentialsystem gefunden ist. Für die Integralmatrix V geschrieben, lautet es

$$(23)\qquad (n-1)(z^n-1)\frac{dV}{dz}=VA.$$

Dabei ist

$$A=DZ,$$

wenn man setzt

$$Z=\begin{pmatrix} z^{n-1} & z^{n-2} & \ldots & z & 1\\ 1 & z^{n-1} & \ldots & z^2 & z\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ z^{n-2} & z^{n-3} & \ldots & 1 & z^{n-1}\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix} -(n-1)(\alpha+1) & & & 0\\ & \alpha+2+n\beta & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha+n+n\beta\end{pmatrix}.$$

Geht man vermöge

$$W=VR\qquad (R \text{ rational}, |R|\neq 0)$$

zu einer anderen Klassenbasis über, so wird aus (23) das Differentialsystem der gleichen Art

$$(24)\qquad (n-1)(z^n-1)\frac{dW}{dz}=WB,$$

worin

$$B=R^{-1}AR+(n-1)(z^n-1)R^{-1}\frac{dR}{dz}$$

wird. Wir wollen erreichen, daß

$$(25)\qquad \underline{B=-\bar{A}'},$$

wo A' durch Ersetzung von α,β durch α',β' aus A hervorgehen möge. Ist R auf *irgendeine Weise* diesen Forderungen gemäß gefunden, so ist nämlich das Differentialsystem

$$(26)\qquad (n-1)(z^n-1)\frac{dV}{dz}=VA'$$

das adjungierte zu (24). (26) hat also $\bar{W}$ zur Integralmatrix. Andererseits geht aber (26) aus (23) durch Ersetzung der α,β durch α',β' hervor,

wird also nach der Definition von u_{jk} durch U erfüllt. U und $\breve{W}$ haben nach Satz 1 genau die *gleiche* Gruppe (nicht etwa nur ähnliche, wie das schon daraus folgte, daß U und $\breve{W}$ das nämliche Differentialsystem erfüllen). Nach Hilfssatz 2 ist daher U bis auf einen Zahlenfaktor mit $\breve{W}$ identisch. Man hat

$$\breve{W} = \breve{V}\breve{R} = cU; \qquad \breve{V} = Uc\bar{R}, \tag{27}$$

womit dann die Matrix Q der Gleichung (21) zu $Q = c\bar{R}$ bestimmt ist. Wir ermitteln jetzt ein R, so daß (25) gilt, und hinterher auch noch die Konstante c.

Um nun einzusehen, daß es für passende Wahl von α', β' sogar ein *konstantes* R gibt, diene die folgende *Vorbetrachtung.* Bekanntlich ist, wenn Y, H irgendzwei Matrizen bedeuten, bei komplementärer Transformation

$$Y_1 = CY; \qquad H_1 = \breve{C}H \tag{28}$$

$\bar{H}Y = \bar{H}_1 Y_1$ eine Invariante. Sind insbesondere die Spalten von Y rational unabhängige Funktionssysteme einer Riemannschen Klasse K, die von H ebensolche aus $\breve{K}$, so ist $\bar{H}Y$ eine rationale Matrix, wie sich ohne weiteres ergibt, wenn man C die Monodromiegruppe durchlaufen läßt. $\bar{H}Y$ ändert sich aber auch nicht, wenn man mittels (28) Y so normiert, daß alle Zeilen von Y an einer bestimmten Stelle (im Endlichen oder Unendlichen) rein multiplikativ sind, — falls dies möglich ist. Durch die Gleichung (28) wird dann von selbst H entsprechend normiert und wir können daher von den kanonischen Formen Y_1, H_1 auf HY schließen. — Jetzt seien

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n \quad \text{bzw.} \quad r_1', r_2', r_3', \ldots, r_n'$$

die Wurzeln der determinierenden Gleichungen an der betreffenden Stelle für die Differentialsysteme mit den Integralmatrizen Y, H. Bei passender Anordnung sind alle Summen $r_\nu + r_\nu'$ ganze Zahlen. Das folgt sofort aus $H = \breve{Y}S$ (S rational), weil für $\breve{Y}$ die $r_\nu' = -r_\nu$ sind, und die Elemente der rationalen Matrix $\bar{H}Y$ haben mindestens die Ordnungszahl

$$\varrho = \operatorname*{Min}_{\nu=1\ldots n}(r_\nu + r_\nu').$$

Nunmehr sei $Y = V$, $H = U$ angenommen, wo U, V die zu Beginn von § 1 bzw. § 2 erklärten Integralmatrizen sind. Für die Stelle ε_h sind die Exponenten nach (23)

$$0, 0, \ldots, \beta + \tfrac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad 0, 0, \ldots, \beta' + \tfrac{1}{2}.$$

Wir nehmen zunächst an, es sei $\beta + \frac{1}{2}$ *keine ganze Zahl.* Dann treten nach [8]), Satz 9, S. 87 keine Logarithmen auf, und bei der geschilderten komplementären Normierung sind notwendig $\beta + \frac{1}{2}$ und $\beta' + \frac{1}{2}$ einander

zugeordnet. Setzt man daher, wie das von jetzt an vorausgesetzt wird,

$$(29)_1 \qquad \underline{\beta' = -\beta - 1,}$$

so sind die Elemente der rationalen Matrix $\overline{U}\,V$, da sie im Endlichen höchstens an den ε_h Pole haben können, dort aber mindestens die Ordnungszahl Null besitzen, Polynome.

Ferner ergibt sich aus dem Differentialsystem (23), daß die Exponenten im Unendlichen sind

$$\begin{aligned} r_1 &= \alpha + 1; \quad r_\nu = -\frac{\alpha + \nu + n\beta}{n-1}, \\ r_1' &= \alpha' + 1; \quad r_\nu' = -\frac{\alpha' + \nu + n\beta'}{n-1}, \end{aligned} \qquad (\nu \neq 1).$$

Wir wollen nun wählen

$$(29)_2 \qquad \underline{\alpha' = -\alpha - 2.}$$

Ist $n(\alpha+\beta)$ *nicht ganz*, so kann dann niemals für $\nu = 2, \ldots, n$ $r_1 + r_\nu'$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\frac{n(\alpha+\beta)+\nu}{n-1}$ ganzzahlig sein. Es ist dann auch keine der Differenzen $r_\nu - r_\varkappa$ $(\nu > \varkappa)$ ganz, so daß wir wieder rein multiplikative kanonische Integrale bekommen. Es sind sich im obigen Sinn r_1 und r_1' zugeordnet, und es ist für $2 \leqq \mu,\ \nu \leqq n$

$$r_\nu + r_\mu' = \frac{n+2-(\mu+\nu)}{n-1}$$

also wegen $4 \leqq \mu + \nu \leqq 2n$

$$-(n-2) \leqq (n-1)(r_\nu + r_\mu') \leqq (n-2),$$

d. h. $r_\nu + r_\mu'$ ist dann und nur dann ganz, wenn

$$r_\nu + r_\mu' = 0, \quad \nu + \mu = n + 2.$$

Es sind sich also r_ν und $r_{n+2-\nu}'$ zugeordnet, $\varrho = 0$ und die Matrix $\overline{U}\,V$ ist konstant. Dies bleibt auch noch für die eben beiseite gelassenen Fälle richtig

$$(30) \qquad \beta + \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad n(\alpha+\beta) \text{ ganz.}$$

Denn die Elemente von U, V und damit die von $\overline{U}\,V$ sind, wie aus den Integralen ersichtlich, ganze Funktionen von α, β für jedes $z_0 \neq \varepsilon_h$. Zerlegt man daher ein Element $q(z)$ von $\overline{U}\,V$ in Partialbrüche, so sind auch die Zähler, wie man leicht durch Einsetzen von Spezialwerten z_0 prüft, ganze Funktionen von α, β; es kann also keiner für alle α, β, die *nicht* (30) erfüllen, verschwinden, ohne daß er es identisch tut, also auch wenn (30) gilt. Wir haben damit als Zwischenergebnis

Hilfssatz 3. Sind $U = (u_{j,k})$, $V = (v_{j,\alpha+k-1}^{\beta})$ mit den Werten (29) gebildet, so sind die Elemente der rationalen Matrix $\overline{U}\,V$ von z unabhängig und damit sind es die Elemente der Matrix R, die nach (21), (27) den Übergang von U zu V liefert.

Jetzt ist die *Berechnung eines passenden* R leicht. Das System (24) wird einfach

$$(n-1)(z^n-1)\frac{dW}{dz} = WR^{-1}AR$$

und man hat nur R so zu bestimmen, daß (nach (25))

$$(25') \qquad AR = -R\bar{A}' \quad \text{und} \quad |R| \neq 0.$$

Wir haben dabei gesetzt

$$A' = D'Z$$

$$D' = (d'_{\varkappa\nu}) \quad \begin{array}{l} d'_{\varkappa\nu} = 0 \text{ für } \varkappa \neq \nu, \\ d'_{11} = -(n-1)(\alpha'+1) = (n-1)(\alpha+1), \\ d'_{\nu\nu} = \alpha' + \nu + n\beta' = -(\alpha + n - \nu + 2 + n\beta) \\ \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n). \end{array}$$

Man sieht also, daß

$$D' = -TDT,$$

wenn

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ \ldots & & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & 0 \end{pmatrix} = \bar{T} = T^{-1}.$$

Es ist ferner

$$\bar{Z} = TZT$$

und daher wird die Forderung (25'):

$$DZR = -R\bar{Z}D' = RTZT \cdot TDT = RTZDT$$

und wird erfüllt mit

$$\underline{R = DT.}$$

Zusammen mit (27) und Satz 1 sowie der Festsetzung bei (20) ergibt sich endgültig

Satz 3. *Zwischen den zu den Exponenten* $\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \alpha', \beta'\end{matrix}$ *gehörigen Integralmatrizen* V, V' *besteht mit einer noch zu bestimmenden, von* z *unabhängigen Größe* $c = c_{\alpha\beta}$ *die Beziehung*

$$(31) \qquad \breve{V} = c_{\alpha\beta} G V' \bar{R}.$$

Dabei sind

$$G = (g_{\varkappa\nu}), \quad \text{wo} \quad \begin{cases} g_{\varkappa\varkappa} = \dfrac{-\Lambda \mathsf{M}(1-\Lambda \mathsf{M}^{n-1})}{1-\Lambda}, \\ g_{\varkappa\nu} = \dfrac{\Lambda(1-\mathsf{M})\mathsf{M}^{\nu-\varkappa}}{1-\Lambda} & (\nu \geqq \varkappa+1), \\ g_{\varkappa\nu} = \dfrac{\Lambda^2(1-\mathsf{M})\mathsf{M}^{n+\nu-\varkappa}}{1-\Lambda} & (\nu \leqq \varkappa-1) \end{cases}$$

und

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} -(n-1)(\alpha+1) & & & 0 \\ & & 0 & \dots \alpha+n+n\beta \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & \alpha+2+n\beta & \dots 0 \end{pmatrix}$$

unabhängig von z.

Wir wollen noch die genaue *Bestimmung von c* durchführen. Aus der Jacobischen Formel für die Determinante einer Integralmatrix folgt nach (23)

$$(32) \qquad |V| = \varphi(\alpha,\beta)\, e^{n\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\int \frac{-z^{n-1}}{z^n-1}dz} = \varphi(\alpha,\beta)\,(1-z^n)^{\beta+\frac{1}{2}}.$$

Wegen $|V|\,|\check{V}| = 1$ ergibt (31) nach Multiplikation mit V und Übergang zu den Determinanten mit Rücksicht auf (20)

$$(33) \qquad 1 = c^n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Lambda^n \mathsf{M}^n \cdot \left(\frac{1-\Lambda \mathsf{M}^n}{1-\Lambda}\right)^{n-1}$$

$$\times \varphi(\alpha,\beta)\,\varphi(-\alpha-2,-\beta-1)\,(n-1)\,(\alpha+1)\prod_{\nu=1}^{n-1}(\alpha+\nu+1+n\beta).$$

Wir haben also $\varphi(\alpha,\beta)$ zu bestimmen. Hierzu benutzen wir die der Jacobischen Formel analoge Heymannsche[11]) für die Differenzengleichungen, mit deren Hilfe sich aus (22) (mit Benutzung der Tatsache, daß wegen $|V| \neq 0$ die Spalten von V als Funktionen von α ein Fundamentalsystem von (22) bilden) ergibt

$$(34) \qquad |V| = \frac{e^{\pi i n\alpha}(n-1)^{\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)\,\Omega(\alpha,\beta;z)}{\Gamma(\alpha+1+n(\beta+1))}.$$

Ω hat in α die Periode 1 und wegen (32) muß sein

$$(35) \qquad \Omega(\alpha,\beta;z) = (1-z^n)^{\beta+\frac{1}{2}}\,\omega(\alpha,\beta).$$

Hier ist ω ebenfalls mit 1 periodisch, ändert sich also nicht, wenn wir in $\alpha = \lambda + l$ die ganze Zahl $l \to +\infty$ rücken lassen, wie das jetzt geschehen soll. Dabei verbleibt α in der rechten Halbebene. Es gilt also nach der Stirlingschen Formel

$$\Gamma(\alpha+1) \text{ asymptotisch gleich } \alpha^{\alpha+\frac{1}{2}} e^{-\alpha}\sqrt{2\pi},$$

ebenso

$$\Gamma(\alpha+1+n(\beta+1)) \simeq \sqrt{2\pi}\cdot(\alpha+n(\beta+1))^{\alpha+n(\beta+1)+\frac{1}{2}}\, e^{-\alpha-n(\beta+1)}$$

$$\simeq \sqrt{2\pi}\cdot\alpha^{\alpha+n(\beta+1)+\frac{1}{2}}\, e^{-\alpha},$$

da ja $\left(1+\frac{n(\beta+1)}{\alpha}\right)^{\alpha+n(\beta+1)+\frac{1}{2}} \to e^{n(\beta+1)}$ für $l \to \infty$.

---

[11]) S. etwa Guldberg-Wallenberg, Differenzengleichungen, Leipzig 1911, S. 46.

Wir haben also nach (34)

$$|V| \simeq e^{\pi i n \alpha} (n-1)^{\alpha} e^{-n(\beta+1)} (1-z^n)^{\beta+\frac{1}{2}} \omega(\alpha, \beta) \tag{36}$$

$$\text{für } \alpha = \lambda + l;\ l \to +\infty.$$

Nun ist aber anderseits nach (2), (3) und [8]), Abschnitt III, Gleichung (1), (4), S. 99

$$v^{\beta}_{j,\alpha} \simeq (1-\Lambda)(1-\mathsf{M})\, e^{-\pi i \beta}\, \Gamma(\beta+1)\, l^{-(\beta+1)}\, t_j^{\alpha+\beta+1} \Big(\prod_{h}^{h \neq j} (t_j - t_h) \Big)^{\beta},$$

wofern wir z auf einen Teilbereich $\mathfrak{B}$ von $\overline{\mathfrak{E}}$ beschränken, in dem $\prod_{j,h} (|t_j| - |t_h|) \neq 0$. Wir bilden jetzt die Determinante und beachten dabei, daß $\prod_{j,h} (t_j - t_h)^2 = \prod_{j=1}^{n} f'_{\tau}(t_j, z)$ — bis aufs Vorzeichen die Diskriminante von $f(\tau, z)$ — den Wert hat $\gamma(1-z^n)$; die Konstante γ erweist sich, etwa durch Einsetzen von $z = 0$, als $n^n (n-1)^{n-1}$. Legt man sich ferner bei der Erklärung der auftretenden Potenzen

$$a^r = e^{r \lg |a|} \cdot e^{ir \arg a} \qquad (\lg |a| \text{ reell})$$

für $a = t_j$ auf die § 1, S. 716 angegebene Arcusbestimmung

$$(n-j)\frac{2\pi}{n} < \arg t_j < (n-j+1)\frac{2\pi}{n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

fest, so folgt

$$\prod_{j=1}^{n} t_j^{\alpha+\beta+1} = \Big(\prod_{j=1}^{n} t_j \Big)^{\alpha+\beta+1} \qquad \text{mit} \quad \arg t_1 t_2 \ldots t_n = n\pi.$$

Denn aus $f(t_j, z) = 0$ folgt offenbar $\arg t_1 t_2 \ldots t_n = m\pi$, wo die ganze Zahl m (für *jede* von z stetig abhängende Arcusbestimmung) von z unabhängig ist (und $m + n$ gerade ist). $m = n$ für *unsere* Arcusbestimmung ergibt sich dann z. B. durch Einsetzen von $z = 0$.

Nunmehr liefert einfache Umrechnung

$$|V| \simeq (-1)^n (1-\Lambda)^n (1-\mathsf{M})^n \Gamma^n(\beta+1)\, l^{-n(\beta+1)} (n-1)^{\alpha+\beta+1} e^{\pi i n \alpha} \times (n^n (n-1)^{n-1} (1-z^n))^{\beta+\frac{1}{2}} \tag{37}$$

und es geben (36), (37) durch Vergleich

$$\omega(\alpha, \beta) \simeq (-1)^n (1-\Lambda)^n (1-\mathsf{M})^n (n-1)^{\beta+1} \Gamma^n(\beta+1) (n^n (n-1)^{n-1})^{\beta+\frac{1}{2}}.$$

Nun sind aber hier beide Seiten von l unabhängig, nämlich in α periodisch mit der Periode 1. Ihr Quotient, der für $l \to +\infty$ gegen 1 strebt, ist daher dauernd $= 1$ und man hat damit, indem man den Wert von ω in (35) einträgt, nach (34), (32)

$$\varphi(\alpha, \beta) = (-1)^n (1-\Lambda)^n (1-\mathsf{M})^n e^{\pi i n \alpha} (n-1)^{\alpha+n\beta+\frac{n+1}{2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)\, \Gamma^n(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1+n(\beta+1))} \tag{38}$$

und daher

$$\varphi(\alpha,\beta)\cdot\varphi(-\alpha-2,-\beta-1)$$
$$=\frac{(1-\Lambda)^{2n}(1-\mathsf{M})^{2n}}{(n-1)\,\Lambda^n\mathsf{M}^n}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(-\alpha-1)\,\Gamma^n(\beta+1)\,\Gamma^n(-\beta)}{\Gamma(\alpha+1+n(\beta+1))\,\Gamma(-\alpha-1+n\beta)}.$$

Die Γ-Produkte lassen sich zu

$$\frac{(-1)^n\pi^n\sin(\alpha+n\beta)\pi}{(\alpha+1)\prod_{\nu=1}^{n-1}(\alpha+\nu+1+n\beta)\sin\alpha\sin^n\beta\pi}$$

umformen, so daß nach (33) schließlich geschrieben werden kann

$$c=\frac{\varepsilon}{2\pi i(1-\Lambda)(1-\mathsf{M})(1-\Lambda\mathsf{M}^n)}, \tag{39}$$

ε eine n-te Wurzel aus $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Es soll zum Schluß noch gezeigt werden, wie sich für den einfachsten *Fall* $n=2$; $\beta=-\frac{1}{2}$ der Legendreschen Funktionen die eingangs erwähnte (leicht unmittelbar zu gewinnende) Schläflische Relation ergibt, auf deren eigentlichen Sinn durch das Vorhergehende vielleicht etwas Licht fällt.

Das Differentialsystem (23) wird hier

$$(z^2-1)\frac{dv_\alpha}{dz}=(\alpha+1)(-z\,v_\alpha+v_{\alpha+1}),$$
$$(z^2-1)\frac{dv_{\alpha+1}}{dz}=(\alpha+1)(-v_\alpha+z\,v_{\alpha+1}).$$

Man pflegt den von 0 ausgehenden Schnitt in der τ-Ebene von $-\infty$ nach 0 längs der reellen Achse zu führen, hat also, abweichend von den Festsetzungen S. 716, etwa zu nehmen

$$-\pi<\arc t_2<0;\quad 0<\arc t_1<\pi;\quad \varepsilon_1=1;\quad \varepsilon_2=-1.$$

Dadurch erscheint, wie leicht erkennbar, in (37) und (38) der Faktor $+1$ anstatt $e^{\pi i n\alpha}$ und (31), (32), (38), (39) geben[12]):

$$\begin{pmatrix} v_{2,\alpha+1} & -v_{2\alpha}\\ -v_{1,\alpha+1} & v_{1\alpha}\end{pmatrix} \tag{40}$$
$$=\frac{4\pi(1-\Lambda)^2}{\alpha+1}\cdot\frac{-1}{4\pi(1-\Lambda)^2}\cdot\frac{\Lambda}{1-\Lambda}(\alpha+1)\begin{pmatrix}1+\Lambda & -2\\ -2\Lambda & 1+\Lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-v_{1,-\alpha-2} & v_{1,-\alpha-1}\\ -v_{2,-\alpha-2} & v_{2,-\alpha-1}\end{pmatrix}.$$

(40) für die zweite Spalte ausgewertet, liefert

$$\begin{pmatrix}-v_{2\alpha}\\ v_{1\alpha}\end{pmatrix}=\frac{-\Lambda}{1-\Lambda}\begin{pmatrix}1+\Lambda & -2\\ -2\Lambda & 1+\Lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{1,-\alpha-1}\\ v_{2,-\alpha-1}\end{pmatrix}$$

[12]) Daß das gewählte Vorzeichen wirklich den üblichen Festsetzungen gemäß richtig ist, verifizieren wir nur am Endresultat.

oder also

$$(41)\qquad \begin{aligned}(1-\Lambda)\,v_{1\alpha} &= \Lambda\,(2\Lambda\,v_{1,-\alpha-1} - (1+\Lambda)\,v_{2,-\alpha-1}),\\ (1-\Lambda)\,v_{2\alpha} &= \Lambda\,((1+\Lambda)\,v_{1,-\alpha-1} - 2\,v_{2,-\alpha-1}).\end{aligned}$$

Daß aber (41) mit den beiden Beziehungen[13])

$$P_\alpha = P_{-\alpha-1};\qquad Q_\alpha - \pi\operatorname{ctg}\pi\alpha\,P_\alpha = Q_{-\alpha-1}$$

gleichwertig ist, sieht man nun leicht, wenn man bedenkt, daß sich die klassischen Funktionen erster und zweiter Art durch unsere Doppelschleifenintegrale folgendermaßen ausdrücken[14]):

$$P_\alpha = \frac{1}{2\pi i\,(1-\Lambda)}(v_{1\alpha} - v_{2\alpha}),$$

$$Q_\alpha = \frac{1}{2\,(1-\Lambda)}\,v_{1\alpha}.$$

---

[13]) Siehe [4]) S. 18, (I) oder Enz. d. M. W., IIA 10, Wangerin, S. 726.

[14]) Hierzu kann [8]) Anhang verglichen werden.

(Eingegangen am 1. Mai 1930.)

Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Ich möchte in der Entwicklung der Kegelschnittstheorie zwei aufeinander folgende Perioden unterscheiden. In der ersten Periode liegt der Kegelschnitt selbst der Untersuchung vor, und die abgeleiteten Ergebnisse sind auf ihn bezogen. In der zweiten Periode dagegen ist statt des Kegelschnittes sein polares Feld gegeben, und die für dieses abgeleiteten Ergebnisse werden zunächst auf ihr Verhältnis zur Korrelation des polaren Feldes geprüft und dann erst auf ihr Verhältnis zum Kegelschnitte als dessen (reeller oder imaginärer) Inzidenzkurve. Die Kegelschnittstheorie wird damit zu dem wohlgefügten Bau, dem alle in ihrem Bereiche gewonnenen Ergebnisse sich ungezwungen einordnen. Ein klassisches Beispiel für diese Entwicklung bilden die in beiden Perioden bewiesenen Sätze aus der Fokaltheorie der Kegelschnitte. Analog gestaltet sich später die Theorie der Flächen zweiten Grades.

In der Strahlengeometrie ist von einer ähnlichen Wandlung bisher nichts zu spüren. Obgleich in der Theorie der linearen Strahlenkongruenz die Entdeckung der Fokaltheorie eine solche zu verheißen schien, mißlangen zunächst alle Versuche. Es gelang zwar 1908 in meiner Abhandlung „Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz“ die Hauptsätze aus der Fokaltheorie projektiv zu erweitern. Aber an eine die gewonnenen Ergebnisse und die Fokaltheorie umfassende geometrische Verwandtschaft war damals nicht zu denken. In meinen späteren Arbeiten macht sich immer bewußter der Gedanke geltend, als Grundelemente der linearen Strahlenkongruenz ihre Regelscharen zweiter Ordnung aufzufassen. Hiervon ausgehend, fand ich vor fünf Jahren die im Abschnitte A der vorliegenden Arbeit behandelte fundamentale Korrelation in der von den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung gebildeten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit.

Auf der Theorie des durch diese polare Korrelation bestimmten polaren F^2-Gebüsches fußt die Theorie des ebenso wichtigen zu ihm projektiven und zugleich perspektiven polaren Γ-Gebüsches einer linearen Strahlenkongruenz, d. h. die Theorie des im Abschnitte **B** behandelten polaren Gebüsches linearer Strahlenkomplexe. Beide Gebüsche bedingen einander. Sie führen vor allem zu den realen Darstellungen der ∞^4 Paare konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlen und der ∞^4 Paare konjugiert imaginärer durch die lineare Kongruenz einander zugeordneten Geraden.

Nach meiner festen Überzeugung werden von nun an die polaren Korrelationen des polaren F^2-Gebüsches und des polaren Γ-Gebüsches einer linearen Strahlenkongruenz die Theorie dieses Gebildes ebenso beherrschen wie die Korrelation des polaren ebenen Feldes die Theorie der Kegelschnitte und die Korrelation des polaren Raumes die der Flächen zweiten Grades.

Die Abschnitte **A** und **B** sind der hyperbolischen und elliptischen, der Abschnitt **C** der parabolischen linearen Strahlenkongruenz gewidmet. Das polare F^2-Gebüsch ebenso wie das polare Γ-Gebüsch der parabolischen linearen Strahlenkongruenz sind ausgeartet, führen aber zu sehr bemerkenswerten Eigenschaften dieser polaren Gebilde. Auf die metrisch bedingten linearen Strahlenkongruenzen wird bei der Fülle des Stoffes nicht eingegangen.

Bei meinem hohen Alter ist es fraglich, ob ich, anschließend an die projektive Theorie des polaren F^2-Gebüsches und des polaren Γ-Gebüsches einer linearen Strahlenkongruenz, auch zu einer abgerundeten Darstellung meiner Resultate aus der Metrik dieser polaren Gebiete komme. Die Metrik beider polaren Gebilde umfaßt neue Gebiete, wie die Theorie des Durchmesser-F^2-Büschels einer linearen Strahlenkongruenz und die Einteilung der linearen Strahlenkongruenzen nach diesen F^2-Büscheln. Die Metrik beider polaren Gebüsche gestattet ferner, die metrisch bedingten einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung und die von den einscharig in dieser Kongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung gebildeten F^2-Büschel verhältnismäßig einfach zu bestimmen. Endlich gelingt es mit ihrer Hilfe, die bisher völlig isoliert dastehende Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenz organisch in das polare F^2-Gebüsch einzuordnen. Bei den zugehörigen Darlegungen fällt vielfach neues Licht auf schon Bekanntes. So erweist sich der von R. Sturm gefundene und dann von anderen genauer durchforschte Hauptachsenkomplex der Komplexe eines Γ-Gebüsches als Ort der Hauptachsen aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung. Dieser Hauptachsenkomplex wird hierdurch nicht nur der Anschauung leichter zugänglich, sondern kann nunmehr auch auf neuen Wegen untersucht werden.

A. Das polare F^2-Gebüsch der linearen Strahlenkongruenz.

1. Im Gebüsche der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung sind für jede (reelle oder imaginäre [1]) Fläche zweiter Ordnung P^2 die Flächen je eines Bündels $\pi(F^2)$ von Flächen zweiter Ordnung autopolar [2]). Von diesen Bündeln gehen diejenigen durch eine herausgegriffene einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung P^2, deren bestimmende Flächen in dem P^2 zugehörigen Bündel $\pi(F^2)$ liegen. Wird demnach jeder einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P^2 der Bündel $\pi(F^2)$ aller für sie autopolaren einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung zugeordnet, so sind die Flächen P^2 auf die Bündel $\pi(F^2)$ polar korrelativ bezogen und bilden das „polare F^2-Gebüsch" $\Pi(F^2)$ der linearen Strahlenkongruenz C_1^1.

Während der polare Punktraum sich auf den Punkt als Grundelement aufbaut, baut sich das polare F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$ auf die einscharig in C_1^1 enthaltene (reelle oder imaginäre) Fläche zweiter Ordnung als Grundelement auf. Im polaren Punktraume entspricht einem Punkte P ein Punktbündel (ebenes Punktfeld) π, im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ analog der Fläche zweiter Ordnung P^2 der F^2-Bündel $\pi(F^2)$. Die Fläche P^2 heiße die „Polfläche" des Bündels $\pi(F^2)$ und dieser der „Polar-F^2-Bündel" von P^2 in $\Pi(F^2)$.

Die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 enthält einscharig ∞^2 zerfallene Flächen zweiter Ordnung. Jeder Kongruenzstrahl p ist die Doppelpunktsgerade einer solchen Fläche P^2. Sie geht durch die beiden in p einander schneidenden (reellen oder konjugiert imaginären) Kongruenzstrahlenbüschel. Im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ besteht der Polar-F^2-Bündel $\pi(F^2)$ einer in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung P^2 aus dieser Fläche und allen übrigen einscharig in C_1^1 enthaltenen durch die Doppelpunktsgerade von P^2, also einen Kongruenzstrahl p, gehenden Flächen zweiter Ordnung. Ist p insbesondere der unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞, also die einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung P^2 das in C_1^1 einscharig enthaltene zerfallene Paraboloid mit der unendlich fernen Doppelpunktsgerade c_∞, so besteht in $\Pi(F^2)$ ihr Polar-F^2-Bündel aus den in C_1^1 einscharig enthaltenen Paraboloiden.

Beim polaren Punktraume heißen die mit ihren Polarebenen inzidenten Punkte Inzidenzpunkte und deren Polarebenen Inzidenzebenen. Analog

---

[1]) Unter einer imaginären Fläche zweiter Ordnung ist im folgenden, falls nichts anderes bemerkt wird, die imaginäre Inzidenzfläche eines reellen polaren Raumes, unter einer imaginären Regelschar zweiter Ordnung eine Regelschar einer solchen Inzidenzfläche zu verstehen.

[2]) Jolles, Die durch eine polare Korrelation in sich selbst überführbaren Regelflächen zweiter Ordnung, Math. Zeitschr. 26 (1927), Nr. 1.

nenne ich beim polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ die mit ihren Polar-F^2-Bündeln inzidenten einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung „Inzidenzflächen“ und ihre Polar-F^2-Bündel „Inzidenz-F^2-Bündel“. Jede Inzidenzfläche von $\Pi(F^2)$ liegt hiernach in ihrem Inzidenz-F^2-Bündel, und umgekehrt geht jeder Inzidenz-F^2-Bündel von $\Pi(F^2)$ durch seine Inzidenzfläche. Die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 selbst heiße die „Inzidenzkongruenz“ des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$. Kurz:

Wird jeder einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung P^2 der Bündel $\pi(F^2)$ für sie autopolarer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung zugeordnet, so werden die Flächen P^2 die Polflächen der Bündel $\pi(F^2)$ in einem polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ mit der Inzidenzkongruenz C_1^1.

Zwei einscharig in der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene Flächen zweiter Ordnung sind autopolar füreinander, sobald jede in dem der andern in $\Pi(F^2)$ zugeordneten Polar-F^2-Bündel liegt. Zwei für eine einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung P^2 autopolare einscharig in C_1^1 enthaltene Flächen zweiter Ordnung werden durch einen Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener für P^2 autopolaren Flächen zweiter Ordnung verbunden. Die einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung sind die für sich selbst autopolaren Flächen zweiter Ordnung von $\Pi(F^2)$.

2. Je zwei Bündel eines F^2-Gebüsches schneiden einander in einem Büschel. Ist somit X^2 eine Fläche in einem gegebenen Bündel einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, und ist $\xi(F^2)$ ihr Polar-F^2-Bündel im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$, so schneidet $\xi(F^2)$ jenen Bündel in einem Büschel für X^2 autopolarer Flächen zweiter Ordnung. Die Polar-F^2-Bündel der Flächen dieses Büschels im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ schneiden aber den gegebenen F^2-Bündel in durch die Fläche X^2 gehenden F^2-Büscheln, deren Flächen je für die Flächen des Büschels autopolar sind. Also schließen wir:

In einem Bündel einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung besteht, wenn in ihm jeder Fläche der Büschel für sie autopolarer Flächen zweiter Ordnung zugeordnet wird, zwischen den Flächen und den F^2-Büscheln eine polare Korrelation.

Ein Bündel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, in dem jeder Fläche der Büschel für sie autopolarer Flächen zugeordnet ist, heiße ein „polarer“ F^2-Bündel. In einem polaren F^2-Bündel ist jede Fläche die „Polfläche“ des ihr zugeordneten F^2-Büschels, und jeder F^2-Büschel der „Polar-F^2-Büschel“ der ihm zugeordneten Fläche.

3. Die Polarebenen eines gegebenen Punktes A für die Flächen eines F^2-Bündels bilden einen zum Bündel projektiven zentrischen Bündel A_1. Bei einem polaren F^2-Bündel des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 zieht die polare Korrelation des F^2-Bündels die des zentrischen Bündels A_1 nach sich. Je zwei füreinander autopolaren Flächen des polaren F^2-Bündels entsprechen dabei zwei konjugierte Ebenen des polaren zentrischen Bündels. Aus diesem Grunde nennen wir zwei füreinander autopolare einscharig in C_1^1 enthaltene Flächen zweiter Ordnung auch „konjugierte" Flächen des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$. Die von einem Strahle des Punktes A_1 getragenen Paare konjugierter Ebenen des polaren zentrischen Bündels A_1 bilden aber eine Involution. Demnach gilt:

Die Paare konjugierter Elemente jedes im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 gelegenen involutorischen F^2-Büschels bestehen aus füreinander autopolaren einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung.

Sind im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ je zwei Flächen eines seiner Flächenquadrupel konjugiert, so heiße das Flächenquadrupel ein „Polar-F^2-Tetraeder" des polaren F^2-Gebüsches und jede seiner Flächen eine „Eckfläche" dieses Tetraeders. Jede Eckfläche eines Polar-F^2-Tetraeders von $\Pi(F^2)$ ist in $\Pi(F^2)$ die Polfläche des die drei anderen Eckflächen verbindenden F^2-Bündels.

Alle einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung sind im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ autokonjugiert (**1.**), und jede autokonjugierte Fläche von $\Pi(F^2)$ ist eine einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung. Demnach hat ein hyperbolisch involutorischer F^2-Büschel von $\Pi(F^2)$ zwei zerfallene Flächen zweiter Ordnung zu Doppelelementen. Hieraus folgt:

Liegen in einem Büschel einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung zwei zerfallene, so trennen sie seine Paare füreinander autopolarer Flächen harmonisch.

Bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 hat ein in ihrem polaren F^2-Gebüsche enthaltener hyperbolisch involutorischer F^2-Büschel ein reelles Basisvierseit. Bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 dagegen hat das Basisvierseit eines in ihrem polaren F^2-Gebüsche enthaltenen hyperbolisch involutorischen F^2-Büschels zwei Paare konjugiert imaginärer Gegenseiten. Bei einer hyperbolischen wie bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz ist ein involutorischer F^2-Büschel ihres polaren F^2-Gebüsches elliptisch, wenn das Basisvierseit des F^2-Büschels ein einziges Paar reeller Gegenseiten hat.

4. Ein Bündel einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung umfaßt auch ∞^1 zerfallene Flächen. Ihre Doppelpunktsgeraden bilden die in C_1^1 gelegene (reelle oder imaginäre) Regelschar der dem F^2-Bündel im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 zugeordneten Polfläche[3]). Bei einem Inzidenz-F^2-Bündel besteht diese Regelschar zweiter Ordnung aus zwei (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlenbüscheln erster Ordnung mit einem gemeinsamen Strahle (1.). Diese Strahlenbüschel sind insbesondere zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) durch den unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ und bzw. durch die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 gehende Parallelstrahlenbüschel, wenn der Inzidenz-F^2-Bündel aus den in C_1^1 einscharig enthaltenen Paraboloiden besteht (1.).

Wird der F^2-Bündel zu einem (2.) polaren F^2-Bündel $\pi(F^2)$ des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ von C_1^1, so liegt jede seiner zerfallenen Flächen in dem ihr in $\pi(F^2)$ zugeordneten F^2-Büschel. Jede zerfallene Fläche von $\pi(F^2)$ ist dann eine „Inzidenzfläche", ihr Polar-F^2-Büschel ein „Inzidenz-F^2-Büschel" und die in C_1^1 enthaltene Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$ der Polfläche P^2 von $\pi(F^2)$ die „Inzidenzregelschar" in dem polaren F^2-Bündel $\pi(F^2)$.

Eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz H_1^1 enthält nur reelle Regelscharen zweiter Ordnung. Die polaren F^2-Bündel ihres polaren F^2-Gebüsches $\Pi^H(F^2)$ haben also reelle Polflächen und reelle Inzidenzregelscharen.

Eine elliptische lineare Strahlenkongruenz E_1^1 enthält außer ∞^3 reellen auch ∞^3 imaginäre Regelscharen zweiter Ordnung. Die Bündel einscharig in ihr enthaltener Flächen zweiter Ordnung bestehen entweder aus ∞^2 reellen oder aus ∞^2 reellen und ∞^2 imaginären Flächen zweiter Ordnung. Jedes nur aus reellen Flächen bestehende polare F^2-Bündel im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^E(F^2)$ von E_1^1 hat eine imaginäre Polfläche und eine imaginäre Inzidenzregelschar. Enthält dagegen ein polarer F^2-Bündel in $\Pi^E(F^2)$ auch imaginäre Flächen, so ist seine Polfläche und seine Inzidenzregelschar reell[4]). In dem polaren F^2-Gebüsche einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz sind je zwei konjugierte Flächen reell, in dem einer elliptischen kann eine von ihnen imaginär sein. Also:

Von zwei füreinander autopolaren einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung ist mindestens eine reell[4]), und von den vier Eckflächen (3.) eines Polar-F^2-Tetraeders im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 ist höchstens eine imaginär.

---

[3]) A. a. O. Nr. 2.
[4]) A. a. O. Nr. 3.

5. In einem F^2-Gebüsche haben zwei F^2-Bündel einen F^2-Büschel gemein. Die im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 zwei einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung M^2, N^2 zugeordneten Polar-F^2-Bündel schneiden einander also in einem F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$. Jede seiner Flächen ist jeder Fläche des M^2, N^2 verbindenden F^2-Büschels $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ konjugiert (**1.**), und die allen Flächen des einen F^2-Büschels in $\Pi(F^2)$ zugeordneten Polar-F^2-Bündel gehen durch den andern. Zwei Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, wie $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$, bei denen die Flächen des einen Büschels allen Flächen des andern in $\Pi(F^2)$ konjugiert sind, werden im folgenden „reziprok polar" in diesem polaren F^2-Gebüsche genannt. Jeder der beiden F^2-Büschel ist in $\Pi(F^2)$ „polar" für den andern und heißt in diesem polaren F^2-Gebüsche der „Polar-F^2-Büschel" des andern.

Die für die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 paarweise einander zugeordneten Geraden auf einer einscharig in ihr enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P^2 sind reziproke Polaren[5]) für alle Flächen des P^2 in $\Pi(F^2)$ zugeordneten Polar-F^2-Bündels $\pi(F^2)$. Nun gehen in $\Pi(F^2)$ die Polar-F^2-Bündel aller Elemente eines Büschels $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung durch den zu ihm polaren F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$. Folglich sind alle für C_1^1 paarweise einander zugeordneten Geraden auf den Flächen des Büschels $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ gemeinsame reziproke Polaren für alle Flächen des Büschels $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$. Die nicht in C_1^1 enthaltenen Geraden auf den Flächen des Büschels $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ bilden aber[6]) eine lineare Strahlenkongruenz $\mathfrak{L}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, und auf dieser die für C_1^1 paarweise einander zugeordneten Strahlen eine sekundäre Involution[7]). Diese lineare Strahlenkongruenz ebenso wie die von ihr getragene sekundäre Involution heiße dem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ „adjungiert", und umgekehrt heiße dieser Büschel „adjungiert" jenen beiden Gebilden.

Aus unseren Darlegungen ergibt sich für zwei reziprok polare F^2-Büschel von $\Pi(F^2)$:

Von zwei reziprok polaren F^2-Büscheln im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist jeder perspektiv zu einem Büschel

---

[5]) A.a.O. Nr. 5.

[6]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **134** (1908), Nr. 12.

[7]) Jolles, Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz. Math. Zeitschr. **27** (1927), Nr. 1.

zweiter Art[8]) *von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung in der dem andern F^2-Büschel adjungierten sekundären Involution.*

Je zwei einander zugeordnete Strahlen in der dem einen dieser F^2-Büschel adjungierten sekundären Involution sind die Achsen zweier im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 einander zugeordneten Ebenenbüschel erster Ordnung. Jede von je zwei solchen projektiven Ebenenbüscheln erzeugte Regelschar zweiter Ordnung von C_1^1 liegt somit auf einer Fläche des zum gewählten F^2-Büschel in $\Pi(F^2)$ polaren F^2-Büschels.

6. Die einem Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung adjungierte sekundäre Involution setzt sich aus den Strahlenpaaren zusammen, die aus zwei für alle Flächen von $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ reziprok polaren Geraden bestehen (**5.**). Und ein in dieser sekundären Involution enthaltener Büschel zweiter Art von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung[8]) ist perspektiv zu dem im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 zu $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ polaren F^2-Büschel $(R^2S^2T^2\ldots)$. Nun ist bekanntlich die Polare eines Strahles x von C_1^1 für eine einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung wiederum ein Kongruenzstrahl. Also ist sie nach vorstehendem für jede Fläche des F^2-Büschels $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ ein Strahl der durch x gehenden Fläche X^2 des Büschels $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$. Folglich bilden die Polaren des Strahles x für die Flächen des Büschels $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ eine zu diesem F^2-Büschel projektive in C_1^1 gelegene Regelschar $\mathfrak{X}^2$ auf der Fläche X^2. D. h.

Sind die F^2-Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ reziprok polar im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, so beschreiben die Polaren eines gegebenen Strahles x von C_1^1 für alle Flächen des einen Büschels eine in C_1^1 gelegene zu dem Büschel projektive Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{X}^2$ auf der x enthaltenden Fläche X^2 des andern.

---

[8]) Ich unterscheide zwei Arten von Büscheln involutorischer Regelscharen zweiter Ordnung. Der Büschel involutorischer Regelscharen zweiter Ordnung „erster Art" wird von einer Regelschar zweiter Ordnung getragen, und seine Elemente haben ein Paar (reeller oder konjugiert imaginärer) einander zugeordneter Strahlen gemein. Der Büschel involutorischer Regelscharen zweiter Ordnung „zweiter Art" dagegen liegt perspektiv zu einem F^2-Büschel, und seine involutorischen Regelscharen erschöpfen durch ihre Strahlenpaare eine sekundär involutorische lineare Strahlenkongruenz.

Ebenso unterscheide ich weiterhin zwei Arten von Bündeln involutorischer Regelscharen zweiter Ordnung. Der Bündel „erster Art" wird von einer Regelschar zweiter Ordnung getragen, und deren Leitstrahlen schneiden ihn in den zu ihm perspektiven Bündeln von Punktinvolutionen. Der Bündel „zweiter Art" besteht aus den ∞^2 involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung einer primär involutorischen linearen Strahlenkongruenz (vgl. die unter [7]) angeführte Abhandlung, Nr. 2) und ist perspektiv zu einem F^2-Bündel.

Durch den Strahl x von C_1^1 geht außer der die Regelschar $\mathfrak{X}^2$ enthaltenden Fläche X^2 von $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ auch eine Fläche des Büschels $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$. Beschreibt x deren in C_1^1 gelegene Regelschar, so fällt die Regelschar $\mathfrak{X}^2$ nacheinander mit den in C_1^1 enthaltenen Regelscharen auf ∞^1 Flächen des Büschels $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ zusammen. Zugleich mit diesen Regelscharen zweiter Ordnung sind ihre Trägerflächen und der diese Flächen verbindende F^2-Büschel gegeben. Folglich ist nunmehr der in $\Pi(F^2)$ zu einem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung polare Büschel konstruiert, unabhängig davon ob das Basisvierseit des gegebenen F^2-Büschels reell ist oder konjugiert imaginäre Gegenseiten enthält.

7. Sind zwei reziprok polare F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 mit nicht ausgearteten Basisvierseiten gegeben, so hat (5.) das Basisvierseit des Büschels $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ zu einem Paare Gegenseiten die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1, zum andern Paare die mit zwei Strahlen a, b von C_1^1 zusammengefallenen (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden der dem Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierten linearen Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ und ferner zu Diagonalen die mit zwei Strahlen c, d von C_1^1 zusammengefallenen (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden der dem Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ adjungierten linearen Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$. Ebenso hat das Basisvierseit des Büschels $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ zu einem Paare Gegenseiten die Leitgeraden u, v von C_1^1, dagegen zum andern Paare die Leitgeraden c, d von $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ und zu Diagonalen die Leitgeraden a, b von $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$. Kurzum:

Die (nichtausgearteten) Basisvierseite zweier reziprok polaren F^2-Büschel des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthalten außer den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 je ein anderes Paar (reeller oder konjugiert imaginärer) Gegenseiten eines in C_1^1 gelegenen Vierseits. Zwei einscharig in C_1^1 enthaltene Flächen zweiter Ordnung, von denen jede durch ein anderes Paar Gegenseiten eines Vierseits von C_1^1 geht, sind füreinander autopolar.

Auf die reziprok polaren F^2-Büschel von $\Pi(F^2)$ mit ausgearteten Basisvierseiten wird später (16.) eingegangen.

8. In dem polaren F^2-Gebüsche $\Pi^H(F^2)$ einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 bestehen die (nicht ausgearteten) Basisvierseite zweier reziprok polaren F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ aus den (reellen) Leitgeraden u, v von H_1^1 und bzw. aus den Gegenseiten $a, b; c, d$ eines reellen oder imaginären Vierseits $a\,c\,b\,d$ von C_1^1. Bei einem reellen Vierseite $a\,c\,b\,d$ sind die $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ für $\Pi^H(F^2)$

bzw. adjungierten linearen Strahlenkongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$, $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ hyperbolisch, bei einem imaginären elliptisch. Im ersteren Falle sind die Leitgeraden c, d von $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ und a, b von $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ reell, im letzteren konjugiert imaginär. Sind die zwei Basisvierseite reell, so enthält die dem Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ für $\Pi^H(F^2)$ adjungierte sekundäre Involution außer den reellen Doppelstrahlen u, v die reellen Doppelstrahlen a, b und die dem Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierte außer den reellen Doppelstrahlen u, v die reellen Doppelstrahlen c, d. Enthalten die Basisvierseite von $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ außer u, v bzw. die konjugiert imaginären Gegenseiten a, b; c, d, so haben die diesen Büscheln bzw. adjungierten sekundären Involutionen außer den reellen Doppelstrahlen u, v bzw. die konjugiert imaginären a, b; c, d.

Von den (nicht ausgearteten) Basisvierseiten zweier reziprok polaren F^2-Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^E(F^2)$ einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 enthält das eine immer ein Paar reeller, das andere ein Paar konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlen. Es enthalte also das eine — etwa das von $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ — außer den (konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v die zwei reellen Kongruenzstrahlen a, b. Das Basisvierseit von $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ enthält dann außer jenen Leitgeraden zwei konjugiert imaginäre Kongruenzstrahlen c, d, und dem Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ ist eine elliptische lineare Strahlenkongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ mit den konjugiert imaginären Leitgeraden c, d, dem Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ eine hyperbolische $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ mit den reellen Leitgeraden a, b adjungiert. Die für $\Pi^E(F^2)$ dem Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ adjungierte sekundäre Involution hat außer den konjugiert imaginären Doppelstrahlen u, v die reellen a, b, die für $\Pi^E(F^2)$ dem Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierte die zwei Paare konjugiert imaginärer Doppelstrahlen u, v; c, d.

9. Es seien $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ zwei reziprok polare F^2-Büschel im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1. Ist dann $\mathfrak{a}$ eine gegebene Gerade, so bilden die mit $\mathfrak{a}$ inzidenten Strahlen der $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierten linearen Strahlenkongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ eine Regelschar zweiter Ordnung. Nun sind die Strahlen von $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ paarweise reziprok polar für alle Flächen des Büschels $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ und im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 einander zugeordnet (5.). Wird somit $\mathfrak{a}$ ein Strahl der $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ adjungierten linearen Strahlenkongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$, also ein nicht in C_1^1 enthaltener Strahl auf einer Fläche U^2 von $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$, und ist demnach der $\mathfrak{a}$ in Σ_{ig} zugeordnete Strahl $\mathfrak{a}'$ ebenfalls in $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ enthalten und auf U^2 gelegen, so sind die mit $\mathfrak{a}$ inzidenten Strahlen von $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ auch mit $\mathfrak{a}'$ inzident. Die von ihnen gebildete Regelschar zweiter Ordnung

esteht folglich aus paarweise für U^2 reziprok polaren und in Σ_{ig} einander ugeordneten Strahlen. Sie ist nicht nur eine involutorische Regelschar weiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ von Σ_{ig}, sondern auch von der $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ djungierten sekundären Involution. Da die Leitschar $\mathfrak{L}^2$ dieser involutoschen Regelschar zweiter Ordnung von Σ_{ig} durch die in Σ_{ig} einander ugeordneten Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ geht, so ist auch sie eine involutorische Regelchar zweiter Ordnung dieses geschart involutorischen Raumes. Die Trägeräche A^2_{ig} der beiden involutorischen Regelscharen $\mathfrak{R}^2$, $\mathfrak{L}^2$ erweist sich somit ls eine in ihm gelegene beidscharig involutorische Regelfläche zweiter Ordnung.

Im folgenden zeigen wir jetzt:

Die involutorische Leitschar $\mathfrak{L}^2$ der beidscharig involutorischen Fläche A^2_{ig} egt in der dem Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ adjungierten sekundären Involution.

Als beidscharig involutorische Regelfläche von Σ_{ig} kann nämlich A^2_{ig} icht im Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ enthalten sein. Folglich geht durch edes Strahlenpaar ihrer involutorischen Regelschar $\mathfrak{R}^2$, die ja in der $^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierten sekundären Involution (5.) liegt, eine Fläche on $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$. Schneiden aber zwei in Σ_{ig} einander zugeordnete eraden eine einscharig in C^1_1 gelegene Fläche zweiter Ordnung in Punkten nes auf ihr enthaltenen Strahlenpaares von Σ_{ig}, so sind sie für die läche reziprok polar. Jedes Strahlenpaar der in Σ_{ig} gelegenen involutoschen Leitschar $\mathfrak{L}^2$ von $\mathfrak{R}^2$ besteht somit aus reziproken Polaren für ede durch je ein Strahlenpaar der involutorischen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ gehende läche des Büschels $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, also kurz aus reziproken Polaren ür alle Flächen dieses Büschels. Die in Σ_{ig} enthaltene involutorische eitschar $\mathfrak{L}^2$ von $\mathfrak{R}^2$ ist folglich in der $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ adjungierten ekundären Involution enthalten.

Von der beidscharig involutorischen Fläche zweiter Ordnung A^2_{ig} liegt iernach die eine involutorische Regelschar $\mathfrak{R}^2$ in der dem Büschel $^2(R^2S^2T^2\ldots)$, die andere $\mathfrak{L}^2$ in der dem Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ djungierten sekundären Involution. Durch die Regelschar von $\mathfrak{R}^2$ geht ie $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$, durch die Regelschar von $\mathfrak{L}^2$ die $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ djungierte lineare Kongruenz.

Ebenso wie die Fläche A^2_{ig} durch das Strahlenpaar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ der $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ djungierten sekundären Involution bestimmt ist, sei es die Fläche B^2_{ig} durch as Strahlenpaar $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ dieser Involution. Die Flächen A^2_{ig}, B^2_{ig} liegen einharig in den $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$, $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ bzw. adjungierten nearen Strahlenkongruenzen $\mathfrak{A}^1_1(R^2S^2T^2\ldots)$, $\mathfrak{A}^1_1(M^2N^2O^2\ldots)$. Folglich egt auch einscharig in diesen jede Fläche des A^2_{ig}, B^2_{ig} verbindenden F^2-üschels[9]). Die Flächen A^2_{ig}, B^2_{ig} sind aber außerdem beidscharig involu-

[9]) Die unter [6]) angeführte Abhandlung, Nr. 1.

torische Flächen des geschart involutorischen Raumes Σ_{i_g} von C_1^1. Folglich liegt jede Fläche des sie verbindenden Büschels[10]) auch noch beidscharig involutorisch in Σ_{i_g}. Nun sind die $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$, $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ bzw. adjungierten sekundären Involutionen selbst in Σ_{i_g} enthalten und werden bzw. von $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$, $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ getragen. Somit liegt jede Fläche des $A_{i_g}^2, B_{i_g}^2$ verbindenden Büschels $F^2(A_{i_g}^2B_{i_g}^2C_{i_g}^2\ldots)$ beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung mit der einen involutorischen Regelschar in der $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$, mit der andern in der $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ adjungierten sekundären Involution, und dieser F^2-Büschel ist also zu einem Büschel zweiter Art von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung in jeder der beiden sekundären Involutionen perspektiv.

Sind $a\,u\,b\,v$, $c\,u\,d\,v$ bzw. die Basisvierseite (7.) von $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$, somit a, b; c, d bzw. die von den Leitgeraden u, v von C_1^1 verschiedenen Paare von Doppelstrahlen der diesen reziprok polaren F^2-Büscheln von $\Pi(F^2)$ bzw. adjungierten sekundären Involutionen, so ist $a\,c\,b\,d$ das Basisvierseit des Büschels $F^2(A_{i_g}^2B_{i_g}^2C_{i_g}^2\ldots)$. Die Basiskurve dieses Büschels beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung von Σ_{i_g} artet demnach in ein in C_1^1 gelegenes Vierseit aus.

Zusammengefaßt folgt aus unserer Untersuchung:

Jede der zwei sekundären Involutionen, die bzw. zwei reziprok polaren F^2-Büscheln $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 adjungiert sind, enthält einen zu dem nämlichen F^2-Büschel $F^2(A_{i_g}^2B_{i_g}^2C_{i_g}^2\ldots)$ beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{i_g} von C_1^1 perspektiven Büschel zweiter Art von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung. Die Basiskurve des Büschels $F^2(A_{i_g}^2B_{i_g}^2C_{i_g}^2\ldots)$ ist ein Vierseit von C_1^1, und seine Flächen liegen einscharig in den $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ bzw. adjungierten linearen Strahlenkongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$, $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$.

Aus diesem und dem in Nummer 5 ausgesprochenen Hauptsatze schließen wir nunmehr:

Zwei reziprok polare F^2-Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ in dem polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bestimmen in jeder der ihnen bzw. adjungierten sekundären Involutionen zwei Büschel zweiter Art von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung. Der eine ist in jeder der beiden sekundären Involutionen perspektiv zu dem ihr nicht adjungierten F^2-Büschel aus dem Paare $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ Der andere dagegen liegt in beiden sekundären Involutionen perspektiv zum selben Büschel $F^2(A_{i_g}^2B_{i_g}^2C_{i_g}^2\ldots)$ beidscharig

[10]) A. a. O., Nr. 17.

involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Zwei in Σ_{ig} einander zugeordnete Ebenenbüschel erster Ordnung, deren Achsen auf einer Fläche von $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ liegen, erzeugen eine Fläche von $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ oder $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$, je nachdem die beiden Achsen ein Strahlenpaar der $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ oder $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ adjungierten sekundären Involution sind (**5.**).

Der Büschel $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung von Σ_{ig} heiße mit den beiden in $\Pi(F^2)$ reziprok polaren F^2-Büscheln $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ „verknüpft". Und umgekehrt heißen auch diese „verknüpft" mit dem Büschel $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$.

10. Bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 haben die in ihr gelegenen (nicht ausgearteten) Vierseite entweder zwei Paare reeller oder konjugiert imaginärer Gegenseiten. Ist dann Σ_{ig}^H der geschart involutorische Raum von H_1^1, so hat folglich der mit zwei gegebenen reziprok polaren F^2-Büscheln des polaren F^2-Gebüsches von H_1^1 verknüpfte Büschel (**9.**) beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung von Σ_{ig}^H zwei Paare reeller oder konjugiert imaginärer Gegenseiten.

In einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 dagegen liegen nur (nicht ausgeartete) Vierseite mit zwei reellen und zwei konjugiert imaginären Gegenseiten. Der mit zwei gegebenen reziprok polaren F^2-Büscheln des polaren F^2-Gebüsches von E_1^1 verknüpfte Büschel beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^H der elliptischen Kongruenz geht somit durch ein Basisvierseit mit zwei reellen und zwei konjugiert imaginären Gegenseiten.

Von den drei durch ein Raumvierseit und seine beiden Diagonalen bestimmten Vierseiten können zwei zu Basisvierseiten zweier reziprok polaren F^2-Büscheln in dem polaren F^2-Gebüsche einer linearen Strahlenkongruenz gewählt werden. Das dritte ist dann das Basisvierseit des mit den beiden F^2-Büscheln verknüpften Büschels beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung in dem durch die Kongruenz bestimmten geschart involutorischen Raume.

11. Zwei reziprok polare F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 seien gegeben und der mit ihnen verknüpfte Büschel $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Dann liegen die involutorischen Regelscharen auf den Flächen des Büschels $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ in den den beiden reziprok polaren Büscheln bzw. adjungierten sekundären Involutionen (**9.**). Die Strahlenpaare der einen involutorischen Regelschar auf einer Fläche von $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ bestehen folglich aus gemeinsamen reziproken Polaren

für die Flächen des Büschels $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ und die der anderen aus gemeinsamen reziproken Polaren für die Flächen des Büschels $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$. Jede Fläche des Büschels $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ ist hiernach für alle Flächen der beiden in $\Pi(F^2)$ reziprok polaren Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ autopolar. Umgekehrt ist jede Fläche aus einem dieser beiden F^2-Büschel autopolar für alle Flächen des Büschels $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$. Nun sind aber die Flächen jedes der beiden in $\Pi(F^2)$ reziprok polaren F^2-Büschel auch für alle Flächen des andern autopolar (5.). Somit ist dargetan:

Im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist jede Fläche aus einem von zwei reziprok polaren F^2-Büscheln oder aus dem mit ihnen verknüpften Büschel beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 autopolar für die Flächen der beiden übrigen Büschel.

Mit Rücksicht auf Nummer **10** folgern wir hieraus insbesondere:

Werden ein Raumvierseit und die aus seinen beiden Diagonalen und je einem Paare seiner Gegenseiten gebildeten zwei Vierseite Basisvierseite von drei F^2-Büscheln, so sind die Flächen jedes der drei Büschel autopolar für die Flächen der beiden übrigen.

Jeder durch eine einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung P^2 gehende Büschel solcher Flächen ist im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 polar für einen der ∞^2 F^2-Büschel aus dem Polar-F^2-Bündel $\pi(F^2)$ von P^2. Die mit diesen ∞^2 Paaren reziprok polarer F^2-Büschel von $\Pi(F^2)$ bzw. verknüpften Büschel beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung aus dem geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 bestehen aber nach dem ersten obigen Hauptsatze aus für P^2 autopolaren Flächen. Daher gilt:

Für eine einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung P^2 sind die Elemente von ∞^2 Büscheln beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 autopolar.

12. Durch zwei Paare $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$; $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$ einander zugeordneter Strahlen einer involutorischen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ auf einer beidscharig involutorischen Regelfläche zweiter Ordnung X_{ig}^2 im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 gehen bzw. zwei einscharig in C_1^1 enthaltene Flächen zweiter Ordnung M^2, N^2. Der sie verbindende F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ besteht aus lauter einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung[9]). Er ist somit im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 polar zu einem zweiten F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ und perspektiv zu einem Büschel zweiter Art von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung in der dem Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierten sekundären Involution (5.). In dieser liegen zwei und folglich alle Paare in Σ_{ig} einander

zugeordneter Strahlen der involutorischen Regelschar $\mathfrak{R}^2$. Da die dem Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierte sekundäre Involution durch die eine involutorische Regelschar $\mathfrak{R}^2$ der beidscharig involutorischen Regelfläche X_{ig}^2 von Σ_{ig} geht, so geht die $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ adjungierte durch die andere (**9.**). Die beidscharig involutorische Regelfläche X_{ig}^2 ist demnach ein Element des mit den reziprok polaren Büscheln $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ von $\Pi(F^2)$ verknüpften Büschels $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung von Σ_{ig}. Da aber ein solcher F^2-Büschel[11]) von Σ_{ig} schon durch eine seiner Flächen bestimmt ist, so schließen wir:

Jeder Büschel beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 mit einem aus Kongruenzstrahlen bestehenden Basisvierseite bestimmt zwei mit ihm verknüpfte reziprok polare F^2-Büschel des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ von C_1^1. Das Basisvierseit des Büschels beidscharig involutorischer Regelflächen kann reell sein oder konjugiert imaginäre Gegenseiten haben.

13. Bei zwei reziprok polaren F^2-Büscheln $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ des polaren F^2-Gebüsches einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 liegt jede Fläche des mit ihnen im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 verknüpften Büschels $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung mit der einen involutorischen Regelschar in der $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ mit der andern in der $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierten sekundären Involution (**9.**). Wie aus den folgenden Darlegungen hervorgeht, sind wir sonach imstande, beide zum Büschel $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ perspektiven Büschel zweiter Art von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung verhältnismäßig einfach zu konstruieren. Gleichgültig ob das in C_1^1 enthaltene Basisvierseit von $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ reell ist oder konjugiert imaginäre Gegenseiten hat.

Liegt nämlich zunächst eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz H_1^1 vor, so hat das Basisvierseit des Büschels $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ zwei Paare reeller oder konjugiert imaginärer Gegenseiten und als (reelle) Diagonalen die Leitgeraden u, v von H_1^1. In u, v schneiden einander (**7.**) die den reziprok polaren F^2-Büscheln $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ bzw. adjungierten, und mit ihnen zugleich gegebenen linearen Strahlenkongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$. Nun enthält jede von ihnen einscharig die Flächen eines F^2-Büschels[12]) mit den gemeinsamen reziproken Polaren u, v. Diese beiden F^2-Büschel fallen mit dem Büschel

[11]) Die unter [6]) angeführte Abhandlung, Nr. 12.

[12]) Die unter [6]) angeführte Abhandlung, Nr. 7.

$F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ zusammen, dessen Flächen einscharig in beiden Kongruenzen liegen und ebenfalls die beiden gemeinsamen reziproken Polaren u, v haben. Zugleich sind je zwei der auf ihren Flächen gelegenen durch u, v harmonisch getrennten Strahlen die im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 einander zugeordneten Strahlen der in Σ_{ig} von den Flächen getragenen involutorischen Regelscharen. Diese involutorischen Regelscharen bilden sonach die Elemente der beiden gesuchten zum Büschel $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ perspektiven Büschel zweiter Art von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung in den $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ bzw. adjungierten sekundären Involutionen.

Ist hingegen der Büschel $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ mit zwei reziprok polaren F^2-Büscheln $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ im polaren F^2-Gebüsche einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 verknüpft, und enthält (7.) das Basisvierseit von $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ die reellen Kongruenzstrahlen a, b und das von $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ die konjugiert imaginären c, d, so hat das Basisvierseit von $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ die reellen Gegenseiten a, b und die konjugiert imaginären c, d und zu Diagonalen die (konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von E_1^1. Die reellen Kongruenzstrahlen a, b sind als die reellen windschiefen Doppelstrahlen der dem Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ adjungierten sekundären Involution zugleich die Doppelstrahlen jeder hyperbolisch involutorischen Regelschar zweiter Ordnung des in dieser sekundären Involution gelegenen zum Büschel $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ perspektiven Büschels zweiter Art von hyperbolisch involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung[13]). Durch jeden Strahl $\mathfrak{x}$ der $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ adjungierten linearen Kongruenz geht eine dieser hyperbolisch involutorischen Regelscharen. Ihre Trägerregelschar ist durch das in dieser Kongruenz gelegene Strahlentripel $a, b, \mathfrak{x}$ bestimmt, ihre hyperbolische Involution durch deren Doppelstrahlen a, b.

Während die dem Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ adjungierte lineare Strahlenkongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ elliptisch ist, ist die dem Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierte $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ hyperbolisch. Ihre Leitgeraden a, b werden von den Strahlenpaaren der $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierten sekundären Involution bzw. in den Punktepaaren der elliptischen Punktinvolutionen geschnitten, die a, b im geschart involutorischen Raume von E_1^1 tragen. — Der eine von den zwei Büscheln zweiter Art von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung in der $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierten sekundären Involution ist perspektiv (9.) zum Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$. Seine involutorischen Regelscharen sind also elliptisch und haben die (konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von E_1^1 zu Doppelstrahlen. Ist $\mathfrak{R}^2$

[13]) Die unter [7]) angeführte Abhandlung, Nr. 5.

eine involutorische Regelschar dieses Büschels, und trennen in ihr die Strahlenpaare $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ einander harmonisch, so schneiden die Leitgeraden a, b von $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ den harmonischen Strahlenwurf $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'$ bzw. in den harmonischen Punktwürfen $X_a Y_a X_a' Y_a'$, $X_b Y_b X_b' Y_b'$. Nun ist:

$$X_a Y_a X_a' Y_a' \overline{\wedge} X_b Y_b X_b' Y_b' \overline{\wedge} X_b Y_b' X_b' Y_b .$$

Folglich ist die zugleich mit $\mathfrak{R}^2$ durch das Strahlenpaar $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ gehende zweite involutorische Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}_x^2$ der sekundären Involution $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ leicht zu konstruieren. Ihre Regelschar verbindet die einander harmonisch trennenden Strahlenpaare $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$; $Y_a Y_b'$, $Y_a' Y_b$ miteinander, und ihre elliptische Involution ist durch diese zwei Strahlenpaare bestimmt. Durchläuft das Strahlenpaar $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ die elliptisch involutorische Regelschar $\mathfrak{R}^2$, so fällt $\mathfrak{R}_x^2$ nacheinander mit allen involutorischen Regelscharen des zu $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ perspektiven Büschels zweiter Art von elliptisch involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung in der $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierten sekundären Involution zusammen.

Damit sind jetzt auch bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz die zum Büschel $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ perspektiven beiden Büschel zweiter Art von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung konstruiert.

14. Im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 liegen ∞^4 paarweise füreinander polare F^2-Büschel. Die auf den Flächen jedes solchen Büschels gelegenen Paare einander zugeordneter Geraden des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 bilden somit diejenige sekundär involutorische lineare Strahlenkongruenz, die dem in $\Pi(F^2)$ zu dem F^2-Büschel polaren F^2-Büschel adjungiert ist (5.). In anderen Worten:

Bei einem Büschel einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung erschöpfen die auf seinen Flächen gelegenen Strahlenpaare des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 eine sekundär involutorische lineare Strahlenkongruenz.

Sind $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$ zwei Paare nicht in einer Regelschar zweiter Ordnung gelegener einander zugeordneten Strahlen des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1, und ist M^2 die $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ und N^2 die $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$ enthaltende einscharig in der Kongruenz gelegene Fläche zweiter Ordnung, so besteht der M^2, N^2 verbindende F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ aus lauter in C_1^1 einscharig enthaltenen Flächen zweiter Ordnung[9]). Zum F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ ist im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 ein F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ polar. Und die in Σ_{ig} einander zugeordneten Strahlen auf den Flächen von $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ bilden die $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierte sekundäre Involution. Diese sekundäre Involution enthält aber die zwei Strahlenpaare $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$; $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$, also folgt:

Durch zwei nicht in einer Regelschar zweiter Ordnung gelegene Paare einander zugeordneter Geraden $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'; \mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$ *aus dem geschart involutorischen Raume* Σ_{ig} *einer linearen Strahlenkongruenz* C_1^1 *geht nur eine in* Σ_{ig} *enthaltene sekundäre Strahleninvolution. Jede in* Σ_{ig} *enthaltene sekundäre Strahleninvolution ist einem Büschel einscharig in* C_1^1 *enthaltener Flächen zweiter Ordnung adjungiert. Die sie tragende lineare Strahlenkongruenz hat zu Leitgeraden* (7.) *zwei* (*reelle oder konjugiert imaginäre*) *Strahlen von* C_1^1.

15. Die beiden Leitgeraden u, v einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 sind bekanntlich (reelle) reziproke Polaren für alle im geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^H von H_1^1 enthaltenen beidscharig involutorischen Regelflächen zweiter Ordnung. Ordnen wir diese Regelflächen zu F^2-Büscheln mit Vierseiten von H_1^1 als Basiskurven, so liegen in den polaren Räumen aller Flächen jedes solchen F^2-Büschels auf u wie auf v dieselbe Involution konjugierter Punkte. Die Involutionen auf u und v sind zusammen hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem das Basisvierseit zwei Paare reeller oder konjugiert imaginärer Gegenseiten hat.

u wie v können ∞^2 hyperbolische und ∞^2 elliptische Punktinvolutionen tragen. Im letzteren Falle sind im geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^H von H_1^1 im ganzen ∞^4 Büschel beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung, deren Basiskurven aus den Vierseiten von H_1^1 mit zwei Paaren konjugiert imaginärer Gegenseiten bestehen. Jedem der beiden mit einem solchen F^2-Büschel des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^H(F^2)$ von H_1^1 verknüpften reziprok polaren F^2-Büschel ist aber bzw. eine elliptische lineare Strahlenkongruenz adjungiert (8.). Die Leitgeradenpaare dieser linearen Kongruenzen bilden die Paare konjugiert imaginärer Strahlen von H_1^1. Jedes der ∞^4 Paare konjugiert imaginärer Strahlen der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 ist also durch eine solche elliptische lineare Strahlenkongruenz real dargestellt.

Hat ein Büschel beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung im geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^E einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 ein (nicht ausgeartetes) Vierseit von E_1^1 zur Basiskurve, so ist das eine Paar Gegenseiten des Basisvierseits reell, das andere Paar konjugiert imaginär. Mit dem F^2-Büschel sind zwei reziprok polare F^2-Büschel des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^E(F^2)$ von E_1^1 verknüpft. Das Basisvierseit des einen enthält ein Paar reeller und ein Paar konjugiert imaginärer, das Basisvierseit des andern zwei Paare konjugiert imaginärer Gegenseiten. Die jenem F^2-Büschel adjungierte lineare Strahlenkongruenz ist also elliptisch, die diesem adjungierte hyperbolisch (8.). Fällt das Paar reziprok polarer F^2-Büschel von $\Pi^E(F^2)$ nacheinander mit allen ∞^4 Paaren reziprok polarer F^2-Büschel dieses polaren F^2-Gebüsches zusammen, so

erhält man ∞^4 F^2-Büschel, denen elliptische, und ∞^4, denen hyperbolische lineare Strahlenkongruenzen adjungiert sind. Die Leitgeradenpaare der ∞^4 elliptischen linearen Kongruenzen bilden die ∞^4 Paare konjugiert imaginärer Strahlen von E_1^1. Diese elliptischen linearen Strahlenkongruenzen stellen somit bzw. die ∞^4 Paare konjugiert imaginärer Strahlen der elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 real dar.

Eine zweite reale Darstellung der konjugiert imaginären Strahlen einer linearen Strahlenkongruenz, die gleich sowohl für die hyperbolische wie für die elliptische lineare Kongruenz gilt, wird später in Nummer **31** gegeben.

16. Die Korrelation des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ordnet der Inzidenzfläche jeder seiner Inzidenz-F^2-Bündel (**1.**) alle übrigen Flächen zweiter Ordnung des Bündels zu. Jede Inzidenzfläche von $\Pi(F^2)$ ist folglich allen Flächen des ihr zugeordneten Inzidenz-F^2-Bündels konjugiert. Die durch die polare Korrelation des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ in seinen Inzidenz-F^2-Bündeln hervorgerufenen polaren Korrelationen sind demnach ausgeartet.

Alle Flächen eines Inzidenz-F^2-Bündels $\pi(F^2)$ des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ enthalten (**1.**) die Doppelpunktsgerade p seiner in zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenen Inzidenzfläche P^2. Die durch die Korrelation von $\pi(F^2)$ in $\pi(F^2)$ bestimmte ausgeartete polare Korrelation ordnet folglich in diesem Inzidenz-F^2-Bündel einer nicht zerfallenen Fläche X^2 einen Polar-F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ zu (**2.**), der aus längs p einander berührender Flächen zweiter Ordnung besteht[4]). In diesem F^2-Büschel ist die einzige zerfallene Fläche P^2 aber allen seinen übrigen Flächen konjugiert. Seine Flächen sind demnach in $\Pi(F^2)$ parabolisch involutorisch gepaart.

Der die Polfläche X^2 des F^2-Büschels $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ von $\pi(F^2)$ mit der zerfallenen Fläche P^2 verbindende F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ des Inzidenz-F^2-Bündels $\pi(F^2)$ ist ferner in $\Pi(F^2)$ zum F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ polar und besteht ebenfalls aus längs p einander berührender Flächen zweiter Ordnung. Ein zweiter X^2 enthaltender F^2-Büschel von $\pi(F^2)$ schneidet den F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ in einer in $\Pi(F^2)$ der Fläche X^2 konjugierten Fläche zweiter Ordnung. Da X^2 jede Fläche des schneidenden F^2-Büschels sein kann, so gibt es ∞^1 Paare reziprok polarer F^2-Büschel, die aus längs p einander berührender Flächen bestehen. Sie bilden einen involutorischen Büschel von F^2-Büscheln. Also ist gezeigt:

Die ∞^2 Flächen eines Inzidenz-F^2-Bündels $\pi(F^2)$ im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 lassen sich zu ∞^1 Paaren reziprok polarer F^2-Büschel von $\Pi(F^2)$ zusammenfassen, deren

Flächen einander je längs der Doppelpunktsgerade p der (zerfallenen) Inzidenzfläche P^2 von $\pi(F^2)$ berühren. Diese ∞^1 Paare reziprok polarer F^2-Büschel bilden einen involutorischen Büschel. Seine Doppelelemente sind die beiden (reellen oder konjugiert imaginären) aus den zerfallenen Flächen von $\pi(F^2)$ bestehenden F^2-Büschel (3.).

Bezeichnen wir jeden F^2-Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, dessen Flächen längs eines Kongruenzstrahles einander berühren und dessen Basisvierseit also in den Kongruenzstrahl ausartet, als einen längs dieses Kongruenzstrahles „tangentialen" F^2-Büschel einscharig in der linearen Kongruenz enthaltener Flächen zweiter Ordnung, so lautet vorstehendes Ergebnis kürzer:

Im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind die ∞^1 längs eines Kongruenzstrahles tangentialen F^2-Büschel paarweise in einer Involution einander zugeordnet, deren Doppelelemente die beiden aus zerfallenen Flächen bestehenden (reellen oder konjugiert imaginären) tangentialen F^2-Büschel bilden.

Ferner folgt nunmehr aus obiger Untersuchung:

Die Flächen jedes längs eines Strahles p einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 tangentialen F^2-Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung sind im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ parabolisch involutorisch gepaart. Die vereinigten Doppelelemente dieser Involution fallen mit der einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung mit der Doppelpunktsgerade p zusammen.

17. Zwei im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 reziprok polare (**16.**), längs eines Kongruenzstrahles p tangentiale F^2-Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ haben ihnen adjungierte parabolische lineare Strahlenkongruenzen. Das Paar vereinigter Leitgeraden jeder der beiden parabolischen Kongruenzen wird von p getragen. Infolgedessen sind alle Elemente des mit diesen beiden reziprok polaren Büscheln verknüpften Büschels $F^2(A_{ig}^2B_{ig}^2C_{ig}^2\ldots)$ beidscharig involutorischer Regelflächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 ausgeartet in je zwei Paare involutorischer Strahlenbüschel erster Ordnung mit dem gemeinsamen Strahle p. Der Büschel $F^2(A_{ig}^2B_{ig}^2C_{ig}^2\ldots)$ besteht also aus längs p einander berührender zerfallenen beidscharig involutorischen Regelflächen zweiter Ordnung von Σ_{ig}. Die eine (zerfallene) Regelschar dieser Flächen liegt einscharig in der $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, die andere in der $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierten linearen Strahlenkongruenz, und die Ebenenpaare der Flächen bilden die in Σ_{ig} enthaltene Ebeneninvolution, die Punktepaare der Flächen die in Σ_{ig} enthaltene Punktinvolution mit dem Träger p.

Jedem längs des Kongruenzstrahles p tangentialen F^2-Büschel aus einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung ist eine parabolische lineare Strahlenkongruenz adjungiert. Sie trägt die dem F^2-Büschel adjungierte sekundäre Involution. Im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 liegen daher ∞^1 sekundär involutorische parabolische lineare Strahlenkongruenzen, deren vereinigte Leitgeraden von p getragen werden. Dabei kann p jeder der ∞^2 Strahlen von C_1^1 sein. Hieraus folgt somit auf Grund des in Nummer **15** dargelegten:

Die im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen sekundären Involutionen werden bzw. von ∞^4 hyperbolischen, ∞^4 elliptischen und ∞^3 parabolischen linearen Strahlenkongruenzen getragen. Die Leitgeradenpaare der Trägerkongruenzen sind bzw. zwei reelle getrennte, zwei konjugiert imaginäre oder zwei reelle vereinigte Strahlen von C_1^1, und die Kongruenzen selbst gehen durch die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v dieser linearen Strahlenkongruenz.

Durch die Kollineationen der geschart involutorischen Räume der in Nummer **15** und hier konstruierten ∞^4 linearen Strahlenkongruenzen wird also die lineare Strahlenkongruenz und jede ihrer beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v in sich übergeführt[14]). Andere gleiches leistende geschart involutorische Kollineationen gibt es nicht.

B. Das polare Γ-Gebüsch der linearen Strahlenkongruenz.

18. Einer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung P^2 ist in dem polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ der Kongruenz der Polar-F^2-Bündel $\pi(F^2)$ zugeordnet (**1.**). Er sendet durch einen gegebenen Strahl s von C_1^1 und durch dessen Polare t für P^2 einen F^2-Büschel[2]). Auf jeder Fläche dieses Büschels liegt ein durch einen gegebenen Punkt X von s gehender mit t inzidenter Strahl. Die Gesamtheit dieser Strahlen bildet einen zum F^2-Büschel perspektiven Strahlenbüschel erster Ordnung. Der Punkt X kann, wenn s die Kongruenz C_1^1 durchläuft, jeder Raumpunkt werden. Somit bilden die Strahlen jedes Punktes, die auf den Flächen des F^2-Bündels $\pi(F^2)$ aber nicht in C_1^1 liegen, einen Strahlenbüschel erster Ordnung und die Gesamtheit dieser Strahlenbüschel einen linearen Strahlenkomplex Γ_{P^2}. Für diesen linearen Komplex sind die für die Fläche zweiter Ordnung P^2 reziprok polaren Strahlen s, t von C_1^1 und ebenso je zwei andere für P^2 reziprok polare Strahlen dieser linearen Kongruenz einander zugeordnet. —

[14]) Jolles, Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen, Math. Zeitschr. **13** (1922), Nr. 25.

Die für P^2 reziprok polaren und für Γ_{P^2} einander zugeordneten Strahlen von C_1^1 sind auf den Flächen des F^2-Bündels $\pi(F^2)$ die Strahlenpaare involutorischer Regelscharen zweiter Ordnung. Die Gesamtheit dieser involutorischen Regelscharen erschöpft die durch P^2 unter den Strahlen von C_1^1 bedingte primäre Involution [15]) und bildet folglich [8]) einen zum F^2-Bündel $\pi(F^2)$ perspektiven Bündel zweiter Art von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung. Da aber $\pi(F^2)$ jeder Bündel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung sein kann, so ist dargetan:

Zu jedem Bündel $\pi(F^2)$ einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung gehört ein linearer Strahlenkomplex Γ_{P^2}, der aus den nicht in C_1^1 enthaltenen Strahlen aller Flächen des F^2-Bündels besteht. Alle für eine (reelle oder imaginäre) einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung P^2 reziprok polaren und für C_1^1 einander zugeordneten Strahlen bilden den zum Polar-F^2-Bündel $\pi(F^2)$ von P^2 gehörigen linearen Komplex Γ_{P^2}. In seinem Nullraume liegt die durch P^2 bedingte primäre Involution unter den Strahlen von C_1^1. Der in ihr enthaltene Bündel zweiter Art von involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung ist perspektiv zum F^2-Bündel $\pi(F^2)$.

Der lineare Strahlenkomplex Γ_{P^2} heiße der einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P^2 „adjungiert", und diese die dem Komplexe Γ_{P^2} „adjungierte" einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung.

Einer Inzidenzfläche P^2 des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ von C_1^1 ist in ihm ihr Inzidenz-F^2-Bündel $\pi(F^2)$ zugeordnet. Seine Flächen gehen (**1.**) durch die Doppelpunktsgerade p der in zwei Paare (reeller oder konjugiert imaginärer) Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenen einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche P^2. Der einer Inzidenzfläche von $\Pi(F^2)$ adjungierte lineare Strahlenkomplex Γ_{P^2} ist sonach speziell. Seine Leitgerade ist p. Sie und jeder andere Strahl von C_1^1 sind je für P^2 reziprok polar und für Γ_{P^2} einander zugeordnet.

19. Ist Γ_{P^2} der einer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P^2 adjungierte lineare Strahlenkomplex, so sind die Strahlen von C_1^1 sowohl für den Komplex Γ_{P^2} paarweise einander zugeordnet (**18.**) wie auch für die Fläche P^2 reziprok polar. Jeder Komplex des von C_1^1 getragenen Γ-Büschels ist folglich für den Komplex Γ_{P^2} nullinvariant. Außerdem geht jeder der ∞^2 linearen Komplexe des Γ_{P^2} mit C_1^1 verbindenden Γ-Bündels, insbesondere Γ_{P^2} selbst, durch die nämliche [16]) (reelle oder imaginäre) Regelschar $\mathfrak{R}^2$ von P^2. D. h.:

---

[15]) Die unter [7]) angeführte Abhandlung, Nr. 2.

[16]) Jolles, Neue Beweise einiger Sätze aus der Theorie der linearen Komplexe, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **130** (1903), Nr. 5.

Jede einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene (reelle oder imaginäre) Fläche zweiter Ordnung P^2 liegt mit der nämlichen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ in der Kongruenz und in dem der Fläche P^2 adjungierten linearen Strahlenkomplexe Γ_{P^2}, und dieser Komplex ist für die Komplexe des von der Kongruenz getragenen Γ-Büschels nullinvariant.

Sobald die im Komplexe Γ_{P^2} gelegene Regelschar $\mathfrak{R}^2$ der einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P^2 sich als imaginär erweist — also P^2 selbst imaginär und C_1^1 elliptisch ist —, ist $\mathfrak{R}^2$ die imaginäre Trägerregelschar des Γ_{P^2} mit C_1^1 verbindenden Γ-Bündels. Die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ besteht dann aus ∞^2 Paaren konjugiert imaginärer Strahlen, und diese sind bzw. die Leitgeradenpaare[17]) der ∞^2 (elliptischen durch $\mathfrak{R}^2$ gehenden) linearen Strahlenkongruenzen im Stammbündel des Γ-Bündels. Die Gesamtheit dieser ∞^2 elliptischen linearen Strahlenkongruenzen ist hiernach der reale Repräsentant der imaginären Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ von C_1^1. Fällt $\mathfrak{R}^2$ nacheinander mit allen ∞^3 imaginären Regelscharen zweiter Ordnung von C_1^1 zusammen, so ergeben sich ebenso deren reale Repräsentanten.

20. Einem Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung ist eine lineare Strahlenkongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ adjungiert (**5.**). Ihre Strahlen sind paarweise für C_1^1 einander zugeordnet und für alle Flächen von $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ reziprok polar. Nun umfaßt der einer einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung adjungierte lineare Strahlenkomplex die paarweise für C_1^1 einander zugeordneten und für die Fläche zweiter Ordnung reziprok polaren Geraden (**18.**). Somit gehen die den Flächen $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ adjungierten linearen Strahlenkomplexe $\Gamma_{M^2}, \Gamma_{N^2}, \Gamma_{O^2}, \ldots$ durch die dem F^2-Büschel adjungierte lineare Strahlenkongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$, und liegen also in dem von ihr getragenen Γ-Büschel $\Gamma(\Gamma_{M^2}\Gamma_{N^2}\Gamma_{O^2}\ldots)$.

Die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 ist für jede einscharig in ihr enthaltene (reelle oder imaginäre) Fläche zweiter Ordnung autopolar. Die Polaren t eines Strahles s von C_1^1 für die Flächen des Büschels $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ bilden folglich eine in C_1^1 enthaltene und zum F^2-Büschel projektive Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$. Ferner ordnen die Komplexe des von der linearen Strahlenkongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ getragenen Γ-Büschels $\Gamma(\Gamma_{M^2}\Gamma_{N^2}\Gamma_{O^2}\ldots)$ dem Strahle s die Strahlen einer zu dem Γ-Büschel projektiven Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}'^2$ zu. Die Polare t des Kongruenzstrahles s für eine Fläche X^2 des Büschels

[17]) Reye, Die Geometrie der Lage, zweite Abt., vierte Aufl., Stuttgart 1907, S. 151.

$F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ ist aber zugleich s zugeordnet (18.) für den der Fläche X adjungierten linearen Strahlenkomplex Γ_{X^2}. Somit ist jeder Strahl der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ zugleich ein Strahl der Regelschar $\mathfrak{R}'^2$, oder die Regelscharen $\mathfrak{R}^2$ und $\mathfrak{R}'^2$ sind identisch, wenn jeder Fläche des F^2-Büschels $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ der ihr adjungierte lineare Komplex aus dem Γ-Büschel $\Gamma(\Gamma_{M^2}\Gamma_{N^2}\Gamma_{O^2}\ldots)$ zugewiesen wird. Zugleich sind dabei der F^2-Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ und der Γ-Büschel $\Gamma(\Gamma_{M^2}\Gamma_{N^2}\Gamma_{O^2}\ldots)$ projektiv aufeinander bezogen, wenn jeder Fläche des F^2-Büschels der ihr adjungierte lineare Komplex entspricht. — Berücksichtigt man endlich, daß die in C_1^1 enthaltenen Regelscharen der Flächen des F^2-Büschels $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ einen zu ihm perspektiven Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung bilden, außerdem jede dieser Regelscharen in dem ihrer Trägerfläche adjungierten linearen Strahlenkomplexe liegt (19.), so gilt:

Beschreibt eine Fläche zweiter Ordnung X^2 einen Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, so beschreibt der X^2 adjungierte lineare Strahlenkomplex Γ_{X^2} um die dem Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ adjungierte lineare Strahlenkongruenz $\mathfrak{N}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ einen zu dem F^2-Büschel projektiven Büschel linearer Strahlenkomplexe $\Gamma(\Gamma_{M^2}\Gamma_{N^2}\Gamma_{O^2}\ldots)$. Der Büschel $\Gamma(\Gamma_{M^2}\Gamma_{N^2}\Gamma_{O^2}\ldots)$ liegt perspektiv zu dem in C_1^1 enthaltenen und von $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ getragenen Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung. Vier in keinem F^2-Bündel gelegene einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltene Flächen zweiter Ordnung haben ihnen bzw. adjungierte in keinem Γ-Bündel gelegene lineare Strahlenkomplexe.

21. Zwei lineare Strahlenkomplexe Γ_{P^2}, Γ_{Q^2}, denen zwei einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene Flächen zweiter Ordnung P^2, Q^2 adjungiert sind, liegen in einem Γ-Büschel, dessen Komplexe einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung adjungiert sind (20.). Wird ein nicht in diesem Γ-Büschel gelegener, einer einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung R^2 adjungierter linearer Strahlenkomplex Γ_{R^2} mit jedem Komplexe des Büschels durch einen Γ-Büschel verbunden, so ist jeder Komplex des von den ∞^1 Γ-Büscheln erfüllten Γ-Bündels wiederum einer einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung adjungiert. Das gleiche gilt, wenn Γ_{S^2} ein außerhalb dieses Bündels gelegener, einer einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung S^2 adjungierter linearer Strahlenkomplex ist, von jedem Komplexe des Γ-Gebüsches, das Γ_{S^2} mit jedem Komplexe des Bündels durch einen Γ-Büschel verbindet. Alle Komplexe dieses Γ-Gebüsches sind für die Komplexe des von C_1^1 getragenen Γ-Büschels nullinvariant (19.). Das Γ-Gebüsch besteht somit aus den für die linearen Komplexe des von C_1^1 getragenen Γ-Büschels nullinvarianten linearen Komplexen. Dieser Γ-Büschel

bildet demnach den zu jenem Γ-Gebüsche gehörigen Stammbüschel [18]). Der zu jedem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung perspektive in C_1^1 gelegene Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung ist aber selbst perspektiv zu je einem Γ-Büschel des gefundenen Γ-Gebüsches (**20.**). Demnach ist das Gebüsch der in C_1^1 enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung perspektiv zu dem Γ-Gebüsche, und das Γ-Gebüsch wiederum projektiv zu dem F^2-Gebüsche einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung.

Bezeichnen wir das Γ-Gebüsch, dessen Komplexe den einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung adjungiert sind, als das dieser linearen Strahlenkongruenz „adjungierte“ Γ-Gebüsch, so lautet unser Ergebnis:

Beschreibt eine einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung das Gebüsch der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung, so beschreibt der ihr adjungierte lineare Strahlenkomplex das C_1^1 adjungierte Γ-Gebüsch. Beide Gebüsche sind zueinander projektiv und perspektiv zum Gebüsche der in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung. Das der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 adjungierte Γ-Gebüsch hat den von C_1^1 getragenen Γ-Büschel zum Stammbüschel. Die allen Komplexen des Γ-Gebüsches gemeinsamen beiden Strahlen sind die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1.

22. Jeder zerfallenen Fläche im Gebüsche einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung entspricht in dem C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsche (**21.**) ein ihr adjungierter spezieller linearer Komplex. Seine Leitgerade fällt in die Doppelpunktsgerade der zerfallenen Fläche (**18.**). Somit ist jeder Strahl von C_1^1 sowohl die Doppelpunktsgerade einer zerfallenen Fläche jenes F^2-Gebüsches wie auch die Leitgerade eines speziellen Komplexes dieses C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsches (**21.**). Die Doppelpunktsgeraden der zerfallenen Flächen jedes F^2-Bündels im Gebüsche einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung bilden (**4.**) aber eine (reelle oder imaginäre) Regelschar zweiter Ordnung. Folglich gilt das gleiche in dem C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsche für die Leitgeraden der speziellen linearen Strahlenkomplexe. Wenn der F^2-Bündel insbesondere aus allen durch einen Kongruenzstrahl gehenden einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung besteht, so zerfällt jene Regelschar zweiter Ordnung in zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) den Strahl enthaltende Büschel erster Ordnung von Kongruenzstrahlen (**1.**).

Ebenso wie jede lineare Strahlenkongruenz ein ihr adjungiertes Γ-Gebüsch bestimmt, bestimmt umgekehrt jedes Γ-Gebüsch eine lineare Strahlenkongruenz, der es adjungiert ist. Diese dem Γ-Gebüsche „adjungierte“ lineare Strahlenkongruenz trägt den Stammbüschel des Γ-Gebüsches.

---

[18]) Das unter [17]) angeführte Werk, S. 148.

Beiläufig bemerkt, wird bekanntlich eine lineare Strahlenkongruenz C durch die Korrelationen der Nullräume aller durch ihre (reellen oder kon jugiert imaginären) Leitgeraden u, v gehenden linearen Strahlenkomplexe in sich übergeführt, dann aber auch durch die Korrelationen der Null räume aller durch C_1^1 gehenden linearen Strahlenkomplexe. Dabei ergib sich ein folgenschwerer Unterschied: die letzteren Nullkorrelationen ver tauschen die Leitgeraden u, v miteinander und lassen die Kongruenz i Ruhe, während die ersteren Nullkorrelationen die Leitgeraden u, v in Ruh lassen und die Strahlen der Kongruenz miteinander vertauschen.

23. Die Komplexe des einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 adjungierte Γ-Gebüsches gehen (**21.**) durch die (reellen oder konjugiert imaginären Leitgeraden u, v von C_1^1, und jeder dieser Komplexe enthält die in C gelegene Regelschar der ihm adjungierten einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung. Somit liegt die im geschart involutorische Raume Σ_{ig} von C_1^1 gelegene involutorische Regelschar einer einscharig in C_1^1 enthaltenen reellen Fläche zweiter Ordnung P^2 zugleich (**19.**) im Null raume des P^2 adjungierten linearen Strahlenkomplexes Γ_{P^2}. Ein lineare Strahlenkomplex ist nun durch jede reelle involutorische Regelschar zweite Ordnung seines Nullraumes bestimmt[19]). Die im geschart involutorische Raume Σ_{ig} gelegene involutorische Regelschar jeder einscharig in C_1^1 ent haltenen reellen Fläche zweiter Ordnung bestimmt also zugleich den diese Fläche adjungierten linearen Strahlenkomplex und seine einfache Kon struktion.

Eine andere Konstruktion des zu einer einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Orduung P^2 gehörigen ihr adjungierten linearen Strahlen komplexes Γ_{P^2} liefert folgende Erwägung:

Je zwei für eine in C_1^1 enthaltene (reelle oder imaginäre) Fläch zweiter Ordnung P^2 reziprok polare Strahlen dieser Kongruenz bilden zu gleich ein Paar einander zugeordneter Strahlen (**18.**) in dem Nullraum des P^2 adjungierten linearen Komplexes Γ_{P^2}. Bilden die Elemente zweie solchen Strahlenpaare vier windschiefe Strahlen von C_1^1, so werden die zwe Strahlenpaare demnach durch eine sowohl im polaren Raume von P^2 wi im Nullraume von Γ_{P^2} gelegene involutorische Regelschar zweiter Ordnun verbunden. Durch eine im Nullraume von Γ_{P^2} gelegene involutorisch Regelschar zweiter Ordnung ist aber diese und Γ_{P^2} bestimmt.

Letztere Ableitung des Komplexes Γ_{P^2} und seine sich aus ihr ergebend Konstruktion ist umständlicher, als die zuerst gegebene. Sie ist aber in Gegensatze zu dieser unabhängig davon, ob für P^2 eine reelle oder imag

---

[19]) Chasles, Propriétés nouvelles de l'Hyperboloide à une nappe, Journ. de Math. (1839), S. 348.

näre einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung vorliegt. Da endlich der jeder einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung P^2 adjungierte lineare Strahlenkomplex speziell ist (18.) und die Doppelpunktsgerade dieser Fläche zur Leitlinie hat, so sind wir nunmehr imstande, die allen einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung P^2 bzw. adjungierten linearen Komplexe Γ_{P^2} einfach zu konstruieren.

24. Γ_{X^2} sei der einer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen reellen oder imaginären Fläche zweiter Ordnung X^2 adjungierte lineare Strahlenkomplex. Ist dann die einscharig in C_1^1 enthaltene reelle Fläche zweiter Ordnung P^2 die Polfläche eines durch X^2 gehenden F^2-Bündels $\pi(F^2)$ im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1, so geht (18.) der Komplex Γ_{X^2} durch die nicht in C_1^1 enthaltene Regelschar $\mathfrak{L}^2$ von P^2. Die Strahlen von $\mathfrak{L}^2$ sind aber für den P^2 adjungierten linearen Komplex Γ_{P^2} paarweise einander zugeordnet (19.). Somit sind die linearen Komplexe Γ_{P^2} und Γ_{X^2} füreinander nullinvariant. Von zwei im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ konjugierten Flächen zweiter Ordnung ist aber mindestens eine reell (4.). Folglich ist bewiesen:

Die im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 zwei konjugierten Flächen zweiter Ordnung bzw. adjungierten linearen Strahlenkomplexe sind füreinander nullinvariant.

Zwei konjugierte Flächen zweiter Ordnung von $\Pi(F^2)$ sind nichts anderes als zwei füreinander autopolare einscharig in C_1^1 enthaltene Flächen zweiter Ordnung (3.). Also kann der vorstehende Lehrsatz auch so ausgesprochen werden:

Je zwei füreinander autopolare einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltene Flächen zweiter Ordnung haben zwei füreinander nullinvariante ihnen adjungierte lineare Strahlenkomplexe.

25. Zum Gebüsche der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung ist das Gebüsch der in C_1^1 enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung perspektiv und zu diesem das C_1^1 adjungierte Γ-Gebüsch (21.). Demnach ist zum polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ der einscharig in C_1^1 enthaltenen Regelflächen zweiter Ordnung ein polares $\mathfrak{R}^2$-Gebüsch $\Pi(\mathfrak{R}^2_{F^2})$ der in C_1^1 enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung perspektiv und zu diesem das polare Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma_{F^2})$ der jenen Regelflächen zweiter Ordnung adjungierten linearen Strahlenkomplexe. In den zum polaren $\mathfrak{R}^2$-Gebüsche $\Pi(\mathfrak{R}^2_{F^2})$ perspektiven und sonach zueinander projektiven polaren Gebüschen $\Pi(F^2)$, $\Pi(\Gamma_{F^2})$ entspricht jeder Fläche zweiter Ordnung P^2 des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ der ihr adjungierte Strahlenkomplex Γ_{P^2} des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma_{F^2})$ und dem der Fläche P^2 in $\Pi(F^2)$ zugeordneten Polar-F^2-Bündel $\pi(F^2)$ der dem Komplex Γ_{P^2} in

$\Pi(\Gamma_{F^2})$ zugeordnete Polar-Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{F^2})$. Nach Nummer 24 ist abes der lineare Komplex Γ_{P^2} für jeden linearen Komplex des ihm in $\Pi(\Gamma_{F^2}$ zugeordneten Polar-Γ-Bündels $\pi(\Gamma_{F^2})$ nullinvariant. Sonach folgt:

Die Korrelation des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 zieht in dem C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2}$ ebenfalls eine polare Korrelation nach sich. Und diese polare Korrelation ordnet in diesem Γ-Gebüsche jedem Komplexe Γ_{P^2} den Bündel für ihr nullinvarianter Komplexe als Polar-Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{F^2})$ zu.

Das polare Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma_{F^2})$, zu dem man gelangt, sobald in dem C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsche jedem Komplexe Γ_{P^2} der Bündel $\pi(\Gamma_{F^2})$ für ihn nullinvarianter Komplexe zugeordnet wird, heiße das „polare Γ-Gebüsch" von C_1^1. In diesem heiße Γ_{P^2} der „Polkomplex" des Bündels $\pi(\Gamma_{F^2})$ und jedes Paar füreinander nullinvarianter Komplexe ein Paar „konjugierter" Komplexe.

26. Das polare F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist zum polaren $\mathfrak{R}^2$-Gebüsche $\Pi(\mathfrak{R}^2_{F^2})$ der in C_1^1 enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung perspektiv (**21.**), und dieses wiederum zum polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$. Demnach sind die für das polare F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$ ermittelten projektiven Beziehungen auf das polare Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma_{F^2})$ übertragbar. So hat das polare Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma_{F^2})$ u. a. ∞^2 reelle polare Γ-Bündel, deren Polkomplexe bzw. mit ihnen inzident sind. Sie sind die „Inzidenz-Γ-Bündel", ihre Polkomplexe die „Inzidenzkomplexe" von $\Pi(\Gamma_{F^2})$. Die Inzidenzkomplexe selbst sind die speziellen Komplexe des C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsches. Die lineare Kongruenz C_1^1, als Ort der Leitgeraden aller Inzidenzkomplexe von $\Pi(\Gamma_{F^2})$, heiße die „Inzidenzkongruenz" dieses polaren Γ-Gebüsches. Sie ist nunmehr sowohl als Inzidenzkongruenz (**1.**) des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ wie auch des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma_{F^2})$ aufzufassen.

Jeder Γ-Bündel des der linearen Kongruenz C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsches wird durch die Korrelation des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma_{F^2})$ zu einem polaren Γ-Bündel, in dem jeder Komplex der Polkomplex eines Γ-Büschels ist. Nur die speziellen Komplexe des Γ-Bündels liegen in ihren „Polar-Γ-Büscheln". Sie sind die „Inzidenzkomplexe" und ihre Polar-Γ-Büschel die „Inzidenz-Γ-Büschel" des polaren Γ-Bündels. Die Leitgeraden der Inzidenzkomplexe eines polaren Γ-Bündels von $\Pi(\Gamma_{F^2})$ bilden eine Regelschar zweiter Ordnung (**21.**), die in der Inzidenzkongruenz C_1^1 enthaltene „Inzidenzregelschar" des polaren Γ-Bündels. Sie zerfällt in jedem Inzidenz-Γ-Bündel in zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel erster Ordnung, die einander in einem Kongruenzstrahle, der Doppelpunktsgerade des dem Inzidenz-Γ-Bündel zugeordneten Inzidenzkomplexes schneiden.

Die Korrelation des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma_{F^2})$ paart die Komplexe jedes Γ-Büschels in dem C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsche involutorisch. Je zwei einander zugeordnete Komplexe eines solchen involutorischen Γ-Büschels sind füreinander nullinvariant, also konjugiert (25.). Ein im polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$ enthaltener hyperbolisch involutorischer Γ-Büschel hat zu Doppelelementen seine beiden speziellen Komplexe. Liegen in einem Γ-Büschel des C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsches zwei spezielle Komplexe, so sind in ihm je zwei durch diese speziellen Komplexe harmonisch getrennte Komplexe füreinander nullinvariant.

Ein Komplexquadrupel im polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$ heiße ein „Polar-Γ-Tetraeder" von $\Pi(\Gamma_{F^2})$ und jeder seiner Komplexe ein „Eckkomplex" dieses Polar-Γ-Tetraeders, sobald je zwei Komplexe des Quadrupels in $\Pi(\Gamma_{F^2})$ konjugiert sind. Jeder der vier Eckkomplexe eines Polar-Γ-Tetraeders ist der Polkomplex des die drei anderen verbindenden Γ-Bündels. Ein Polar-F^2-Tetraeder (3.) des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ von C_1^1 wird zu einem Polar-Γ-Tetraeder des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma_{F^2})$, sobald jede seiner Eckflächen durch den ihr adjungierten linearen Komplex ersetzt wird.

27. Je (5.) zwei reziprok polaren F^2-Büscheln $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 entsprechen (26.) zwei „reziprok polare" Γ-Büschel $\Gamma(\Gamma_{M^2}\Gamma_{N^2}\Gamma_{O^2}\ldots)$, $\Gamma(\Gamma_{R^2}\Gamma_{S^2}\Gamma_{T^2}\ldots)$ in dem zu $\Pi(F^2)$ projektiven polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$ von C_1^1. Den wechselweise konjugierten Flächen beider F^2-Büschel entsprechen dabei die wechselweise konjugierten Komplexe beider Γ-Büschel. In dem polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$ konjugierte Komplexe sind aber füreinander nullinvariant (25.), also ist in anderen Worten bewiesen:

Bei jedem Paare reziprok polarer Γ-Büschel im polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind die Komplexe beider Γ-Büschel wechselweise füreinander nullinvariant.

In dem polaren Γ-Gebüsche einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz enthalten zwei reziprok polare Γ-Büschel entweder zugleich zwei reelle oder zwei konjugiert imaginäre spezielle Komplexe. Dagegen liegt in dem polaren Γ-Gebüsche einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz in dem einen von zwei reziprok polaren Γ-Büscheln ein Paar reeller, in dem andern ein Paar konjugiert imaginärer speziellen Komplexe (8.).

28. Die im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen involutorischen Regelscharen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung bestimmen (23.) die Komplexe des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma_{F^2})$ von C_1^1. Welche linearen Strahlenkomplexe bestimmen aber die involutorischen Regelscharen der beidscharig in Σ_{ig} enthaltenen involutorischen Regelflächen zweiter Ordnung?

Durch die involutorischen Regelscharen $\mathfrak{R}^2_{ig}$, $\mathfrak{L}^2_{ig}$ einer beidscharig involutorischen Fläche zweiter Ordnung im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} gehen die jene involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung bzw. enthaltenden Nullräume[19]) zweier linearen Strahlenkomplexe $\Gamma_{\mathfrak{R}^2}$, $\Gamma_{\mathfrak{L}^2}$. Im linearen Komplexe $\Gamma_{\mathfrak{R}^2}$ liegen also die mit den Strahlenpaaren der involutorischen Regelschar $\mathfrak{R}^2_{ig}$, im linearen Komplexe $\Gamma_{\mathfrak{L}^2}$ die mit den Strahlenpaaren der involutorischen Regelschar $\mathfrak{L}^2_{ig}$ inzidenten Strahlen. Nun fällt der Verbindungsstrahl jedes Paares einander zugeordneter Punkte unserer beidscharig involutorischen Fläche zweiter Ordnung von Σ_{ig} mit einem Strahle von C^1_1 und zugleich mit einem gemeinsamen Strahle von $\Gamma_{\mathfrak{R}^2}$ und $\Gamma_{\mathfrak{L}^2}$ zusammen. Somit haben diese zwei linearen Komplexe ∞^2 Strahlen von C^1_1 gemein und schneiden demnach einander in dieser linearen Kongruenz. Da die Strahlen der in $\Gamma_{\mathfrak{R}^2}$ enthaltenen Regelschar $\mathfrak{L}^2$ im Nullraume von $\Gamma_{\mathfrak{L}^2}$ (und ebenso die Strahlen der in $\Gamma_{\mathfrak{L}^2}$ enthaltenen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ im Nullraume von $\Gamma_{\mathfrak{R}^2}$) paarweise einander zugeordnet sind, so sind die beiden linearen Komplexe außerdem füreinander nullinvariant. D. h.:

Jede der beiden involutorischen Regelscharen einer beidscharig involutorischen Fläche zweiter Ordnung in dem geschart involutorischen Raume Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C^1_1 liegt in dem Nullraume eines andern durch C^1_1 gehenden linearen Strahlenkomplexes. Diese zwei Komplexe sind füreinander nullinvariant.

Zusammengefaßt sagt dies Ergebnis nichts anderes aus als:

Aus einer linearen Strahlenkongruenz C^1_1 wird das Paar involutorischer Regelscharen jeder beidscharig involutorischen Fläche zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C^1_1 durch ein Paar füreinander nullinvarianter linearen Komplexe projiziert.

Wird bedacht, daß der geschart involutorische Raum Σ_{ig} der linearen Strahlenkongruenz ∞^5 beidscharig involutorische Flächen zweiter Ordnung enthält[6]), so läßt sich aus obiger Darlegung noch folgendes herauslesen:

Die im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C^1_1 auf den ∞^5 beidscharig involutorischen Flächen zweiter Ordnung gelegenen involutorischen Regelscharen bestimmen nur ∞^1 diese involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung bzw. enthaltende Nullräume. Die linearen Strahlenkomplexe der ∞^1 Nullräume bilden den von C^1_1 getragenen Γ-Büschel. In ihm sind zwei Komplexe füreinander nullinvariant, sobald die ihre Nullräume bzw. bestimmenden involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung auf derselben beidscharig involutorischen Fläche zweiter Ordnung von Σ_{ig} liegen.

Wie die Paare involutorischer Regelscharen auf den beidscharig involutorischen Flächen zweiter Ordnung von Σ_{ig} sich auf die durch sie

bestimmten von C_1^1 getragenen Paare füreinander nullinvarianter linearen Komplexe verteilen, ist aus der nächsten Nummer zu ersehen.

29. Jeder Komplex aus dem Stammbüschel des einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsches (**21.**) ist nullinvariant für alle Komplexe dieses Γ-Gebüsches, also auch insbesondere für die Komplexe zweier reziprok polaren Γ-Büschel (**27.**) des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma_{F^2})$ von C_1^1. Folglich bilden zwei reziprok polare Γ-Büschel $\Gamma(\Gamma_{M^2}\Gamma_{N^2}\Gamma_{O^2}\ldots)$, $\Gamma(\Gamma_{R^2}\Gamma_{S^2}\Gamma_{T^2}\ldots)$ des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma_{F^2})$ und der von C_1^1 getragene Γ-Büschel ein Tripel von Γ-Büscheln, in dem die Komplexe jedes der drei Γ-Büschel für jeden Komplex der übrigen beiden Γ-Büschel nullinvariant sind. Die Trägerkongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$, $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ der (**20.**) beiden Büschel $\Gamma(\Gamma_{M^2}\Gamma_{N^2}\Gamma_{O^2}\ldots)$, $\Gamma(\Gamma_{R^2}\Gamma_{S^2}\Gamma_{T^2}\ldots)$ bilden dabei mit C_1^1 ein Tripel von linearen Strahlenkongruenzen, in dem jeder der drei Kongruenzen (**21.**) das durch die übrigen beiden Kongruenzen gehende Γ-Gebüsch adjungiert ist. Das der linearen Strahlenkongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ adjungierte Γ-Gebüsch verbindet hiernach den von C_1^1 getragenen Γ-Büschel mit dem Γ-Büschel $\Gamma(\Gamma_{R^2}\Gamma_{S^2}\Gamma_{T^2}\ldots)$, das der linearen Strahlenkongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierte den von C_1^1 getragenen Γ-Büschel mit dem Γ-Büschel $\Gamma(\Gamma_{M^2}\Gamma_{N^2}\Gamma_{O^2}\ldots)$.

Den Komplexen der reziprok polaren Γ-Büschel $\Gamma(\Gamma_{M^2}\Gamma_{N^2}\Gamma_{O^2}\ldots)$, $\Gamma(\Gamma_{R^2}\Gamma_{S^2}\Gamma_{T^2}\ldots)$ des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma_{F^2})$ sind bzw. die Flächen der reziprok polaren F^2-Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ adjungiert (**27.**). Mit diesen beiden reziprok polaren F^2-Büscheln ist (**9.**) ein Büschel $F^2(A_{ig}^2B_{ig}^2C_{ig}^2\ldots)$ beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 verknüpft. Seine Flächen sind einscharig sowohl in der Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ wie auch in der Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ enthalten. Als Büschel einscharig in der Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ enthaltener Flächen zweiter Ordnung entspricht dem Büschel $F^2(A_{ig}^2B_{ig}^2C_{ig}^2\ldots)$ in dem der Kongruenz adjungierten Γ-Gebüsche ein zu ihm projektiver Γ-Büschel. Und da die Strahlen von C_1^1 paarweise gemeinsame reziproke Polaren für die Flächen von $F^2(A_{ig}^2B_{ig}^2C_{ig}^2\ldots)$ sind, so ist diese lineare Kongruenz der Träger des Γ-Büschels. Ein gleiches gilt vom Büschel $F^2(A_{ig}^2B_{ig}^2C_{ig}^2\ldots)$ als Büschel einscharig in der Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ enthaltener Flächen zweiter Ordnung. Im ersteren Falle jedoch ist der Γ-Büschel zu dem in der Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ durch den F^2-Büschel $F^2(A_{ig}^2B_{ig}^2C_{ig}^2\ldots)$ ausgeschnittenen Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung perspektiv, im letzteren Falle zu dem durch denselben F^2-Büschel aus der Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ ausgeschnittenen (**28.**).

Die in den linearen Kongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$, $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ enthaltenen zum F^2-Büschel $F^2(A_{ig}^2B_{ig}^2C_{ig}^2\ldots)$ perspektiven Büschel von

Regelscharen zweiter Ordnung sind durch ihn projektiv aufeinander bezogen. Einander entsprechende Regelscharen liegen auf den nämlichen Flächen des F^2-Büschels und werden aus C_1^1 durch füreinander nullinvariante lineare Strahlenkomplexe projiziert (28.). Die beiden die zwei projektiven Büschel von Regelscharen aus C_1^1 projizierenden projektiven Γ-Büschel liegen hiernach in Involution.

Der F^2-Büschel $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ kann jeder Büschel beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 sein, dessen Basiskurve ein Vierseit dieser Kongruenz ist. Das Vierseit darf reell sein oder konjugiert imaginäre Seiten haben (12.). Demnach schließen wir:

Aus einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 werden die Regelscharenpaare auf den Flächen jedes F^2-Büschels, dessen Flächen beidscharig involutorisch im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 liegen und dessen Basiskurve ein Vierseit von C_1^1 ist, durch die Elementenpaare ein und desselben involutorischen Γ-Büschels projiziert. Diese Elementenpaare bestehen je aus zwei durch C_1^1 gehenden füreinander nullinvarianten linearen Komplexen und projizieren noch je die Regelscharenpaare einer zweiten Fläche des F^2-Büschels. Jedes durch ein solches Paar füreinander nullinvarianter Komplexe projiziertes Flächenpaar des F^2-Büschels besteht aus zwei füreinander autopolaren Flächen.

Der von der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 getragene involutorische Büschel füreinander nullinvarianter linearen Strahlenkomplexe ist mit C_1^1 zusammen hyperbolisch oder elliptisch. Seine beiden Doppelelemente sind die beiden (reellen oder konjugiert imaginären) durch C_1^1 gehenden speziellen linearen Komplexe.

Die beidscharig involutorischen Flächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 lassen sich in ∞^4 F^2-Büschel zusammenfassen, deren Basiskurven in die Vierseite von C_1^1 zerfallen[20]). Jeder solcher F^2-Büschel enthält ein Paar (reeller oder konjugiert imaginärer) Flächen, das zwei seiner Regelscharen in den einen von zwei durch C_1^1 gehenden füreinander nullinvarianten linearen Komplexen sendet, und die beiden übrigen in den andern.

Jedes Paar durch eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 gehender füreinander nullinvarianten linearen Strahlenkomplexe projiziert also die Regelscharenpaare von ∞^4 beidscharig involutorischen Flächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} der Kongruenz. Und diese ∞^4 Flächen sind paarweise füreinander autopolar.

---

[20]) Die unter [6]) angeführte Abhandlung, Nr. 12—14.

Ein durch C_1^1 gehender linearer Komplex, der den Träger der einen involutorischen Regelschar einer beidscharig involutorischen Fläche des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 enthält, sendet seinen Nullraum durch die andere involutorische Regelschar der Fläche (28.). Sonach sagt der vorstehende Satz u. a. noch folgendes aus:

Der Nullraum eines jeden von zwei füreinander nullinvarianten linearen Strahlenkomplexen, die von einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 getragen werden, enthält ∞^4 involutorische Regelscharen zweiter Ordnung aus dem geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1. Jede dieser ∞^4 involutorischen Regelscharen aus einem der beiden Nullräume liegt mit einer der ∞^4 involutorischen Regelscharen aus dem andern auf einer beidscharig involutorischen Fläche zweiter Ordnung von Σ_{ig}. Und zwar sendet jeder der ∞^4 Büschel beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung von Σ_{ig}, dessen Basiskurve ein Vierseit von C_1^1 ist, eine Fläche zum Ausschnitte eines solchen Paares in beide Nullräume.

30. Im polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist der Inzidenzkomplex Γ_{P^2} eines Inzidenz-Γ-Bündels $\pi(\Gamma_{F^2})$ ein in $\pi(\Gamma_{F^2})$ enthaltener (26.), für alle Komplexe dieses Γ-Bündels nullinvarianter spezieller Komplex (25.). Die Leitgerade p des speziellen Komplexes Γ_{P^2} liegt somit in allen Komplexen des Γ-Bündels $\pi(\Gamma_{F^2})$. Dem Inzidenzkomplexe Γ_{P^2} ist eine Inzidenzfläche P^2 des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ von C_1^1 adjungiert (18.) und jedem Komplexe des Inzidenz-Γ-Bündels $\pi(\Gamma_{F^2})$ von Γ_{P^2} eine Fläche des Inzidenz-F^2-Bündels $\pi(F^2)$ von P^2.

Wie in Nummer 26 aus den projektiven Eigenschaften des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ die des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma_{F^2})$ folgen, so folgen nunmehr aus den projektiven Eigenschaften des polaren Inzidenz-F^2-Bündels $\pi(F^2)$ die des polaren Inzidenz-Γ-Bündels $\pi(\Gamma_{F^2})$. Die ∞^2 durch die Leitgerade p des Inzidenzkomplexes Γ_{P^2} gehenden linearen Komplexe des C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsches lassen sich demnach in ∞^1 Γ-Büschel mit parabolischen Trägerkongruenzen ordnen. Jedes Paar vereinigter Leitgeraden einer solchen parabolischen linearen Kongruenz fällt mit der Leitgerade p des Inzidenzkomplexes Γ_{P^2} zusammen. Die Komplexe dieser ∞^1 parabolischen Γ-Büschel sind im Inzidenz-Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{F^2})$ parabolisch involutorisch gepaart, und die Doppelelemente jeder dieser ∞^1 parabolischen Involutionen sind je mit dem Inzidenzkomplexe Γ_{P^2} vereinigt. In dem polaren Inzidenz-Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{F^2})$ ist jeder parabolisch involutorische Γ-Büschel zu einem zweiten solchen Γ-Büschel polar. Diese ∞^1 Paare parabolisch involutorischer Γ-Büschel bilden eine Involution. Sie hat zu (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelelementen die beiden im Inzidenz-Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{F^2})$ enthaltenen Büschel spezieller linearen Komplexe (26.). Aus den Leitgeraden der diese beiden Γ-Büschel erschöpfenden speziellen

Komplexe bestehen die beiden in der Leitgerade p des Inzidenzkomplexes Γ_{P^2} einander schneidenden (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlenbüschel erster Ordnung von C_1^1.

Wir bezeichnen die ∞^1 parabolischen Γ-Büschel in einem Inzidenz-Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{F^2})$ aus dem polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$ von C_1^1, da jeder von ihnen zwei mit der Leitgerade p des Inzidenzkomplexes Γ_{P^2} von $\pi(\Gamma_{F^2})$ vereinigte Leitgeraden hat, und p jeder Strahl von C_1^1 sein kann, als die längs des Strahles p von C_1^1 „tangentialen" Γ-Büschel in dem der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsche. Und da jedes Γ-Gebüsch der Trägerkongruenz seines Stammbüschels (**22.**) adjungiert ist, so zerfallen hiernach die Γ-Büschel eines Γ-Gebüsches außer in ∞^4 hyperbolische und ∞^4 elliptische noch in ∞^3 parabolische. Die ∞^3 parabolischen Γ-Büschel lassen sich dabei noch in ∞^2 Systeme von Γ-Büscheln zusammenfassen, von denen jeder aus den ∞^1 tangentialen Γ-Büscheln längs eines Strahles der Trägerkongruenz besteht.

31. In dem polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind die Komplexe des Polar-Γ-Bündels $\pi(\Gamma_{F^2})$ eines Komplexes Γ_{P^2} sowohl für die Komplexe des von C_1^1 getragenen Γ-Büschels (**21.**) wie auch für Γ_{P^2} nullinvariant (**25.**). Somit ist der Polar-Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{F^2})$ von Γ_{P^2} der Stammbündel[7]) des Γ_{P^2} mit C_1^1 verbindenden Γ-Bündels. Der Träger dieses Stammbündels ist (**19.**) die aus paarweise einander zugeordneten Geraden des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 bestehende (reelle oder imaginäre) Regelschar $\mathfrak{L}^2$ der Γ_{P^2} adjungierten, einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P^2. Die Strahlen der in C_1^1 enthaltenen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ auf dieser Fläche sind also paarweise die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden der im Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{F^2})$ enthaltenen linearen Strahlenkongruenzen. Kurz:

Hat im polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 der Komplex Γ_{P^2} den Polar-Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{F^2})$, so haben die linearen Strahlenkongruenzen dieses Γ-Bündels die Strahlenpaare der in C_1^1 enthaltenen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ auf der dem Komplexe Γ_{P^2} adjungierten, einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P^2 zu Leitgeraden, gleichgültig ob P^2 reell oder imaginär ist.

Sowie die Fläche P^2 nunmehr nacheinander mit allen einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung zusammenfällt, ergeben sich auf diese Weise alle (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlenpaare dieser linearen Kongruenz als die Leitgeradenpaare der linearen Strahlenkongruenzen in dem ihr adjungierten Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$. In dem einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$ sind somit die elliptischen linearen Strahlenkongruenzen die realen Repräsentanten der in C_1^1 gelegenen ∞^4 Paare konjugiert imagi-

närer Strahlen. In einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz enthält jede der ∞^3 Regelscharen zweiter Ordnung außer ∞^1 reellen Strahlen ∞^2 konjugiert imaginäre. In einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz dagegen liegen außer ∞^3 solchen Regelscharen zweiter Ordnung noch ∞^3 imaginäre. Sie bestehen je aus ∞^2 konjugiert imaginären Strahlen.

Die soeben abgeleitete reale Darstellung der konjugiert imaginären Strahlen einer linearen Strahlenkongruenz ist unabhängig davon, ob eine hyperbolische oder elliptische Kongruenz vorliegt. Schon aus diesem Grunde wird sie der in Nummer **15** gegebenen vorzuziehen sein.

32. Der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung P^2 sei der lineare Komplex Γ_{P^2} adjungiert, und dieser habe im polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{P^2})$ von C_1^1 den Polar-Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{P^2})$. Dann verbindet (**31.**) der Stammbündel $\pi_S(\Gamma_{P^2})$ vom Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{P^2})$ den Komplex Γ_{P^2} mit der Kongruenz C_1^1. Die Trägerregelschar des Stammbündels $\pi_S(\Gamma_{P^2})$ ist die (reelle oder imaginäre) in C_1^1 enthaltene Regelschar $\mathfrak{R}^2$ von P^2. — Für die Fläche P^2 sind alle Komplexe des Γ-Bündels $\pi_S(\Gamma_{P^2})$ autopolar. Und da dieser Γ-Bündel durch Γ_{P^2} und C_1^1 geht, so schneidet der lineare Komplex Γ_{P^2} jeden linearen Komplex des von C_1^1 getragenen Γ-Büschels in einer für die Fläche P^2 autopolaren linearen Strahlenkongruenz. Je zwei für P^2 reziprok polare Strahlen des linearen Komplexes Γ_{P^2} sind aber (**18.**) zugleich einander zugeordnete Strahlen im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1. Somit folgt:

Die ∞^1 linearen Strahlenkongruenzen, in denen die Komplexe des von einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 getragenen Γ-Büschels von dem linearen Komplexe Γ_{P^2} geschnitten werden, der einer einscharig in C_1^1 enthaltenen (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung P^2 adjungiert ist, gehen durch die in C_1^1 gelegene (reelle oder imaginäre) Regelschar $\mathfrak{R}^2$ von P^2. Jede der Kongruenzen besteht dabei aus ∞^2 für die Fläche P^2 reziprok polaren und zugleich im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 einander zugeordneten Strahlen.

Ich nenne die Gesamtheit der ∞^1 linearen Strahlenkongruenzen, in denen die ∞^1 Komplexe eines Γ-Büschels von einem nicht in ihm gelegenen linearen Strahlenkomplexe geschnitten werden, einen „Büschel linearer Strahlenkongruenzen“. Der Schnittkomplex selbst heiße der „Trägerkomplex“ und die (reelle oder imaginäre) Trägerregelschar des den Trägerkomplex mit dem Γ-Büschel verbindenden Γ-Bündels die „Trägerregelschar“ des Kongruenzenbüschels. Fällt der Trägerkomplex des Büschels linearer Kongruenzen mit dem linearen Komplexe zusammen, der einer einscharig in der Trägerkongruenz des Γ-Büschels enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P^2 adjungiert ist, so heiße der Kongruenzenbüschel der Fläche P^2

„assoziiert“. Unser soeben abgeleiteter Lehrsatz lautet mit Rücksicht hierauf also:

Ist ein Büschel linearer Strahlenkongruenzen einer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung P^2 assoziiert, so hat er zur Trägerregelschar die in C_1^1 gelegene (reelle oder imaginäre) Regelschar $\mathfrak{R}^2$ von P^2. Jede Kongruenz eines solchen Büschels wird sowohl durch die Korrelation des polaren Raumes von P^2 wie auch durch die Kollineation des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 in sich übergeführt. Dabei bleiben aber je zwei in dem polaren Raume einander zugeordnete Strahlen der Kongruenzen auch im geschart involutorischen Raume einander zugeordnet.

33. Die (reelle oder imaginäre) Trägerregelschar $\mathfrak{T}^2$ eines Büschels linearer Strahlenkongruenzen liegt, auch wenn sie zerfällt, in allen seinen Kongruenzen. Ihre Leitschar enthält folglich deren (reelle oder konjugiert imaginäre) Leitgeradenpaare. Sie ist mit $\mathfrak{T}^2$ zugleich reell oder imaginär. Nun geht durch jeden nicht in der Trägerregelschar $\mathfrak{T}^2$ gelegenen Strahl des Trägerkomplexes eines Büschels linearer Kongruenzen eine von ihnen. Und die Strahlen jedes Strahlenbüschels erster Ordnung des Trägerkomplexes schneiden die Leitschar der Trägerregelschar $\mathfrak{T}^2$ in den Strahlenpaaren einer im Nullraume dieses Komplexes enthaltenen Strahleninvolution. Es ergibt sich somit:

Die (reellen bzw. konjugiert imaginären) Leitgeradenpaare der Kongruenzen eines Büschels linearer Strahlenkongruenzen bilden auf der Leitschar seiner Trägerregelschar die Strahlenpaare einer im Nullraume seines Trägerkomplexes gelegenen Strahleninvolution.

Jetzt schneide der einer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung P^2 adjungierte lineare Komplex Γ_{P^2} die durch C_1^1 gehenden linearen Komplexe in den Kongruenzen des der Fläche P^2 assoziierten Büschels linearer Strahlenkongruenzen (**32.**). Der Komplex Γ_{P^2} hat aber im polaren Γ-Gebüsche $\Pi(\Gamma_{F^2})$ von C_1^1 den Polar-Γ-Bündel $\pi(\Gamma_{F^2})$, und diesen trägt die nicht in C_1^1 enthaltene (reelle oder imaginäre) Regelschar $\mathfrak{L}^2$ der Fläche P^2. Folglich trägt die in C_1^1 enthaltene (reelle oder imaginäre) Regelschar $\mathfrak{R}^2$ von P^2, d. h. die Trägerregelschar des P^2 assoziierten Büschels linearer Strahlenkongruenzen, auch den Stammbündel $\pi_S(\Gamma_{F^2})$ des Γ-Bündels $\pi(\Gamma_{F^2})$. Auf der Regelschar $\mathfrak{L}^2$ der Fläche P^2 liegt im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 dieselbe Strahleninvolution (**19.**) wie im Nullraume des linearen Komplexes Γ_{P^2}. Die Strahlenpaare dieser involutorischen Regelschar sind nach dem am Anfange dieser Nummer bewiesenen Satze die (reellen bzw. konjugiert imaginären) Leitgeradenpaare der Kongruenzen des der Fläche P^2 assoziierten Büschels linearer Strahlenkongruenzen. Demnach gilt:

Bei einer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung P^2 fallen die Leitgeradenpaare der Kongruenzen aus dem ihr assoziierten Büschel linearer Strahlenkongruenzen auf die (reellen bzw. konjugiert imaginären) Strahlenpaare derjenigen Strahleninvolution, die im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} auf der Leitschar $\mathfrak{L}^2$ der in C_1^1 enthaltenen (reellen oder imaginären) Regelschar $\mathfrak{R}^2$ von P^2 liegt.

Während ein Strahl des einer einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P^2 adjungierten linearen Komplexes Γ_{P^2} einen Strahlenbüschel erster Ordnung von Γ_{P^2} durchläuft, durchläuft die den Strahl enthaltende Kongruenz des P^2 assoziierten Büschels linearer Strahlenkongruenzen alle Kongruenzen des Büschels. Diese linearen Strahlenkongruenzen sind hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, je nachdem die Strahlen des Komplexstrahlenbüschels die Leitschar $\mathfrak{L}^2$ von $\mathfrak{R}^2$ in zwei reellen getrennten oder in zwei reellen vereinigten oder in zwei konjugiert imaginären Strahlen schneiden. Bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 umfaßt der einer einscharig in ihr enthaltenen nicht zerfallenen Fläche zweiter Ordnung assoziierte Büschel linearer Strahlenkongruenzen hiernach außer ∞^1 reellen hyperbolischen oder elliptischen auch zwei reelle parabolische lineare Kongruenzen, deren vereinigte Leitgeraden bzw. mit den beiden Leitgeraden u, v von H_1^1 zusammenfallen. Bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 dagegen umfaßt der einer einscharig in ihr enthaltenen nicht zerfallenen Fläche zweiter Ordnung assoziierte Büschel linearer Strahlenkongruenzen außer ∞^1 elliptischen keine weiteren reellen linearen Kongruenzen.

34. Die ∞^3 in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 einscharig enthaltenen (reellen oder imaginären) Flächen zweiter Ordnung haben (**32.**) ∞^3 bzw. ihnen assoziierte Büschel linearer Strahlenkongruenzen. Diese Büschel bestehen aus den ∞^4 linearen Kongruenzen, deren Leitgeradenpaare zwei reelle getrennte oder vereinigte oder zwei konjugiert imaginäre im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 einander zugeordnete Strahlen sind. Jede dieser linearen Kongruenzen ist in Nummer **33** unabhängig von der Realität ihrer beiden Leitgeraden konstruiert worden. Besonders wichtig erweist sich dies für die unter ihnen vorhandenen ∞^4 elliptischen linearen Kongruenzen, weil dadurch die reale Darstellung der ∞^4 Paare konjugiert imaginärer einander zugeordneten Geraden im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 gewonnen ist.

Die einscharig in einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung sind reell, und auf jeder von ihnen liegt außer einer Regelschar von H_1^1 noch eine hyperbolisch involutorische Regelschar des geschart involutorischen Raumes der Kongruenz. Der einer

einscharig in H_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen Fläche zweiter Ordnung assoziierte Büschel linearer Strahlenkongruenzen besteht demnach aus ∞^1 hyperbolischen, zwei parabolischen und ∞^1 elliptischen linearen Kongruenzen. Die beiden parabolischen linearen Kongruenzen haben bzw. die (reellen) Leitgeraden u, v von H_1^1 zu Paaren vereinigter Leitgeraden und werden bzw. von den Tangenten der Fläche längs u und v gebildet.

In einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 dagegen liegen einscharig ∞^3 reelle Flächen zweiter Ordnung und ∞^3 imaginäre. Jede der reellen Flächen zweiter Ordnung enthält außer der in E_1^1 gelegenen Regelschar noch eine elliptisch involutorische Regelschar des geschart involutorischen Raumes der Kongruenz. Folglich sind alle linearen Kongruenzen aus dem einer einscharig in E_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen Fläche zweiter Ordnung assoziierten Büschel linearer Strahlenkongruenzen hyperbolisch, aber alle linearen Kongruenzen aus dem einer einscharig in E_1^1 enthaltenen imaginären nicht zerfallenen Fläche zweiter Ordnung assoziierten Büschel linearer Strahlenkongruenzen elliptisch.

Bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 liegen hiernach in der Leitschar jeder nicht zerfallenen (reellen) Regelschar zweiter Ordnung ∞^1 Paare im geschart involutorischen Raume von H_1^1 einander zugeordneter reellen Geraden, zwei Paare in diesem involutorischen Raume einander zugeordneter bzw. mit den (reellen) Leitgeraden u, v von H_1^1 vereinigten reellen Geraden und ∞^1 Paare in ihm einander zugeordneter konjugiert imaginären Geraden.

Bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 hingegen liegen in der Leitschar jeder in E_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen reellen Regelschar zweiter Ordnung, außer den zwei Paaren im geschart involutorischen Raume von E_1^1 einander zugeordneter bzw. mit den (konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von E_1^1 vereinigten imaginären Geraden, nur noch ∞^1 Paare in diesem geschart involutorischen Raume einander zugeordneter reellen Geraden und in der Leitschar jeder in E_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen imaginären Regelschar zweiter Ordnung, außer den zwei Paaren im geschart involutorischen Raume von E_1^1 einander zugeordneter bzw. mit den (konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von E_1^1 vereinigten imaginären Geraden, nur noch ∞^1 in ihm einander zugeordneter konjugiert imaginären Geraden [21])

[21]) In der unter [14]) angeführten Abhandlung, Nr. 26 habe ich infolge der damals noch mangelhaften Kenntnis imaginärer Elemente des geschart involutorischen Raumes einer linearen Strahlenkongruenz irrtümlich behauptet: Einander zugeordnete Elemente eines elliptischen geschart involutorischen Raumes sind reell. Dieser Fehlschluß ist durch obige Auseinandersetzung widerlegt. Es sind sonach auch (a. a. O., Nr. 27) in einem elliptischen geschart involutorischen Raume nicht alle singulär windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen hyperbolisch, sondern ∞^4 hyperbolisch und ∞^4 elliptisch zweiter Art.

35. Die Strahlen jeder linearen Kongruenz aus dem Büschel linearer Strahlenkongruenzen, der einer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung P^2 assoziiert ist, sind paarweise für P^2 reziprok polar (**33.**). Jede dieser ∞^1 linearen Kongruenzen trägt sonach eine durch die Fläche P^2 bedingte primäre Involution[15]), deren Doppelstrahlen die allen Kongruenzen gemeinsame in C_1^1 gelegene (reelle oder imaginäre) Regelschar $\mathfrak{R}^2$ von P^2 bilden. Je zwei für P^2 reziprok polare Strahlen einer linearen Kongruenz aus dem P^2 assoziierten Büschel linearer Strahlenkongruenzen sowie deren beide (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden (falls letztere nicht bei einer hyperbolischen linearen Kongruenz mit einer der beiden Leitgeraden u, v zusammenfallen) sind aber im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 einander zugeordnet (**33.**). Also ist gezeigt, wenn P^2 nacheinander in jede der ∞^3 einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung übergeht und jedesmal der P^2 assoziierte Büschel linearer Strahlenkongruenzen konstruiert wird:

Die ∞^4 primär involutorischen linearen Strahlenkongruenzen in dem geschart involutorischen Raume Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 haben bzw. die Paare (reeller oder konjugiert imaginärer) einander zugeordneter Strahlen von Σ_{ig} zu Leitgeraden.

In dem geschart involutorischen Raume einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz gibt es außerdem in jedem Büschel linearer Strahlenkongruenzen, der einer einscharig in ihr enthaltenen nicht zerfallenen Fläche zweiter Ordnung assoziiert ist, zwei parabolische Kongruenzen. Ihre vereinigten Leitgeraden fallen bzw. mit den Leitgeraden u, v der hyperbolischen linearen Kongruenz zusammen. Unter den ∞^4 primär involutorischen linearen Strahlenkongruenzen aus dem geschart involutorischen Raume einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz sind also ∞^3 mit parabolischen Trägern.

C. Das polare F^2-Gebüsch und Γ-Gebüsch der parabolischen linearen Strahlenkongruenz.

36. Je zwei Strahlenbüschel erster Ordnung einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 bilden die eine Regelschar einer einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung. Die Leitschar einer solchen Regelschar setzt sich aus zwei parabolisch involutorischen Strahlenbüscheln erster Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^P von P_1^1 zusammen. Vereinigen sich die zwei Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1, so reduziert sich die soeben charakterisierte Fläche zweiter Ordnung auf einen einzigen Strahlenbüschel erster Ordnung der Kongruenz. Aus diesem Gesichtspunkte rechne ich die ∞^1 je auf einen einzigen Strahlenbüschel erster Ordnung

von P_1^1 reduzierten Flächen zweiter Ordnung zu den einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung. Eine einscharig in P_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung besteht hiernach entweder aus zwei verschiedenen Paaren von Strahlenbüscheln erster Ordnung, die vom selben Ebenen- und Punktepaare des Trägers $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 getragen werden, oder aus zwei Paaren mit demselben Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 vereinigter Strahlenbüscheln erster Ordnung. Durch je zwei einscharig in P_1^1 enthaltene zerfallene Flächen zweiter Ordnung geht ein Büschel dieser zerfallenen Flächen. Die beiden Paare von Strahlenbüscheln erster Ordnung auf jeder Fläche eines solchen Büschels werden sowohl durch ein Ebenenpaar der Ebeneninvolution getragen, die durch die Ebenenpaare, wie auch durch ein Punktepaar der Punktinvolution, die durch die Punktepaare der zwei den Büschel bestimmenden zerfallenen Flächen zweiter Ordnung geht. Aus der die Ebenenpaare der Flächen des Büschels verbindenden Ebeneninvolution folgt die die Punktepaare des F^2-Büschels verbindende Punktinvolution. Beide Involutionen bestimmen einander. Sie seien als die „Fundamentalinvolutionen" des Büschels einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung bezeichnet. Beide Fundamentalinvolutionen sind zugleich hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch. In jedem Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung liegen zwei je auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierte Flächen zweiter Ordnung. Sie sind reell oder konjugiert imaginär, je nachdem die beiden Fundamentalinvolutionen des F^2-Büschels sich als hyperbolisch oder elliptisch erweisen; sie sind mit demselben reellen Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 vereint, wenn der F^2-Büschel zwei parabolische Fundamentalinvolutionen bestimmt. Berücksichtigt man, daß in einem Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung außer ∞^1 reellen Flächen auch ∞^1 imaginäre liegen können, und daß demgemäß zwei Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung eine (reelle oder imaginäre) Fläche zweiter Ordnung gemein haben, so folgt:

Die einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung bilden einen aus reellen und imaginären Flächen bestehenden F^2-Bündel. Seine Flächen haben den Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 zum gemeinsamen Doppelstrahle. In jedem der ∞^2 F^2-Büschel dieses Bündels zerfallener Flächen zweiter Ordnung liegen bzw. zwei getrennte oder vereinigte reelle oder zwei konjugiert imaginäre je auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierte Flächen zweiter Ordnung. Jede der beiden reduzierten Flächen hat ein Doppelelement aus jeder der beiden Fundamentalinvolutionen des F^2-Büschels zum Träger.

37. Das Gebüsch einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung wird polar, wenn man in ihm jeder Fläche den Bündel für sie autopolarer Flächen zuordnet (**1.**). In dem so erhaltenen polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ liegt (**36.**) ein von den einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung gebildeter polarer F^2-Bündel $\pi^P(F_Z^2)$. Nun stellen beide Fundamentalinvolutionen eines Büschels einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung (**36.**) vereint eine einscharig in P_1^1 gelegene zerfallene (reelle oder imaginäre) Fläche zweiter Ordnung dar. Ihre eine Regelschar bilden zusammen die Strahlenbüschel auf den je auf einen (reellen oder imaginären) Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierten zwei Flächen des F^2-Büschels. Diese Fläche aber ist autopolar für jede Fläche des F^2-Büschels und somit die Polfläche des F^2-Büschels im polaren F^2-Bündel $\pi^P(F_Z^2)$. D. h.:

Im polaren Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ zerfallener Flächen des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 ist jedem F^2-Büschel diejenige (reelle oder imaginäre) Fläche als Polfläche zugeordnet, deren eine Regelschar aus den Strahlenbüscheln von P_1^1 auf den beiden (reellen oder konjugiert imaginären) je auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung reduzierten Flächen des F^2-Büschels besteht. Die für eine einscharig in P_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung autopolaren einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung bilden den Polar-F^2-Büschel der Fläche im polaren F^2-Bündel $\pi^P(F_Z^2)$.

Bei zwei füreinander autopolaren einscharig in P_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung erweisen sich[5]) die auf jeder der beiden Flächen gelegenen im geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^P von P_1^1 einander zugeordneten Strahlen als reziprok polar für die andere. Sind insbesondere beide Flächen (**3.**) zwei konjugierte Flächen Z^2, Z'^2 des polaren Bündels $\pi^P(F_Z^2)$ zerfallener Flächen des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1, liegen ferner auf Z^2 die beiden Strahlenbüschel erster Ordnung $(S\sigma)$, $(T\tau)$ von P_1^1 und folglich noch die beiden Strahlenbüschel erster Ordnung $(S\tau)$, $(T\sigma)$, so bildet jeder Strahl des Büschels $(S\tau)$ mit jedem Strahle des Büschels $(T\sigma)$ ein Paar einander zugeordneter Strahlen von Σ_{ig}^P wie auch ein Paar reziproker Polaren für Z'^2.

Der polare F^2-Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ enthält ∞^1 parabolisch involutorische F^2-Büschel. Jeder von ihnen ist der Polar-F^2-Büschel seiner vereinigten Doppelelemente, und diese stellen zwei je mit einem Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 vereinigte zerfallene Flächen zweiter Ordnung dar. Umgekehrt bestimmen je zwei vereinigte Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 im polaren F^2-Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ einen parabolisch involutorischen Büschel

zerfallener Flächen zweiter Ordnung als deren vereinigte Doppelelemente. Sonach sind die bzw. auf die Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierten einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung die Inzidenzflächen (4.) des polaren Bündels $\pi^P(F_Z^2)$ zerfallener Flächen des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 und die in ihm enthaltenen parabolisch involutorischen F^2-Büschel seine Inzidenz-F^2-Büschel.

Jeder F^2-Büschel des polaren F^2-Bündels $\pi^P(F_Z^2)$ geht durch zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) getrennte oder durch zwei reelle vereinigte Inzidenzflächen von $\pi^P(F_Z^2)$. Er „schneidet" folglich die von den Inzidenzflächen dieses polaren F^2-Bündels gebildete lineare Mannigfaltigkeit erster Stufe in zwei (reellen oder konjugiert imaginären) getrennten oder „berührt" sie in zwei reellen zusammengefallenen Elementen. Die lineare Mannigfaltigkeit der Inzidenzflächen im polaren F^2-Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ steht somit zu seinen F^2-Büscheln in analoger Beziehung wie die Ebenenbüschel erster Ordnung in einem zentrischen Bündel zu einem in ihm gelegenen Ebenenbüschel oder Ebenenkegel zweiter Ordnung. Sie werde demgemäß als ein „F^2-Büschel oder F^2-Kegel zweiter Ordnung" bezeichnet.

38. Sind die Strahlen einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 paarweise für eine einscharig in P_1^1 enthaltene nicht zerfallene Fläche zweiter Ordnung P^2 reziprok polar, so liegt der Schnittpunkt der Strahlen jedes Paares[22]) auf dem Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1. Je zwei Paare für die Fläche P^2 reziprok polarer Strahlen von P_1^1 werden aber durch eine einscharig in P_1^1 enthaltene für die Fläche P^2 autopolare Fläche zweiter Ordnung verbunden[23]). Folglich sind die einscharig in P_1^1 enthaltenen für die Fläche P^2 autopolaren Flächen zweiter Ordnung zerfallen[24]) und alle einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung für P^2 autopolar. P^2 kann jede einscharig in P_1^1 enthaltene nicht zerfallene Fläche zweiter Ordnung sein. Ferner bilden die einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung einen Bündel (**36.**). Somit ist dargetan:

Jede einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltene nicht zerfallene und jede einscharig in ihr enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung sind füreinander autopolar. Alle einscharig in P_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen Flächen zweiter Ordnung haben im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 denselben Polar-F^2-Bündel $\pi^P(F_Z^2)$. Er besteht aus den einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung.

---

[22]) Die unter [7]) angeführte Abhandlung, Nr. 17.
[23]) Die unter [6]) angeführte Abhandlung, Nr. 8.
[24]) Die unter [7]) angeführte Abhandlung, Nr. 16.

Jedes Polar-F^2-Tetraeder (**3.**) des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ hat hiernach nur eine einzige nicht zerfallene Eckfläche. Seine drei übrigen zerfallenen Eckflächen bilden auch mit jeder andern einscharig in P_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen Fläche zweiter Ordnung ein Polar-F^2-Tetraeder von $\Pi^P(F^2)$.

Die Auseinandersetzungen der vorigen und dieser Nummer erweisen das polare F^2-Gebüsch $\Pi^P(F^2)$ einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 als ausgeartet. Das polare F^2-Gebüsch $\Pi^P(F^2)$ verhält sich dabei zu dem polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer hyperbolischen oder elliptischen linearen Strahlenkongruenz (**1.**) wie der polare Raum eines Kegels zweiter Ordnung zu dem einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung.

39. Im Gebüsche der einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung bilden die zerfallenen Flächen einen F^2-Bündel (**36.**). Ein F^2-Bündel und ein nicht in ihm gelegener F^2-Büschel eines F^2-Gebüsches haben aber eine Fläche gemein. Folglich geht jeder Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, der nicht im Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung liegt, durch eine einzige (reelle oder imaginäre) zerfallene Fläche. Sie trägt die vereinigten Doppelelemente der durch die Korrelation des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 im F^2-Büschel festgelegten Involution (**3.**). Diese Involution ist also parabolisch. Jeder nur durch eine zerfallene Fläche gehende Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung kann nun kein Inzidenz-F^2-Büschel (**37.**) des polaren Bündels $\pi^P(F_Z^2)$ zerfallener Flächen zweiter Ordnung im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ sein. Somit muß die einzige in ihm enthaltene zerfallene Fläche aus zwei verschiedenen Paaren von Strahlenbüscheln erster Ordnung bestehen (**36.**). Also:

Liegt in einem F^2-Büschel des Gebüsches einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung eine nicht zerfallene (reelle oder imaginäre) Fläche zweiter Ordnung, so geht der F^2-Büschel durch eine einzige (reelle oder imaginäre) zerfallene Fläche. Diese Fläche besteht aus zwei verschiedenen Paaren von Strahlenbüscheln erster Ordnung, und mit ihr sind die beiden Doppelelemente der vom F^2-Büschel im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 getragenen parabolischen Involution vereinigt.

Die Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung bestehen hiernach entweder aus lauter nicht zerfallenen Flächen und einer einzigen (reellen oder imaginären) in zwei verschiedene Paare von Strahlenbüscheln erster Ordnung zerfallenen Fläche oder aus lauter zerfallenen Flächen (**36.**). Im ersteren Falle sind die Elemente der F^2-Büschel im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 parabolisch involutorisch gepaart,

und die vereinigten Doppelelemente dieser parabolischen F^2-Büschel werden bzw. von deren zerfallenen Flächen getragen. Im letzteren Falle dagegen bilden in $\Pi^P(F^2)$ die zerfallenen Flächen F^2-Büschel mit zwei hyperbolischen oder parabolischen oder elliptischen Fundamentalinvolutionen.

Für jede einscharig in P_1^1 enthaltene nicht zerfallene Fläche zweiter Ordnung sind alle Flächen des Bündels einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung autopolar (38.). Für jede einscharig in P_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung hingegen sind — außer allen einscharig in P_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen Flächen zweiter Ordnung — nur diejenigen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung autopolar, die im polaren Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ zerfallener Flächen von $\Pi^P(F^2)$ den Polar-F^2-Büschel der zerfallenen Fläche bilden (37.). Ist nun $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ ein Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit einer einzigen zerfallenen Fläche Z^2, so ist hiernach der für den F^2-Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ polare F^2-Büschel von $\Pi^P(F^2)$ identisch mit dem Polar-F^2-Büschel von Z^2 im polaren Bündel $\pi^P(F_Z^2)$. Die zerfallene Fläche Z^2 liegt aber in ∞^2 Büscheln einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, in denen außer Z^2 keine weiteren zerfallenen Flächen enthalten sind. Folglich schließen wir:

Von den ∞^4 Büscheln einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit je einer einzigen zerfallenen Fläche gehen immer je ∞^2 durch die nämliche zerfallene Fläche. Ein jeder von solchen ∞^3 F^2-Büscheln bestimmt im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1, und zwar im polaren F^2-Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ zerfallener Flächen, denselben zu ihm polaren F^2-Büschel. Die Polfläche dieses F^2-Büschels im polaren F^2-Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ ist die den ∞^2 F^2-Büscheln gemeinsame (zerfallene) Fläche. Je nachdem sie reell oder imaginär ist, bestehen die Basiskurven der ∞^3 F^2-Büschel, außer aus den vereinigten Leitgeraden w von P_1^1, je aus zwei reellen oder aus zwei konjugiert imaginären Kongruenzstrahlen.

Außerdem folgt, wenn zwei F^2-Büschel eines F^2-Gebüsches, die keine Fläche gemein haben, als „windschief" bezeichnet werden:

Enthält von zwei reziprok polaren F^2-Büscheln des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 der eine eine einzige zerfallene Fläche, so sind die beiden F^2-Büschel windschief.

40. Zwei F^2-Bündel eines F^2-Gebüsches haben einen F^2-Büschel gemein. Folglich schneidet im Gebüsche einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung der Bündel zerfallener Flächen (36.) alle übrigen F^2-Bündel in je einem Büschel zerfallener Flächen. Diese Büschel haben entweder zwei getrennte oder vereinigte reelle oder zwei konjugiert imaginäre je auf einen Strahlen-

büschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierte Flächen zweiter Ordnung zu Doppelelementen. Eine auf zwei verschiedene Paare von Strahlenbüscheln erster Ordnung reduzierte Fläche zweiter Ordnung hat aber deren gemeinsamen Strahl, eine auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung reduzierte dessen Strahlen zu Doppelstrahlen. Somit besteht im polaren Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ zerfallener Flächen des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 die in P_1^1 enthaltene Regelschar der Polfläche jedes seiner F^2-Büschel aus den Doppelstrahlen der Flächen des Büschels. Zusammengefaßt ergibt sich hiernach:

In jedem F^2-Bündel des Gebüsches einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung — abgesehen von seinem Bündel zerfallener Flächen — bilden die zerfallenen Flächen einen Büschel, und deren Doppelstrahlen eine auf zwei getrennte (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel erster Ordnung oder auf einen reellen Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierte Regelschar zweiter Ordnung. Diese Regelschar liegt auf der Polfläche des Büschels zerfallener Flächen im polaren Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ zerfallener Flächen des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1.

Jeder F^2-Büschel eines F^2-Gebüsches liegt nun in ∞^1 F^2-Bündeln dieses Gebüsches. Somit schließen wir aus dem vorstehenden:

∞^1 Bündel einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung gehen im Gebüsche einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung durch jeden Büschel zerfallener Flächen zweiter Ordnung. Im Gebüsche einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung bestimmen — abgesehen vom F^2-Bündel zerfallener Flächen — ∞^1 F^2-Bündel die nämliche aus den Doppelstrahlen ihrer zerfallenen Flächen gebildete auf zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) oder auf einen reellen Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierte quadratische Regelschar.

41. Von zwei windschiefen reziprok polaren F^2-Büscheln $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthält der eine — etwa $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ — eine einzige in zwei Paare getrennter (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Fläche Z^2 und der andere $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ lauter zerfallene Flächen (**39.**). Die Flächen beider F^2-Büschel berühren einander längs der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1. Je nachdem die zerfallene Fäche Z^2 reell oder imaginär ist, enthält das Basisvierseit des F^2-Büschels $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ außer den vereinigten Leitgeraden w noch zwei windschiefe (reelle oder konjugiert imaginäre) Kongruenzstrahlen a, b und der F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) auf je einen Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierte Flächen zweiter Ordnung. Mit den beiden reziprok

polaren F^2-Büscheln ist ein Büschel $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung aus dem geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^P von P_1^1 verknüpft (**9.**). Sein Basisvierseit besteht einesteils aus den beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Kongruenzstrahlen a, b, andernteils aus zwei vereinigten Kongruenzstrahlen, längs derer die Flächen des F^2-Büschels einander berühren, und die ebenfalls der Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 trägt.

Mit den beiden reziprok polaren F^2-Büscheln $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ sind zugleich die ihnen adjungierten linearen Strahlenkongruenzen und sekundären Involutionen gegeben (**5.**). Die dem F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ adjungierte lineare Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ wird erschöpft durch ∞^1 Paare von Strahlenbüscheln erster Ordnung und durch zwei einzelne Strahlenbüschel erster Ordnung. Die ersteren liegen auf den ∞^1 in zwei verschiedene Paare von Strahlenbüscheln erster Ordnung ausgearteten (reellen oder imaginären) Flächen des F^2-Büschels $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$, die letzteren auf den zwei bzw. die Strahlen a, b von P_1^1 enthaltenden (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlenbüscheln erster Ordnung, die je mit den beiden je auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierten Flächen dieses F^2-Büschels zusammenfallen (**39.**). Nun berühren die Flächen des mit den beiden reziprok polaren F^2-Büscheln verknüpften Büschels $F^2(A_{ig}^2 B_{ig}^2 C_{ig}^2 \ldots)$ beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung von Σ_{ig}^P einander längs $\mathfrak{w}$, und jede trägt eine nicht durch $\mathfrak{w}$ gehende Regelschar zweiter Ordnung von $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$. Folglich ist die dem F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ adjungierte lineare Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ parabolisch, und ihre vereinigten Leitgeraden $w(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ haben mit den vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 den Träger $\mathfrak{w}$ gemein. — In der von $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ getragenen dem F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ adjungierten sekundären Involution sind je zwei Strahlenbüschel erster Ordnung einander zugeordnet, die zusammen eine Regelschar auf einer Fläche des F^2-Büschels $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ bilden, und dann auch paarweise die Strahlen jedes der beiden Strahlenbüschel erster Ordnung, in denen die linearen Kongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ und P_1^1 einander schneiden. Die involutorische Paarung dieser beiden Schnittstrahlenbüschel ist hyperbolisch. Ihre Doppelstrahlen sind in beiden Fällen der Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden $w(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ von $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ und bzw. die mehrfach genannten im Basisvierseite von $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ enthaltenen Strahlen a, b von P_1^1. Die Strahlen a, b sind zugleich mit den bzw. durch sie gehenden Schnittstrahlenbüscheln reell oder konjugiert imaginär. Wird der F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ nacheinander zu jedem der ∞^2 F^2-Büschel, der im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 zum Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ zerfallener Flächen zweiter Ordnung polar ist (**39.**),

so ändert sich die ihm adjungierte lineare Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ nicht, wohl aber auf ihr die $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ adjungierte sekundäre Involution. In anderen Worten:

Im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 haben alle ∞^2 F^2-Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, die zu einem F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ zerfallener Flächen zweiter Ordnung mit (31.) *zwei hyperbolischen oder elliptischen Fundamentalinvolutionen polar sind, ein und dieselbe ihnen adjungierte lineare Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$. Die lineare Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ ist parabolisch. Ihre vereinigten Leitgeraden $w(M^2N^2O^2\ldots)$ und die von P_1^1 werden von derselben Gerade $\mathfrak{w}$ getragen, und beide linearen Kongruenzen schneiden einander in einem Paare (reeller oder konjugiert imaginärer) Strahlenbüschel erster Ordnung. Jeder der ∞^2 F^2-Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ bestimmt auf der Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ eine andere ihm adjungierte sekundäre Involution. Das eine Paar Doppelstrahlen einer solchen sekundären Involution bilden die vereinigten Leitgeraden $w(M^2N^2O^2\ldots)$ von $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$, das andere Paar die beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlen a, b von P_1^1, die alle Flächen des der sekundären Involution adjungierten F^2-Büschels $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ gemein haben. In jeder der den ∞^2 F^2-Büscheln $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ bzw. adjungierten sekundären Involutionen sind auf jeder (zerfallenen) Fläche des F^2-Büschels $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ die beiden in $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ enthaltenen Strahlenbüschel erster Ordnung einander zugeordnet. Außerdem liegen in jeder zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) hyperbolisch involutorische Strahlenbüschel erster Ordnung. Zu Doppelelementen hat jeder von diesen außer den vereinigten Doppelstrahlen noch je einen der beiden übrigen Doppelstrahlen der sekundären Involution.*

Zum Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung kann jeder Büschel einscharig in dieser Kongruenz enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung mit zwei hyperbolischen oder elliptischen Fundamentalinvolutionen gewählt werden. Demnach sagt das soeben Abgeleitete beiläufig auch aus:

Hat ein Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung zwei hyperbolische oder elliptische Fundamentalinvolutionen, so bilden die auf seinen Flächen aber nicht in P_1^1 enthaltenen (reellen oder konjugiert imaginären) Paare von Strahlenbüscheln erster Ordnung zusammen mit den Strahlenbüscheln erster Ordnung seiner beiden (reellen oder konjugiert imaginären) je auf einen Strahlenbüschel von P_1^1 reduzierten Flächen eine parabolische lineare Strahlenkongruenz. Die vereinigten Leitgeraden dieser und der parabolischen linearen Kongruenz P_1^1 haben den Träger $\mathfrak{w}$ gemein.

42. $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ seien wie in vorstehender Nummer zwei windschiefe reziprok polare F^2-Büschel im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1. Der Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ enthalte auch jetzt nur eine zerfallene Fläche Z^2 und somit der Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ lauter zerfallene Flächen (**39.**). Während aber in Nummer **41** der F^2-Büschel $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ untersucht wurde, werde es hier der F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$.

Die Flächen des F^2-Büschels $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ berühren einander längs der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1. Sie haben außerdem zwei Strahlen a, b dieser Kongruenz gemein, und diese sind die Leitgeraden (**8.**) der dem F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierten linearen Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$. Das Geradenpaar a, b kann reell oder konjugiert imaginär sein, die lineare Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ also hyperbolisch oder elliptisch. Mit den reziprok polaren F^2-Büscheln $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ ist ein Büschel $F^2(A_{ig}^2B_{ig}^2C_{ig}^2\ldots)$ beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^P von P_1^1 verknüpft (**41.**). Sein Basisvierseit besteht aus den vereinigten Leitgeraden $w(M^2N^2O^2\ldots)$ der $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ adjungierten linearen Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$ und dem Strahlenpaare a, b. Die vereinigten Leitgeraden $w(M^2N^2O^2\ldots)$ bilden dabei die gemeinsamen Doppelstrahlen derjenigen involutorischen Regelscharen auf den Flächen des F^2-Büschels $F^2(A_{ig}^2B_{ig}^2C_{ig}^2\ldots)$, die zugleich in der dem F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierten sekundären Involution liegen. In dieser liegen aber auch (**5.**) die auf den Flächen von $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ enthaltenen involutorischen Regelscharen des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^P. Sie haben die vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 zu gemeinsamen Doppelstrahlen. Folglich sind die vier Doppelstrahlen der dem F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierten sekundären Involutionen paarweise vereinigt. Sie bestehen aus den vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 und den vereinigten Leitgeraden $w(M^2N^2O^2\ldots)$ von $\mathfrak{A}_1^1(M^2N^2O^2\ldots)$. Beide Paare vereinigter Doppelstrahlen haben denselben Träger $\mathfrak{w}$. Kurz:

Es enthalte von zwei windschiefen reziprok polaren F^2-Büscheln $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$, $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 etwa $F^2(M^2N^2O^2\ldots)$ nur die eine zerfallene Fläche Z^2 und also der andere $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ lauter zerfallene Flächen. Dann ist, je nachdem die Fläche Z^2 reell oder imaginär ist, die dem F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierte lineare Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ hyperbolisch oder elliptisch. Die dem F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierte sekundäre Involution hat zwei Paare vereinigter Doppelstrahlen mit demselben Träger $\mathfrak{w}$. Das eine Paar bilden die vereinigten Leitgeraden w von P_1^1, das andere Paar die ver-

einigten Leitgeraden $w(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ *der dem* F^2*-Büschel* $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ *adjungierten linearen Kongruenz* $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$.

Die einzige zerfallene Fläche Z^2 des zu unserm F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ polaren F^2-Büschels $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ ist zugleich die einzige zerfallene Fläche in ∞^2 Büscheln einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung (**39.**). Jeder von ihnen bildet mit dem F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ ein Paar reziprok polarer F^2-Büschel im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1. Die nicht in P_1^1 enthaltenen Strahlen auf den Flächen jedes dieser F^2-Büschel bilden zusammen eine dem F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierte lineare Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$, und jede dieser Kongruenzen trägt eine dem F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierte sekundäre Involution. Somit ist weiter gezeigt:

Bei zwei windschiefen reziprok polaren F^2*-Büscheln* $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ *im polaren* F^2*-Gebüsche* $\Pi^P(F^2)$ *einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz* P_1^1, *von denen* $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ *nur eine einzige zerfallene Fläche* Z^2 *und* $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ *lauter zerfallene Flächen enthält, hat der* F^2*-Büschel* $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ *stets* ∞^2 *ihm adjungierte lineare Kongruenzen* $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$. *Jede dieser linearen Kongruenzen trägt eine dem* F^2*-Büschel* $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ *adjungierte sekundäre Involution. Je nachdem die zerfallene Fläche* Z^2 *aus zwei Paaren getrennter reellen oder konjugiert imaginären Strahlenbüscheln erster Ordnung besteht, sind die dem* F^2*-Büschel* $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ *adjungierten linearen Kongruenzen* $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ *hyperbolisch oder elliptisch. Ihre Leitgeradenpaare bestehen je aus zwei (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlen der beiden in* P_1^1 *enthaltenen Strahlenbüscheln erster Ordnung von* Z^2. — *Jede der* ∞^2 *dem* F^2*-Büschel* $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ *adjungierten sekundären Involutionen hat zwei Paare vereinigter Doppelstrahlen mit demselben Träger* $\mathfrak{w}$. *Das eine allen gemeinsame Paar bilden die vereinigten Leitgeraden* w *von* P_1^1, *das andere Paar die vereinigten Leitgeraden* $w(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ *derjenigen linearen Kongruenz* $\mathfrak{A}_1^1(M^2 N^2 O^2 \ldots)$, *die dem in Frage kommenden* F^2*-Büschel* $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ *adjungiert ist.*

Je zwei der ∞^2 in dem polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 zum F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ polaren F^2-Büschel $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ fallen zusammen, wenn sie außer der zerfallenen Fläche Z^2 noch eine Fläche gemein haben. Die nicht in P_1^1 enthaltenen Strahlen eines zu $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ polaren F^2-Büschels $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$ bilden dabei eine $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierte lineare Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$, und diese trägt eine $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierte sekundäre Involution. Jedes Strahlenpaar dieser Involution bestimmt aber eine sie enthaltende Fläche des F^2-Büschels $F^2(M^2 N^2 O^2 \ldots)$. Also schließen wir:

Hat ein Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung zwei hyperbolische oder elliptische Fundamentalinvolutionen, so geht durch jedes Strahlenpaar einer dem F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierten sekundären Involution keine weitere $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierte sekundäre Involution.

Die dem F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierten ∞^2 linearen Kongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ haben nach dem vorletzten Lehrsatze zu Leitgeraden Strahlenpaare aus beiden in P_1^1 enthaltenen Strahlenbüscheln erster Ordnung von Z^2. Umgekehrt bildet jedes Strahlenpaar aus diesen beiden Strahlenbüscheln die Leitgeraden einer $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungierten linearen Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$. Bei einer imaginären Fläche Z^2 sind ihre beiden in P_1^1 enthaltenen Strahlenbüschel erster Ordnung und die in Frage kommenden Strahlenpaare konjugiert imaginär und die zugehörigen linearen Kongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ elliptisch. Fällt die Fläche Z^2 somit nacheinander auf alle einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen imaginären Flächen zweiter Ordnung, deren eine Regelschar je aus zwei Strahlenbüscheln erster Ordnung von P_1^1 besteht, so ergeben sich alle konjugiert imaginären Strahlenpaare von P_1^1 als Leitgeraden der elliptischen linearen Kongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$. Die ∞^4 elliptischen linearen Kongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(R^2S^2T^2\ldots)$ sind folglich die realen Darstellungen der ∞^4 Paare konjugiert imaginärer Strahlen der parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1.

43. Die Leitschar jeder nicht zerfallenen Regelschar zweiter Ordnung einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 trägt eine parabolisch involutorische Regelschar zweiter Ordnung aus dem geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^P der Kongruenz. Jede dieser ∞^3 parabolisch involutorischen Regelscharen hat die vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 zu Doppelstrahlen. Einer einscharig in P_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung ist aber derjenige lineare Strahlenkomplex adjungiert, dessen Nullraum durch die auf ihr gelegene parabolisch involutorische Regelschar von Σ_{ig}^P geht (**23.**). Folglich gilt:

Jeder der ∞^3 einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen Flächen zweiter Ordnung ist ein und derselbe lineare Strahlenkomplex Γ_w adjungiert. Der lineare Komplex Γ_w ist speziell, und seine Leitgerade ist der Träger w der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1.

Es sei jetzt eine durch zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel erster Ordnung $(S\sigma)$, $(T\tau)$ von P_1^1 gehende zerfallene (reelle oder imaginäre) Fläche zweiter Ordnung Z^2 gegeben. Der ihr im polaren

Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ zerfallener Flächen des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 zugeordnete Polar-F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ geht durch die beiden bzw. auf die Strahlenbüschel $(S\sigma), (T\tau)$ reduzierten Flächen zweiter Ordnung (37.).

Für die Fläche Z^2 sind die Flächen ihres Polar-F^2-Büschels $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ autopolar, und die nicht in P_1^1 enthaltenen Strahlenbüschel auf den Flächen von $F^2(R^2S^2T^2\ldots.)$ bilden (41.) zusammen mit den beiden Strahlenbüscheln $(S\sigma), (T\tau)$ von P_1^1 eine parabolische lineare Strahlenkongruenz Z_1^1. Die vereinigten Leitgeraden von Z_1^1 haben mit denen von P_1^1 den Träger $\mathfrak{w}$ gemein. Ferner sind die Strahlen von Z_1^1 paarweise für Z^2 reziprok polar und zugleich im geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^P von P_1^1 einander zugeordnet (37.). Nun sendet der von Z_1^1 getragene Γ-Büschel durch einen nicht in Z_1^1 gelegenen Strahl $\mathfrak{f}$ einen seiner linearen Komplexe. Und da auch die Strahlen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{w}$ für Z^2 reziprok polar und in Σ_{ig}^P einander zugeordnet sind, so führt sowohl die Korrelation des polaren Raumes von Z^2 wie auch die Kollineation von Σ_{ig}^P diesen linearen Komplex so in sich über, daß seine Strahlen paarweise für Z^2 reziprok polar und zugleich in Σ_{ig}^P einander zugeordnet bleiben. Gleiches gilt von jedem linearen Komplexe Γ_{Z^2} des von Z_1^1 getragenen Γ-Büschels. Jeder Komplex dieses Γ-Büschels ist also (18.) der durch die beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlenbüschel $(S\sigma), (T\tau)$ von P_1^1 gehenden zerfallenen (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung Z^2 adjungiert. — Zusammengefaßt ist dargetan:

Einer durch zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel erster Ordnung einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 gehenden einscharig in P_1^1 enthaltenen (reellen oder imaginären) zerfallenen Fläche zweiter Ordnung Z^2 sind ∞^1 lineare Komplexe Γ_{Z^2} adjungiert. Die Trägerkongruenz Z_1^1 des von ihnen gebildeten parabolischen Γ-Büschels setzt sich zusammen aus den nicht in P_1^1 enthaltenen Paaren von Strahlenbüscheln erster Ordnung auf den Flächen des Polar-F^2-Büschels $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ von Z^2 in dem polaren Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ zerfallener Flächen des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 und aus den beiden auf Z^2 und in P_1^1 gelegenen (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlenbüscheln erster Ordnung. Jeder der ∞^1 der Fläche Z^2 adjungierten linearen Komplexe Γ_{Z^2} besteht aus paarweise für Z^2 reziprok polaren und dabei im geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^P vom P_1^1 einander zugeordneten Strahlen. Die ∞^2 parabolischen Γ-Büschel, deren Komplexe jeder durch zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel von P_1^1 gehenden zerfallenen Fläche zweiter Ordnung Z^2 adjungiert sind, gehen durch den speziellen linearen Komplex $\Gamma_{\mathfrak{w}}$, dessen Leitgerade mit dem Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 zusammenfällt.

Es bleibt noch der Zusammenhang zwischen den einscharig in P_1^1 enthaltenen auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierten Flächen zweiter Ordnung und den ihnen bzw. adjungierten linearen Komplexen zu klären. Hierauf führt das soeben Bewiesene. Aus ihm läßt sich ohne weiteres der Satz ableiten:

Einer einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltenen auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung $(A\alpha)$ von P_1^1 reduzierten Fläche zweiter Ordnung sind ∞^1 einen Büschel bildende spezielle lineare Komplexe adjungiert. Ihre Leitgeraden fallen mit den Strahlen des Strahlenbüschels $(A\alpha)$ zusammen.

Durch zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 gehe die zerfallene Fläche zweiter Ordnung Z^2. Dann führt nach dem zweiten Hauptsatze dieser Nummer die Kollineation des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^P von P_1^1 jeden der ∞^1 der Fläche Z^2 adjungierten linearen Komplexe Γ_{Z^2} in sich über. Bekanntlich verwandelt nunmehr umgekehrt auch die Korrelation des Nullraumes jedes dieser linearen Komplexe die parabolische lineare Kongruenz P_1^1 in sich selbst. In jedem durch P_1^1 gehenden linearen Komplexe liegen hiernach ∞^2 Paare einander zugeordneter Strahlen aus dem Nullraume jedes Z^2 adjungierten linearen Komplexes, und die Z^2 adjungierten linearen Komplexe sind somit für jeden Komplex des von P_1^1 getragenen Γ-Büschels nullinvariant. — Aber auch der allen einscharig in P_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen Flächen zweiter Ordnung adjungierte spezielle Komplex Γ_w ist, wie wir gleich sehen werden, für die durch P_1^1 gehenden linearen Komplexe nullinvariant, ebenso wie jeder spezielle lineare Komplex aus den Büscheln spezieller linearen Komplexe, die bzw. den je auf die Strahlenbüschel von P_1^1 reduzierten Flächen zweiter Ordnung adjungiert sind. Denn die Leitgerade des speziellen linearen Komplexes Γ_w fällt nach dem ersten Hauptsatze dieser Nummer mit dem Träger w der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 zusammen, und die Leitgeraden der speziellen Komplexe aus jenen Büscheln spezieller linearen Komplexe sind bzw. die Strahlen der diesen Γ-Büscheln zugehörigen Strahlenbüschel von P_1^1. Also haben wir (**21.**) als Schlußergebnis:

Auch bei einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 liegen die den einscharig in ihr enthaltenen Flächen zweiter Ordnung adjungierten linearen Komplexe in einem Γ-Gebüsche. Sein Stammbüschel fällt mit dem von P_1^1 getragenen Γ-Büschel zusammen.

44. Zu einer durch ein Paar (reeller oder konjugiert imaginärer) Strahlenbüschel erster Ordnung $(S\sigma), (T\tau)$ einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 gehenden zerfallenen Fläche zweiter Ordnung Z^2 gehört ein Büschel ihr adjungierter linearen Komplexe (**43.**). Seine para-

olische Trägerkongruenz Z_1^1 setzt sich zusammen aus den nicht in P_1^1 ent-altenen Paaren von Strahlenbüscheln erster Ordnung auf den Flächen des Polar-F^2-Büschels $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ von Z^2 in dem polaren Bündel $\pi(F_Z^2)$ erfallener Flächen zweiter Ordnung des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 und aus den beiden Strahlenbüscheln $(S\sigma), (T\tau)$. Ebenso gehört zu iner zweiten durch ein anderes Paar (reeller oder konjugiert imaginärer) Strahlenbüschel erster Ordnung $(S'\sigma'), (T'\tau')$ von P_1^1 gehenden Fläche weiter Ordnung Z'^2 ein Büschel ihr adjungierter von einer parabolischen inearen Strahlenkongruenz $Z_1'^1$ getragener linearen Komplexe. Und $Z_1'^1$ esteht wiederum aus den nicht in P_1^1 enthaltenen Strahlenbüscheln erster Ordnung auf den Flächen des Polar-F^2-Büschels $F^2(R'^2S'^2T'^2\ldots)$ von Z'^2 n dem polaren Bündel $\pi(F_Z^2)$ einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen lächen zweiter Ordnung und aus den beiden Strahlenbüscheln $(S'\sigma'), (T'\tau')$. Die beiden F^2-Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$, $F^2(R'^2S'^2T'^2\ldots)$ haben als F^2-Büschel des Bündels zerfallener Flächen im Gebüsche einscharig in P_1^1 nthaltener Flächen zweiter Ordnung eine (reelle oder imaginäre) Fläche weiter Ordnung Z''^2 gemein (**36.**). Z''^2 ist die Polfläche des die Flächen Z^2, Z'^2 verbindenden F^2-Büschels $F^2(R''^2S''^2T''^2\ldots)$ einscharig in P_1^1 nthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung. In den beiden nicht in P_1^1 enthaltenen Strahlenbüscheln erster Ordnung von Z''^2 schneiden ein-nder die parabolischen linearen Kongruenzen $Z_1^1, Z_1'^1$, und durch die beiden n P_1^1 enthaltenen Strahlenbüschel erster Ordnung $(S''\sigma''), (T''\tau'')$ von Z''^2 eht die parabolische lineare Trägerkongruenz $Z_1''^1$ des Büschels der Z''^2 djungierten linearen Komplexe.

Jeder von zweien je den Flächen Z^2, Z'^2 adjungierten linearen Kom-lexe $\Gamma_{Z^2}, \Gamma_{Z'^2}$ besteht aus paarweise im geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^P on P_1^1 einander zugeordneten und zugleich je für Z^2, Z'^2 reziprok polaren trahlen (**43.**). Die Komplexe $\Gamma_{Z^2}, \Gamma_{Z'^2}$ schneiden einander somit in einer nearen Kongruenz, deren Strahlen paarweise in Σ_{ig}^P einander zugeordnet nd für die Flächen Z^2, Z'^2, und also auch für die Flächen des Z^2, Z'^2 erbindenden F^2-Büschels $F^2(R''^2S''^2T''^2\ldots)$, reziprok polar sind. Diese chnittkongruenz ist folglich (**42.**) eine der ∞^2 dem F^2-Büschel $^2(R''^2S''^2T''^2\ldots)$ adjungierten linearen Kongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(R''^2S''^2T''^2\ldots)$. hre paarweise in Σ_{ig}^P einander zugeordneten und für die Flächen des ^{2}-Büschels $F^2(R''^2S''^2T''^2\ldots)$ reziprok polaren Strahlen bilden die von ieser linearen Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R''^2S''^2T''^2\ldots)$ getragene dem F^2 Büschel $^2(R''^2S''^2T''^2\ldots)$ adjungierte sekundäre Involution. Kurz:

Bei zwei Flächen Z^2, Z'^2 aus einem Büschel $F^2(R''^2S''^2T''^2\ldots)$ inscharig in einer linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltener zerfallenen lächen zweiter Ordnung mit zwei hyperbolischen oder elliptischen Funda-entalinvolutionen ist die Schnittkongruenz zweier den Flächen Z^2, Z'^2

bzw. adjungierten linearen Komplexe Γ_{Z^2}, $\Gamma_{Z'^2}$ stets identisch mit einer der ∞^2 dem F^2-Büschel $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ adjungierten linearen Kongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$.

Die Leitgeradenpaare (**42.**) dieser dem F^2-Büschel $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ adjungierten linearen Kongruenzen sind bzw. zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlen aus den (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlenbüscheln erster Ordnung $(S''\sigma'')$, $(T''\tau'')$ von P_1^1 auf der Polfläche Z''^2 von $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ in dem polaren Bündel $\pi^P(F_Z^2)$ zerfallener Flächen des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1.

Die gefundene dem F^2-Büschel $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ adjungierte lineare Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ spielt keine besondere Rolle. Sie kann durch jede der übrigen ∞^2 dem F^2-Büschel $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ adjungierten linearen Kongruenzen ersetzt werden. Durch ein Strahlenpaar $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ einer gegebenen dem F^2-Büschel adjungierten sekundären Involution geht nämlich sowohl ein der Fläche Z^2 wie auch ein der Fläche Z'^2 von $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ adjungierter linearer Komplex. Folglich liegt das Strahlenpaar $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ auch in der von der Schnittkongruenz beider Komplexe getragenen $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ adjungierten sekundären Involution. Zwei dem F^2-Büschel $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ adjungierte durch das nämliche Strahlenpaar gehende sekundäre Involutionen fallen aber zusammen (**42.**). Also ist die Trägerkongruenz der gegebenen dem F^2-Büschel $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ adjungierten sekundären Involution mit der Schnittkongruenz unserer beiden linearen Komplexe identisch. Oder:

Hat ein Büschel $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung zwei hyperbolische oder elliptische Fundamentalinvolutionen, so kann jede dem F^2-Büschel adjungierte lineare Strahlenkongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ als Schnittkongruenz zweier linearen Komplexe erzeugt werden, die bzw. zwei gegebenen Flächen Z^2, Z'^2 des F^2-Büschels $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ adjungiert sind. Aus den Büscheln der den Flächen des F^2-Büschels $F^2(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ bzw. adjungierten linearen Komplexe wird jede der ∞^2 dem F^2-Büschel adjungierten linearen Kongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(R''^2 S''^2 T''^2 \ldots)$ je durch einen Komplex projiziert.

45. Führt die Korrelation des polaren Raumes einer reellen in zwei verschiedene Paare von Strahlenbüscheln erster Ordnung zerfallenen, einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung Z^2 die Kongruenz P_1^1 in sich über, so verwandelt sie auch die der Fläche Z^2 adjungierten linearen Komplexe Γ_{Z^2} in sich selbst (**43.**). Dabei gehen die Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 wie auch die jedes Z^2 adjungierten linearen Komplexes Γ_{Z^2}, deren Mittel-

punkte auf dem Träger w der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 durch Z^2 harmonisch getrennt sind, paarweise ineinander über. Zugleich erweisen sich je zwei durch einen Z^2 adjungierten linearen Komplex Γ_{Z^2} einander zugeordnete Strahlen (**43.**) von P_1^1 als reziproke Polaren für die zerfallene Fläche Z^2.

Bei einem Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung mit zwei hyperbolischen oder elliptischen Fundamentalinvolutionen sendet nun (**44.**) jede seiner Flächen einen ihr adjungierten linearen Komplex durch jede der ∞^2 dem F^2-Büschel adjungierten linearen Kongruenzen (**42.**). Eine $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ dieser linearen Kongruenzen und der von ihr getragene Büschel linearer Komplexe sei herausgegriffen. Für diesen Γ-Büschel bilden die einem nicht in $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ gelegenen Strahl s durch die Komplexe des Γ-Büschels zugeordneten Strahlen eine zu ihm projektive Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$. Ist — was wir nunmehr voraussetzen — s ein Strahl von P_1^1, und ist der Komplex Γ_{Z^2} des Γ-Büschels einer reellen Fläche Z^2 des F^2-Büschels $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungiert, so fällt nach dem am Anfange dieser Nummer Dargetanen der s durch Γ_{Z^2} zugeordnete Strahl s_{Z^2} von $\mathfrak{R}^2$ mit der Polare von s für Z^2 zusammen. Da Z^2 jede der ∞^1 reellen Flächen des F^2-Büschels $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ sein kann, hat die von den Polaren von s für die Flächen von $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ gebildete zu diesem F^2-Büschel projektive Regelschar zweiter Ordnung hiernach unendlich viele Strahlen mit der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ gemein. Sie ist folglich mit ihr identisch, und der F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ und der von der linearen Kongruenz $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ getragene Γ-Büschel sind projektiv aufeinander bezogen, wenn jeder Fläche des F^2-Büschels der ihr adjungierte lineare Komplex des Γ-Büschels entspricht. Bedenken wir jetzt, daß jede Fläche des F^2-Büschels $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ in den ihr adjungierten linearen Komplex ihre beiden (reellen oder konjugiert imaginären) in P_1^1 enthaltenen Strahlenbüschel erster Ordnung sendet (**43.**), dann sagen unsere Darlegungen nichts anderes aus als:

Die Gesamtheit der linearen Komplexe Γ_{X^2}, die je den Flächen X^2 eines Büschels $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung mit zwei hyperbolischen oder elliptischen Fundamentalinvolutionen adjungiert sind, bilden ∞^2 zum F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ projektive und zu ihm perspektiv gelegene Γ-Büschel. Und diese Γ-Büschel werden bzw. von den ∞^2 dem F^2-Büschel $F^2(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ adjungierten linearen Kongruenzen $\mathfrak{A}_1^1(R^2 S^2 T^2 \ldots)$ getragen.

46. Wir sind nunmehr imstande, das am Schlusse von Nummer **43** gewonnene Ergebnis zu vervollständigen, indem wir den Satz beweisen:

Das Γ-Gebüsch, dessen Stammbüschel von einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 getragen wird, enthält nicht nur die den einscharig in P_1^1 gelegenen Flächen zweiter Ordnung adjungierten linearen Komplexe, sondern diese Komplexe erfüllen auch das ganze Gebüsch.

Ein spezieller und ein gegebener nicht spezieller Komplex Γ_0 unseres Γ-Gebüsches werden nämlich durch einen noch durch einen zweiten speziellen Komplex gehenden Γ-Büschel des Γ-Gebüsches verbunden. Die Leitgeraden der beiden speziellen Komplexe dieses Γ-Büschels liegen bzw. in zwei Strahlenbüscheln erster Ordnung $(S\sigma)$, $(T\tau)$ von P_1^1, und die je auf die Strahlenbüschel $(S\sigma)$, $(T\tau)$ reduzierten Flächen zweiter Ordnung bestimmen einen durch sie gehenden Büschel $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung. Den zwei speziellen Komplexen dieses Γ-Büschels sind aber bzw. die auf die Strahlenbüschel $(S\sigma)$, $(T\tau)$ reduzierten Flächen zweiter Ordnung adjungiert (**43.**), folglich den Komplexen (**45.**) des Γ-Büschels bzw. die Flächen des F^2-Büschels $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$. Sonach erweist sich der gegebene nicht spezielle lineare Komplex Γ_0 des Gebüsches einer Fläche des F^2-Büschels $F^2(R^2S^2T^2\ldots)$ adjungiert. Da nach Nummer **43** endlich jeder spezielle Komplex des Γ-Gebüsches der seine Leitgerade enthaltenden, auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierten Fläche zweiter Ordnung adjungiert ist, so ist jeder Komplex des Γ-Gebüsches je einer einscharig in P_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung adjungiert. W. z. b. w.

Das Gebüsch der einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung und das Gebüsch der ihnen bzw. adjungierten linearen Komplexe, oder in anderen Worten das der Kongruenz P_1^1 adjungierte Γ-Gebüsch (**21.**), sind projektiv und in perspektiver Lage, wenn jeder Fläche des F^2-Gebüsches der ihr adjungierte lineare Komplex entspricht. Die beide Gebüsche aufeinander beziehende Projektivität ist ausgeartet. So entspricht allen einscharig in P_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen Flächen zweiter Ordnung der spezielle lineare Komplex Γ_w, dessen Leitgerade der Träger w der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 ist. Jeder einscharig in P_1^1 enthaltenen, durch zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 gehenden zerfallenen Fläche zweiter Ordnung entsprechen ferner alle Komplexe eines parabolischen Γ-Büschels, dessen Trägerkongruenz durch die in P_1^1 enthaltenen Strahlenbüschel der zerfallenen Fläche geht, jeder auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 reduzierten Fläche zweiter Ordnung alle Komplexe eines Büschels spezieller linearen Komplexe, deren Leitgeraden den Strahlenbüschel erster Ordnung selbst ausfüllen (**43.**). Wird das Gebüsch einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung zum polaren F^2-Gebüche $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1, indem man in ihm jeder Fläche

den Bündel für sie autopolarer Flächen zweiter Ordnung als Polar-F^2-Bündel zuordnet, so wird auch das zum F^2-Gebüsche perspektive der Kongruenz P_1^1 adjungierte Γ-Gebüsch polar und zum polaren Γ-Gebüsche $\Pi^P(\Gamma_{F^2})$ der parabolischen linearen Kongruenz P_1^1 (25.). Das polare F^2-Gebüsch $\Pi^P(F^2)$ ist ausgeartet (38.), ebenso das zu ihm perspektive polare Γ-Gebüsch $\Pi^P(\Gamma_{F^2})$.

47. Jeder zum Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 windschiefe Strahl $\mathfrak{f}$ ist im geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^P von P_1^1 dem Träger $\mathfrak{w}$ zugeordnet. Anders liegt die Sache bei den mit $\mathfrak{w}$ inzidenten nicht in P_1^1 gelegenen Strahlen $\mathfrak{f}$. Einem solchen $\mathfrak{w}$ in einem Punkte T schneidenden Strahl $\mathfrak{f}$ sind ∞^1 Strahlen eines Strahlenbüschels erster Ordnung zugeordnet. Der Mittelpunkt des Strahlenbüschels fällt mit dem Mittelpunkte S des Strahlenbüschels von P_1^1 in der Ebene $\mathfrak{f}\,\mathfrak{w} = \sigma$ zusammen, seine Ebene mit der Ebene τ des Strahlenbüschels von P_1^1 mit dem Mittelpunkte T. Jeder von $\mathfrak{w}$ verschiedene Strahl des Strahlenbüschels $(S\,\tau)$ ist jedem von $\mathfrak{w}$ verschiedenen Strahle des Strahlenbüschels $(T\sigma)$ zugeordnet, umgekehrt jeder von $\mathfrak{w}$ verschiedene Strahl von $(T\sigma)$ jedem von $\mathfrak{w}$ verschiedenen Strahle des Strahlenbüschels $(S\,\tau)$. Jedes Paar konjugiert imaginärer einander zugeordneten Strahlen des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^P von P_1^1 besteht hiernach aus zwei mit $\mathfrak{w}$ inzidenten konjugiert imaginären einander zugeordneten Strahlen dieses geschart involutorischen Raumes.

Die beiden Strahlenbüschel $(S\,\tau)$, $(T\sigma)$ bilden zusammen die Trägerregelschar $\mathfrak{R}^2$ eines Γ-Bündels $\Gamma_{\mathfrak{R}^2}$ des P_1^1 adjungierten Γ-Gebüsches (46.). Die Leitschar $\mathfrak{L}^2$ von $\mathfrak{R}^2$ besteht aus den beiden Strahlenbüscheln $(S\,\sigma)$, $(T\,\tau)$ von P_1^1. Sie ist zugleich die Trägerregelschar des zum Γ-Bündel $\Gamma_{\mathfrak{R}^2}$ gehörigen Stammbündels $\Gamma_{\mathfrak{L}^2}$ Der Stammbündel $\Gamma_{\mathfrak{L}^2}$ geht — gleichgültig welches Paar Strahlenbüschel $(S\,\sigma)$, $(T\tau)$ von P_1^1 vorliegen mag — jedesmal durch den von P_1^1 getragenen Γ-Büschel. Die linearen Strahlenkongruenzen des Stammbündels $\Gamma_{\mathfrak{L}^2}$ senden die eine ihrer beiden Leitgeraden in den Strahlenbüschel $(S\,\tau)$, die andere in den Strahlenbüschel $(T\sigma)$. Beide Leitgeraden jeder dieser linearen Kongruenzen sind nach obigem im geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^P von P_1^1 einander zugeordnet. Umgekehrt sind stets ein Strahl aus dem Strahlenbüschel $(S\,\tau)$ zusammen mit einem Strahle aus dem Strahlenbüschel $(T\sigma)$ die Leitgeraden einer linearen Strahlenkongruenz des Stammbündels $\Gamma_{\mathfrak{L}^2}$ und in Σ_{ig}^P einander zugeordnet. Dies alles gilt, unabhängig davon, ob die beiden Paare von Strahlenbüscheln $(S\,\tau)$, $(T\sigma)$ und $(S\,\sigma)$, $(T\tau)$ reell oder konjugiert imaginär sind; also zum Träger eine reelle oder imaginäre einscharig in P_1^1 enthaltene, durch zwei Strahlenbüschel von P_1^1 gehende Fläche zweiter Ordnung Z^2 haben. Bei einer

reellen Fläche Z^2 enthält der Stammbündel $\Gamma_{\mathfrak{Q}^2}$ keine elliptischen, bei einer imaginären Fläche Z^2 keine hyperbolischen linearen Strahlenkongruenzen. Im letzteren Falle sind die ∞^2 elliptischen linearen Strahlenkongruenzen des Γ-Bündels $\Gamma_{\mathfrak{Q}^2}$ die realen Darstellungen der ∞^2 konjugiert imaginären einander zugeordneten Strahlen von Σ_{ig}^P aus den konjugiert imaginären Strahlenbüscheln $(S\tau)$, $(T\sigma)$. Fällt die Fläche Z^2 nacheinander mit allen ∞^2 imaginären, je durch zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung von P_1^1 gehenden zerfallenen Flächen zweiter Ordnung zusammen, so werden somit nacheinander die realen Darstellungen aller ∞^4 Paare konjugiert imaginärer einander zugeordneten Strahlen aus dem geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^P der parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 gewonnen.

Berlin-Halensee, den 21. April 1930.

(Eingegangen am 28. Mai 1930.)

Über das Verhalten der Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises.

Von

Friedrich Lösch in Stuttgart.

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so besagt der Abelsche Grenzwertsatz die Richtigkeit der Relation

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

wenn sich x dem Punkt 1 „im Winkelraum" nähert. Erfüllen die a_n noch gewisse Bedingungen, so kann man weitergehende Aussagen machen, z. B. dann, wenn die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hinreichend stark ist[1]). Im ersten Teil dieser Note soll eine in dieser Richtung gehende Verallgemeinerung des Abelschen Grenzwertsatzes bewiesen werden. Als Anwendung soll im zweiten Teil ein sehr einfaches Beispiel einer auf $|x| = 1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergenten Potenzreihe konstruiert werden[2]). Das Beispiel beruht einzig darauf, daß die Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{4^n}$ geeignet aufgespalten werden. Wie im dritten Teil gezeigt wird, kann man analog

---

[1]) Vgl. K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie II (1928), S. 32, Aufgabe 6.

[2]) Ein solches Beispiel wurde angegeben von G. H. Hardy, A theorem concerning Taylor's series, The quarterly Journal of pure and applied Mathematics 44 (1913), S. 147—160, insbes. S. 158. Vgl. dazu E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl. (1929), S. 68. Ein anderes Beispiel findet sich bei L. Fejér, Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenzkreise überall stetig ist, Münchener Sitzungsberichte 1917, S. 33—50, insbes. S. 48—50.

durch Aufspalten der Glieder der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \log n \cdot x^{2^n}$ ein einfaches Beispiel[3]) einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n \to 0$ angeben, welche auf dem ganzen Rande des Einheitskreises divergiert.

I.

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konvergiert gleichmäßig im Innern und auf dem Rand jedes den Kreis* $|x| = 1$ *im Punkt* $+1$ *von innen berührenden Kreises, falls*

1. *die nicht verschwindenden Glieder aus* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ *je eine alternierende Reihe bilden* $(a_n = \alpha_n + i\,\beta_n)$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\sigma}}$ *für ein gewisses* $\sigma > 0$ *konvergent ist.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß der Kreis um den beliebigen Punkt p $(0 < p < 1)$ mit Radius $(1 - p)$ in der Umgebung von $+1$ ganz innerhalb des Bogens der Kurve

$$x = \left(\frac{e^{i\varphi}}{2 - e^{i\varphi}}\right)^k \qquad (k \text{ ganz, positiv}) \tag{1}$$

verläuft, falls nur k hinreichend groß ist. Man rechnet das sofort nach, indem man den Abstand der Punkte der Kurve (1) von p aufstellt. Es genügt daher, zu zeigen, daß bei jedem festen k die beiden Reihen

$$\sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{e^{i\varphi}}{2 - e^{i\varphi}}\right)^{kn} \tag{I}$$

und

$$\sum_{n=3}^{\infty} \beta_n \left(\frac{e^{i\varphi}}{2 - e^{i\varphi}}\right)^{kn} \tag{II}$$

für alle φ mit $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ oder aus Symmetriegründen nur mit $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ gleichmäßig konvergieren. Wir führen den Nachweis für (I), entsprechend ist er für (II) zu führen.

a) Es ist

$$|2 - e^{i\varphi}| = \sqrt{5 - 4\cos\varphi} = \sqrt{1 + 2\varphi^2 - \frac{\varphi^4}{6} + \ldots} > \sqrt{1 + \alpha\varphi^2}$$
$$(1 < \alpha < 2)$$

für hinreichend kleines φ $(\varphi < \varphi_1)$. Wegen der monotonen Abnahme von

[3]) Ein solches Beispiel wurde zuerst angegeben von N. Lusin, Über eine Potenzreihe, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **32** (1911), S. 386—390, insbes. S. 388. Vgl. dazu E. Landau, loc. cit. [2]), S. 69.

$\frac{\log n}{n}$ für $n > 3$ läßt sich φ für $0 < \varphi < \varphi_2$ eindeutig in die Form

$$\varphi = \sqrt{2\frac{\log r}{r}} \quad \text{mit} \quad r > 3 \tag{2}$$

setzen. Dann gilt aber

$$\left|\frac{e^{i\varphi}}{2-e^{i\varphi}}\right|^{kn} \leqq (1+\alpha\varphi^2)^{-k\cdot\frac{n}{2}} = \left(1+\alpha\cdot\frac{2\log r}{r}\right)^{-\frac{r}{2\log r}\cdot k\frac{\log r}{r}n} < n^{-\beta k}$$

$$\text{für} \quad n \geqq r, \quad 1 < \beta < \alpha$$

(falls r hinreichend groß, also $\varphi < \varphi_3$). Daraus folgt

$$\left|\alpha_n\left(\frac{e^{i\varphi}}{2-e^{i\varphi}}\right)^{kn}\right| < \frac{|a_n|}{n^{\beta k}} \quad \text{für} \quad n \geqq r, \ 0 < \varphi < \operatorname{Min}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3). \tag{3}$$

b) Weiter ist

$$0 < \operatorname{arc}\frac{e^{i\varphi}}{2-e^{i\varphi}}$$

$$= \varphi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi}{2-\cos\varphi} \leqq \varphi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\varphi-\frac{\varphi^3}{6}}{1+\frac{\varphi^2}{2}} < \varphi - \operatorname{arc\,tg}\left(\varphi - \frac{2}{3}\varphi^3\right) < \varphi^3$$

für $\varphi < \varphi_4$. Damit hat man aber nach (2)

$$0 < \operatorname{arc}\left(\frac{e^{i\varphi}}{2-e^{i\varphi}}\right)^{kn} < kn\left(2\frac{\log r}{r}\right)^{\frac{3}{2}},$$

also einerseits

$$0 < \operatorname{arc}\left(\frac{e^{i\varphi}}{2-e^{i\varphi}}\right)^{kn} < k\frac{(2\log r)^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} < \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad n \leqq r, \tag{4}$$

falls r hinreichend groß, also $\varphi < \varphi_5$. Andrerseits gilt wegen der monotonen Abnahme von $\frac{\log n}{n}$ für $n > 3$

$$0 < \operatorname{arc}\left(\frac{e^{i\varphi}}{2-e^{i\varphi}}\right)^{kn} < kn\left(2\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{3}{2}} = C\cdot\frac{(\log n)^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \quad \text{für} \quad 3 \leqq n \leqq r$$

und damit

$$\left|\Im\left\{\left(\frac{e^{i\varphi}}{2-e^{i\varphi}}\right)^{kn}\right\}\right| < C\frac{(\log n)^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \quad \text{für} \quad 3 \leqq n \leqq r. \tag{5}$$

c) Die Abschätzungen (3), (4), (5) gelten für

$$0 < \varphi \leqq \operatorname{Min}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) = \varphi_0.$$

Dort kann man nun so weiterschließen: Die Realteile von $\left(\frac{e^{i\varphi}}{2-e^{i\varphi}}\right)^{kn}$ sind nach (4) für $3 \leqq n \leqq r$ positiv, kleiner als Eins und nehmen mit wachsendem n ab. Daher sind die Realteile der nicht verschwindenden Glieder von (I) für $n \leqq r$ alternierend und die einzelnen Glieder sind kleiner als

die der Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n$. Was die Imaginärteile der Glieder von (I) für $n \leqq r$ betrifft, so werden dieselben nach (5) majorisiert durch die Glieder der n. V. konvergenten Reihe

$$C \cdot \sum_{n=3}^{\infty} |a_n| \frac{(\log n)^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Nimmt man noch (3) hinzu, so findet man die für $0 < \varphi \leqq \varphi_0$ gültige Relation

$$\left| \sum_{n=n_1}^{n_2} \alpha_n \left(\frac{e^{i\varphi}}{2 - e^{i\varphi}} \right)^{kn} \right| \leqq \sum_{n=n_1}^{n_2} |a_n| \left(\frac{1}{n^{\beta k}} + C \frac{(\log n)^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \right) + 2 |\alpha_{\bar{n}_1}|$$

($\bar{n}_1$ soll den größten Index $\leqq n_1$ bedeuten, für den $a_{\bar{n}_1} \neq 0$ ist), womit die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (I) für $0 < \varphi \leqq \varphi_0$ erwiesen ist. Für $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \pi$ folgt die gleichmäßige Konvergenz aus der der Potenzreihe in jedem abgeschlossenen Teil ihres Konvergenzbereichs. Da endlich für $\varphi = 0$ Konvergenz vorhanden ist, so ist der Beweis fertig.

II.

Die Kurve

$$y = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{2i\varphi})$$

verläuft in der Umgebung des Punkts $+1$ ganz innerhalb des Kreises um p $(0 < p < 1)$ mit Radius $1 - p$, falls p hinreichend klein ist[4]). Da weiter die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} y^{4^n} \quad \left(a_{4^n} = \frac{(-1)^n}{n}, \quad a_\nu = 0 \text{ für } \nu \neq 4^n \right)$$

offensichtlich den Bedingungen des Satzes in I. genügt, so konvergiert die Polynomreihe

$$\text{(II)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\frac{1}{2} x (1 + x) \right]^{4^n}$$

gleichmäßig auf $|x| = 1$. Da endlich auf $|x| = 1$ jede Summe von Gliedern des Polynoms $\left[\frac{1}{2} x (1 + x) \right]^{4^n}$ kleiner als 1 ist, so konvergiert auf $|x| = 1$ auch die Potenzreihe gleichmäßig, die aus (II) entsteht, wenn man die Polynome in ihre einzelnen Glieder zerlegt. Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe konvergiert die Reihe aber nicht absolut.

---

[4]) Der Ansatz

$$\left(\frac{1}{2} e^{i\varphi} + \frac{1}{2} e^{2i\varphi} - p \right) \left(\frac{1}{2} e^{-i\varphi} + \frac{1}{2} e^{-2i\varphi} - p \right) < (1 - p)^2$$

liefert sofort die Bedingung $0 < p < \frac{1}{10}$.

III.

Man bilde die Potenzreihe, die entsteht, indem man die Polynome der Reihe

$$\text{(III)} \qquad \sum_{\nu=2}^{\infty} P_\nu(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \log \nu \left[\frac{1}{2}\left(1 + e^{-i\sum_{r=1}^{\nu}\frac{1}{r}} x\right)\right]^\nu x^{2\nu}$$

in ihre einzelnen Glieder zerlegt.

a) Die Koeffizienten dieser Potenzreihe gehen gegen Null, denn der Betrag des maximalen Koeffizienten in $P_\nu(x)$ ist

$$\log \nu \cdot \frac{1}{2^\nu}\binom{\nu}{\left[\frac{\nu}{2}\right]} = O\left(\frac{\log \nu}{\sqrt{\nu}}\right).$$

b) Bereits die Reihe (III) divergiert auf dem ganzen Einheitskreis. Wegen der Divergenz von $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}$ gibt es nämlich zu jedem $x = \epsilon^{i\varphi}$ unendlich viele ν, für die φ im Intervall

$$\sum_{r=1}^{\nu}\frac{1}{r} - \frac{1}{\nu} \leqq \varphi \leqq \sum_{r=1}^{\nu}\frac{1}{r} + \frac{1}{\nu}$$

$\left(\sum_{r=1}^{\nu}\frac{1}{r} \bmod 2\pi \text{ genommen}\right)$ liegt. Für diese ν gilt

$$|P_\nu(x)| \geqq \log \nu \cdot \left(\frac{1+\cos\frac{1}{\nu}}{2}\right)^\nu > \log \nu \cdot \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)^\nu \geqq \frac{1}{2}\log \nu \qquad (\nu \geqq 2).$$

Stuttgart, 28. August 1930.

(Eingegangen am 1. September 1930.)

Der Kreis durch drei Punkte.

Von

Alwin Walther in Darmstadt.

Daß aus dem Kreise durch drei getrennte Punkte bei deren Zusammenrücken als Grenzgebilde der Krümmungskreis hervorgeht, ist altbekannt und wird in vielen Lehrbüchern[1]) zum Aufbau der Krümmungstheorie herangezogen (wobei freilich das Wesentliche oft durch nebensächliches Beiwerk verdunkelt ist). Hingegen scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, daß für den „finiten" Fall selbst ganz ähnliche Formeln bestehen wie für den „Infinitesimalfall", nur mit Differenzenquotienten statt Ableitungen. Diese Formeln sollen hier mitgeteilt werden.

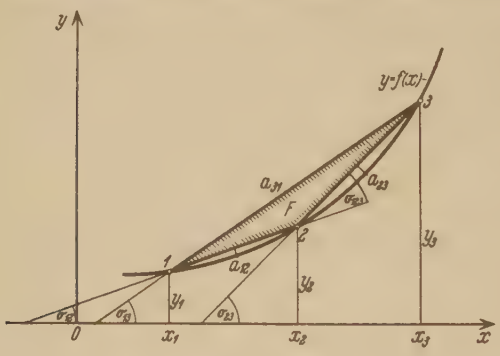

Fig. 1.

Wir betrachten in einem rechtwinkligen $x\,y$-Koordinatensystem mit gleichen Maßstäben auf beiden Achsen drei auf einer Kurve $y = f(x)$ liegende Punkte 1, 2, 3 mit den Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 (Fig. 1). Der Kreis durch sie ist der Umkreis des von ihnen gebildeten Dreiecks. Für den Radius r dieses Umkreises gilt die elementargeometrische Formel[2])

$$(1) \qquad r = \frac{a_{12}\,a_{23}\,a_{31}}{4\,F},$$

[1]) Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik, 2. Band, Leipzig (S. Hirzel) 1912, S. 436—440; Ch.-J. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, 1. Band, 6. Aufl. Louvain (Librairie universitaire) und Paris (Gauthier-Villars) 1926, S. 244—246.

[2]) In der Gestalt

$$4\,r\,F = a\,b\,c$$

für ein Dreieck mit den Seiten a, b, c, dem Gegenwinkel γ zu c, dem Umkreisradius r und dem Flächeninhalt F erhält man sie am bequemsten durch Multiplikation der „Sehnenformel"

$$2\,r \sin\gamma = c$$

mit der „Inhaltsformel"

$$2\,F = a\,b \sin\gamma.$$

wenn a_{12}, a_{23}, a_{31} die absolut genommenen Längen der drei Dreiecksseiten $\overline{1\,2}$, $\overline{2\,3}$, $\overline{3\,1}$ und

$$F = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

den Flächeninhalt des Dreiecks 1 2 3 bedeuten.

F hängt mit dem zweiten Differenzenquotienten von $y = f(x)$ für die Punkte 1, 2, 3 zusammen. Wir bilden die ersten Differenzenquotienten[3])

$$[y_1\,y_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad [y_2\,y_3] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \qquad [y_1\,y_3] = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

und den zweiten Differenzenquotienten[4])

$$[y_1\,y_2\,y_3] = 2\,\frac{[y_2\,y_3] - [y_1\,y_2]}{x_3 - x_1},$$

dann ergibt sich durch Einsetzen

$$[y_1\,y_2\,y_3] = \frac{2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = \frac{4F}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}, \tag{3}$$

in Worten: *Der zweite Differenzenquotient für drei Punkte ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte des von ihnen gebildeten Dreiecks dividiert durch das Produkt der drei zyklisch genommenen Abszissendifferenzen*[5]).

Vereinigt man (1) und (3) und führt durch

$$\frac{x_2 - x_1}{a_{12}} = \cos\sigma_{12}, \qquad \frac{x_3 - x_2}{a_{23}} = \cos\sigma_{23}, \qquad \frac{x_3 - x_1}{a_{31}} = \cos\sigma_{13}$$

die Steigungswinkel σ_{12}, σ_{23}, σ_{13} der Dreiecksseiten $\overline{1\,2}$, $\overline{2\,3}$, $\overline{1\,3}$ ein, so entsteht in

$$\boxed{r = \frac{1}{[y_1\,y_2\,y_3]\cos\sigma_{12}\cos\sigma_{23}\cos\sigma_{13}}} \tag{I}$$

---

[3]) Vgl. N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin (Julius Springer) 1924, 1. Kap., § 2, S. 8—10; A. Walther, Differenzenrechnung, Kap. XXIII in Pascals Repertorium der höheren Mathematik I_3, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin (B. G. Teubner) 1929, S. 1189—1249, insbes. § 1, S. 1189—1194.

[4]) Der Faktor 2 ist abweichend vom üblichen Gebrauche zur späteren Bequemlichkeit hinzugefügt. Vgl. E. Hopf, Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften, Diss. Berlin (Norddeutsche Buchdruckerei u. Verlagsanstalt) 1926.

[5]) Hieraus erhellt übrigens unmittelbar, daß die beiden Erklärungen der Konvexität einer Kurve durch $F > 0$ und durch $[y_1\,y_2\,y_3] > 0$ (oder bei passenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen $y'' > 0$, weil $[y_1\,y_2\,y_3]$ gleich der zweiten Ableitung y'' in einer Zwischenstelle zwischen x_1, x_2, x_3 ist) gleichwertig sind, was — wenn überhaupt — meist recht umständlich bewiesen wird.

das finite Analogon der bekannten Infinitesimalformel

$$(I^*) \qquad \varrho = \frac{1}{y'' \cos^3 \tau}$$

für den Krümmungsradius ϱ. *Die dritte Potenz* $\cos^3 \tau$ *für den Steigungswinkel* τ *der Tangente an* $y = f(x)$ *ist aufgelöst in das Produkt der Kosinus* $\cos \sigma_{12}$, $\cos \sigma_{23}$, $\cos \sigma_{13}$ *für die Steigungswinkel dreier ein geschlossenes Dreieck bildender Kurvensehnen, und die zweite Ableitung* y'' *ist ersetzt durch den zweiten Differenzenquotienten* $[y_1 y_2 y_3]$ *für die drei Eckpunkte* 1, 2, 3 *des Dreiecks.*

Umgekehrt geht beim Zusammenrücken der drei Punkte unter passenden Differenzierbarkeitsannahmen (I*) aus (I) hervor. Ein Differenzenquotient konvergiert nach der Ableitung derselben Ordnung z. B., wenn diese im Grenzpunkte existiert und stetig ist[6]).

Unter Ausdeutung der ersten Differenzenquotienten als Steigungsmaße

$$[y_1 y_2] = \operatorname{tang} \sigma_{12}, \qquad [y_2 y_3] = \operatorname{tang} \sigma_{23}, \qquad [y_1 y_3] = \operatorname{tang} \sigma_{13}$$

können wir auch schreiben

$$(II) \qquad \boxed{r = \frac{\sqrt{1+[y_1 y_2]^2}\,\sqrt{1+[y_2 y_3]^2}\,\sqrt{1+[y_1 y_3]^2}}{[y_1 y_2 y_3]}};$$

Grenzfall hierzu ist

$$(II^*) \qquad \varrho = \frac{\sqrt{1+y'^2}^3}{y''}$$

mit Zusammenziehung der drei Wurzeln zur dritten Potenz einer einzigen Wurzel.

Auch die Formel

$$(III^*) \qquad \varrho = \frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}}$$

für den Krümmungsradius einer Kurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ in Parameterdarstellung mit dem Parameter t (Punkte Differentiationen nach t) läßt sich übertragen. Es seien $[x_1 x_2]$, $[y_1 y_2]$ die ersten und $[x_1 x_2 x_3]$, $[y_1 y_2 y_3]$ die zweiten Differenzenquotienten von x und y in bezug auf den Parameter t, dann findet man durch geeignete Subtraktionen von Zeilen in (2) leicht

$$\frac{4F}{(t_1-t_2)(t_2-t_3)(t_3-t_1)} = \begin{vmatrix} [x_1 x_2] & [y_1 y_2] \\ [x_1 x_2 x_3] & [y_1 y_2 y_3] \end{vmatrix}$$

$$= [x_1 x_2][y_1 y_2 y_3] - [y_1 y_2][x_1 x_2 x_3]$$

ähnlich (3). Durch Verbindung mit (1) folgt zunächst

$$r = \frac{\frac{a_{12}}{t_2-t_1} \cdot \frac{a_{23}}{t_3-t_2} \cdot \frac{a_{31}}{t_3-t_1}}{[x_1 x_2][y_1 y_2 y_3] - [y_1 y_2][x_1 x_2 x_3]}$$

[6]) Für allgemeinere Voraussetzungen vgl. E. Hopf, a. a. O.

und wegen $a_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ usw. sodann

(III)
$$r = \frac{\sqrt{[x_1\,x_2]^2 + [y_1\,y_2]^2}\ \sqrt{[x_2\,x_3]^2 + [y_2\,y_3]^2}\ \sqrt{[x_1\,x_3]^2 + [y_1\,y_3]^2}}{[x_1\,x_2]\,[y_1\,y_2\,y_3] - [y_1\,y_2]\,[x_1\,x_2\,x_3]}.$$

Man mag hierin, um die Analogie mit der Bogenableitung $\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ in (III*) hervorzuheben, die drei Wurzeln als Sehnendifferenzenquotienten auffassen.

Schließlich sei die mit (1) eng verbundene Beziehung

$$r = \frac{a_{12}}{2 \sin \sigma_{123}}$$

erwähnt, in der

$$\sigma_{123} = \sigma_{23} - \sigma_{12}$$

die Änderung des Sehnensteigungswinkels gibt. Als Infinitesimalformel ist ihr

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau}$$

zugeordnet, wie einfach zu durchschauen (Fig. 2),

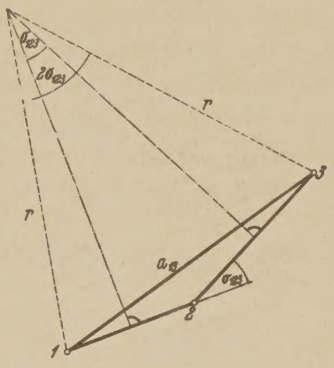

Fig. 2.

aber mit Differenzenquotienten wohl nur weniger elegant aufzuschreiben ist.

Um auch die Koordinaten a und b des Kreismittelpunktes zu berechnen, denken wir ihn uns als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{1}{[y_1\,y_2]}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$
$$y - \frac{y_1 + y_3}{2} = -\frac{1}{[y_1\,y_3]}\left(x - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)$$

zu den Dreiecksseiten $\overline{1\,2}$ und $\overline{1\,3}$ und erhalten die Ausdrücke

(IV)
$$\begin{aligned} a &= \frac{x_1 + x_3}{2} - \frac{[y_1\,y_3]}{[y_1\,y_2\,y_3]}(1 + [y_1\,y_2]\cdot[y_2\,y_3]) \\ b &= \frac{y_1 + y_3}{2} + \frac{1}{[y_1\,y_2\,y_3]}(1 + [y_1\,y_2]\cdot[y_2\,y_3]) \end{aligned},$$

die ersichtlich und mit Worten leicht näher charakterisierbar dem geläufigen Formelpaar

(IV*)
$$\xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2),$$
$$\eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2)$$

für die Koordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes entsprechen.

Die gewonnenen Ergebnisse sind einmal theoretisch wichtig für eine vertiefte Einsicht in den Mechanismus des Grenzüberganges von der Differenzenrechnung zur Differentialrechnung[7]). Mir scheint z. B., um eine Weiterführung anzudeuten, daß die schönen Untersuchungen von R. Sauer zur „finiten" Differentialgeometrie[8]) durch Synthese der geometrischen Überlegungen mit Gesichtspunkten der Differenzenrechnung noch bereichert werden können; ich behalte mir vor, hierauf später einzugehen.

Zum anderen kommt auch in der Praxis der Kreis durch drei Punkte oft vor, wenn man z. B. in der Getriebelehre ein Stück einer Koppelkurve für ein Gelenkviereck[9]) oder beim Bau von Neigungswaagen ein Stück der Hüllkurve des Stahlbandes für den Lastangriff[10]) näherungsweise durch den mechanisch leicht zu verwirklichenden Kreisbogen ersetzen will. Es ist dann bequemer, die Differenzenquotienten zu bilden und unsere Formeln anzuwenden als mit dem üblichen Verfahren in die Kreisgleichung $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ die Koordinaten der gegebenen Punkte einzutragen und die drei entstehenden Gleichungen nach a, b und r aufzulösen.

---

[7]) Vgl. A. Walther, Über die neuere Entwicklung der Differenzenrechnung, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **34** (1925), S. 118–131.

[8]) Zum Beispiel R. Sauer, Herleitung differentialgeometrischer Flächeneigenschaften aus Sehnen-Dreiecksflachen, Sitzungsber. Akad. München 1929, S. 307—324.

[9]) Vgl. H. Alt, Kurvenlose Rastgetriebe, Vortrag auf der Dresdener Tagung für Getriebetechnik 28. April 1930. Auszug in: Getriebetechnik beim Bau von Verarbeitungsmaschinen, VDI-Ztschr. **74** (1930), S. 1457–1460.

[10]) Vgl. K. Diehl, Die Berechnung der Neigungswiegebalken mit festem Gegengewicht, Diss. Darmstadt (Halle, W. Knapp) 1930.

(Eingegangen am 5. September 1930.)